

Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen

Aufgaben und Lösungen

<http://www.fersch.de>

©Klemens Fersch

2010

Inhaltsverzeichnis

1	Eigene Aufgaben lösen	1
2	Wissen	1
3	Aufgabenstellung	1
4	Grundlagen	2
5	Quadratische Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$	4
5.1	Aufgaben	4
5.2	Lösungen	5
6	Kubische Funktionen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	100
6.1	Aufgaben	100
6.2	Lösungen	101
7	Funktionen 4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	200
7.1	Aufgaben	200
7.2	Lösungen	201
8	Funktionen höheren Grades	259
8.1	Aufgaben	259
8.2	Lösungen	260

1 Eigene Aufgaben lösen

Dieses PDF-Dokument wurde interaktiv auf <http://www.fersch.de> erstellt.

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Kurvendiskussion ganzrationalen Funktionen](#)

2 Wissen

[Wikipedia-Polynome](#)

[Wikipedia-Kurvendiskussion](#)

3 Aufgabenstellung

Diskutieren Sie eine ganzrationale Funktion

- Ermitteln Sie die:
 - 1.Ableitung

- 2.Ableitung
- 3.Ableitung
- Stammfunktion
- Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereich (Grenzwerte).
- Berechnen sie die Schnittpunkt der Funktion mit der x-Achse (Nullstellen).
- Wo liegt die Funktion oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse (Vorzeichentabelle)?
- Bestimmen Sie Art und Lage der Extremwerte (Hochpunkte/Tiefpunkte).
- In welchen Bereichen ist die Funktion streng monoton steigend (sms) oder streng monoton fallend (smf)?
- Überprüfen Sie die Funktion auf mögliche Wendepunkte.
- Geben Sie die Intervalle des Krümmungsverhaltens an.
- Zeichnen sie die Funktion mit Hilfe einer Wertetabelle.

4 Grundlagen

- Definitions- und Wertebereich
 - Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
 - Wertebereich:
 - * höchster Exponent ungerade: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
 - * höchster Exponent gerade:
 - $\mathbb{W} = [\text{absoluter Tiefpunkt}; \infty[$
 - $\mathbb{W} =] - \infty; \text{absoluter Hochpunkt}]$
- Grenzwert

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Leitkoeffizient	höchster Exponent	Grenzwert
+	gerade	$f(x) \rightarrow +\infty$
-	gerade	$f(x) \rightarrow -\infty$
+	ungerade	$f(x) \rightarrow -\infty$
-	ungerade	$f(x) \rightarrow +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Leitkoeffizient	höchster Exponent	Grenzwert
+	gerade	$f(x) \rightarrow +\infty$
-	gerade	$f(x) \rightarrow -\infty$
+	ungerade	$f(x) \rightarrow -\infty$
-	ungerade	$f(x) \rightarrow +\infty$

- Symmetrie
 - $f(x)$ hat nur ungerade Exponenten oder $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung
 - $f(x)$ hat nur gerade Exponenten oder $f(-x) = f(x) \rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse
- Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse
 $f(x) = 0$ siehe [Nullstellen/Gleichungen](#)

- Vorzeichentabelle
 Bei ganzrationalen Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswert in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit $f(x)$

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	+	0	-
$f(x)$	oberhalb der x-Achse	0	unterhalb der x-Achse

Vorzeichentabelle mit der 1. Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	-
$f'(x)$	steigend	0	fallend

Vorzeichentabelle mit der 2. Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	-
$f''(x)$	links gekrümmt	0	rechts gekrümmt

- Ableitungen

Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen, vom Exponenten 1 abziehen:

$$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$$

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion im Punkt x an.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion im Punkt x an.

Beispiel:

$$f(x) = 2x^3 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 6x^2$$

$$f'(x) = 6x^2 \rightarrow f''(x) = 6 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 12x$$

- Extremwerte

Notwendige Bedingung: 1. Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der Nullstellen in die 2. Ableitung

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum bei x_0 .
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Lokales Maximum bei x_0 .
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

- Wendepunkte

Notwendige Bedingung: 2. Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der Nullstellen in die 3. Ableitung

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei x_0 .
- $f'''(x_0) = 0 \Rightarrow$ Kein Wendepunkt.

5 Quadratische Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$

5.1 Aufgaben

- | | |
|---|--|
| (1) $f(x) = 2x^2$ | (21) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x$ |
| (2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ | (22) $f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 5$ |
| (3) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$ | (23) $f(x) = 12x^2 + 12x$ |
| (4) $f(x) = -2x^2 - 8x$ | (24) $f(x) = -\frac{6}{25}x^2 + 1\frac{23}{25}x + 2\frac{4}{25}$ |
| (5) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ | (25) $f(x) = -\frac{9}{25}x^2 - 2\frac{22}{25}x + 3\frac{6}{25}$ |
| (6) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$ | (26) $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7\frac{7}{8}$ |
| (7) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3$ | (27) $f(x) = \frac{20}{49}x^2 + 3\frac{33}{49}x + 3\frac{13}{49}$ |
| (8) $f(x) = -2x^2 + 4$ | (28) $f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9}$ |
| (9) $f(x) = x^2 - 2$ | (29) $f(x) = -2\frac{2}{9}x^2 - 2\frac{2}{9}x + 4\frac{4}{9}$ |
| (10) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ | (30) $f(x) = -\frac{7}{9}x^2 + 4\frac{2}{3}x$ |
| (11) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ | (31) $f(x) = \frac{3}{49}x^2 - \frac{6}{49}x - 2\frac{46}{49}$ |
| (12) $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ | (32) $f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 3\frac{1}{3}x$ |
| (13) $f(x) = 2x^2 + 4x$ | (33) $f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 - 10x - 15$ |
| (14) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$ | (34) $f(x) = 4x^2 - 8x$ |
| (15) $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$ | (35) $f(x) = -\frac{24}{49}x^2 + 2\frac{22}{49}x + 2\frac{46}{49}$ |
| (16) $f(x) = x^2 + 6x - 2$ | (36) $f(x) = \frac{8}{49}x^2 + 2\frac{2}{7}x$ |
| (17) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5$ | (37) $f(x) = \frac{20}{81}x^2 + 2\frac{3}{9}x$ |
| (18) $f(x) = -\frac{8}{49}x^2 - \frac{24}{49}x + 1\frac{31}{49}$ | (38) $f(x) = 1\frac{11}{25}x^2 + 10\frac{2}{25}x + 8\frac{16}{25}$ |
| (19) $f(x) = -\frac{32}{81}x^2 - \frac{32}{81}x + 7\frac{73}{81}$ | |
| (20) $f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$ | |

5.2 Lösungen

Aufgabe (1)

- Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 2x^2$$

$$f'(x) = 4x$$

$$f''(x) = 4$$

$$F(x) = \int (2x^2) dx = \frac{2}{3}x^3 + c$$

- Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]0, \infty[$

- Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [2 \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [2 \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

- Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 2 \cdot (-x)^2$$

$$f(-x) = 2 \cdot x^2$$

$$f(-x) = f(x) \rightarrow \text{Symmetrie zur y-Achse:}$$

- Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 2x^2 = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_1 = 0; \quad \underline{\text{2-fache Nullstelle}}$$

- Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$$\underline{x \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$$

- Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:(0/0)}}$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$$\underline{x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$$

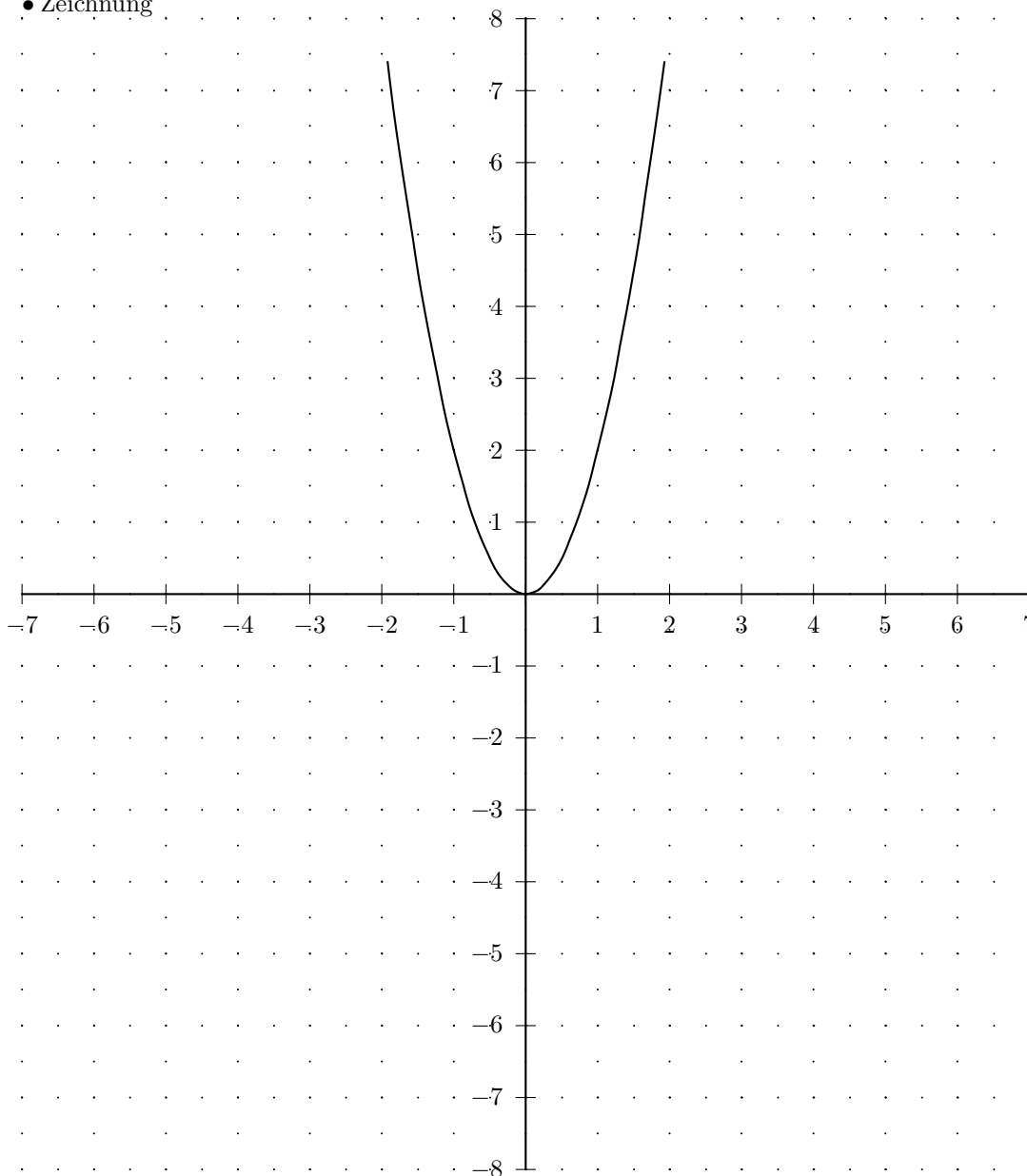
$$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	98	-28	4	$-228\frac{2}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$	-26	4	$-183\frac{1}{12}$
-6	72	-24	4	-144
$-5\frac{1}{2}$	$60\frac{1}{2}$	-22	4	$-110\frac{11}{12}$
-5	50	-20	4	$-83\frac{1}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{2}$	-18	4	$-60\frac{3}{4}$
-4	32	-16	4	$-42\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2}$	-14	4	$-28\frac{7}{12}$
-3	18	-12	4	-18
$-2\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	-10	4	$-10\frac{5}{12}$
-2	8	-8	4	$-5\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	-6	4	$-2\frac{1}{4}$
-1	2	-4	4	$-\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	4	$-\frac{1}{12}$
0	0	0	4	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	4	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	4	$\frac{1}{12}$
1	2	4	4	$\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	6	4	$2\frac{1}{4}$
2	8	8	4	$5\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	10	4	$10\frac{5}{12}$
3	18	12	4	18
$3\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2}$	14	4	$28\frac{7}{12}$
4	32	16	4	$42\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{2}$	18	4	$60\frac{3}{4}$
5	50	20	4	$83\frac{1}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$60\frac{1}{2}$	22	4	$110\frac{11}{12}$
6	72	24	4	144
$6\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$	26	4	$183\frac{1}{12}$
7	98	28	4	$228\frac{2}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (2)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

$$f'(x) = -x$$

$$f''(x) = -1$$

$$F(x) = \int (-\frac{1}{2}x^2)dx = -\frac{1}{6}x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 0[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot (-x)^2$$

$$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x_1 = 0$; 2-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	-	0	-

$x \in] - \infty; 0[\cup] 0; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x_2 = 0$; 1-fache Nullstelle

$$f''(0) = -1$$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(0/0)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	+	0	-

$x \in] - \infty; 0[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

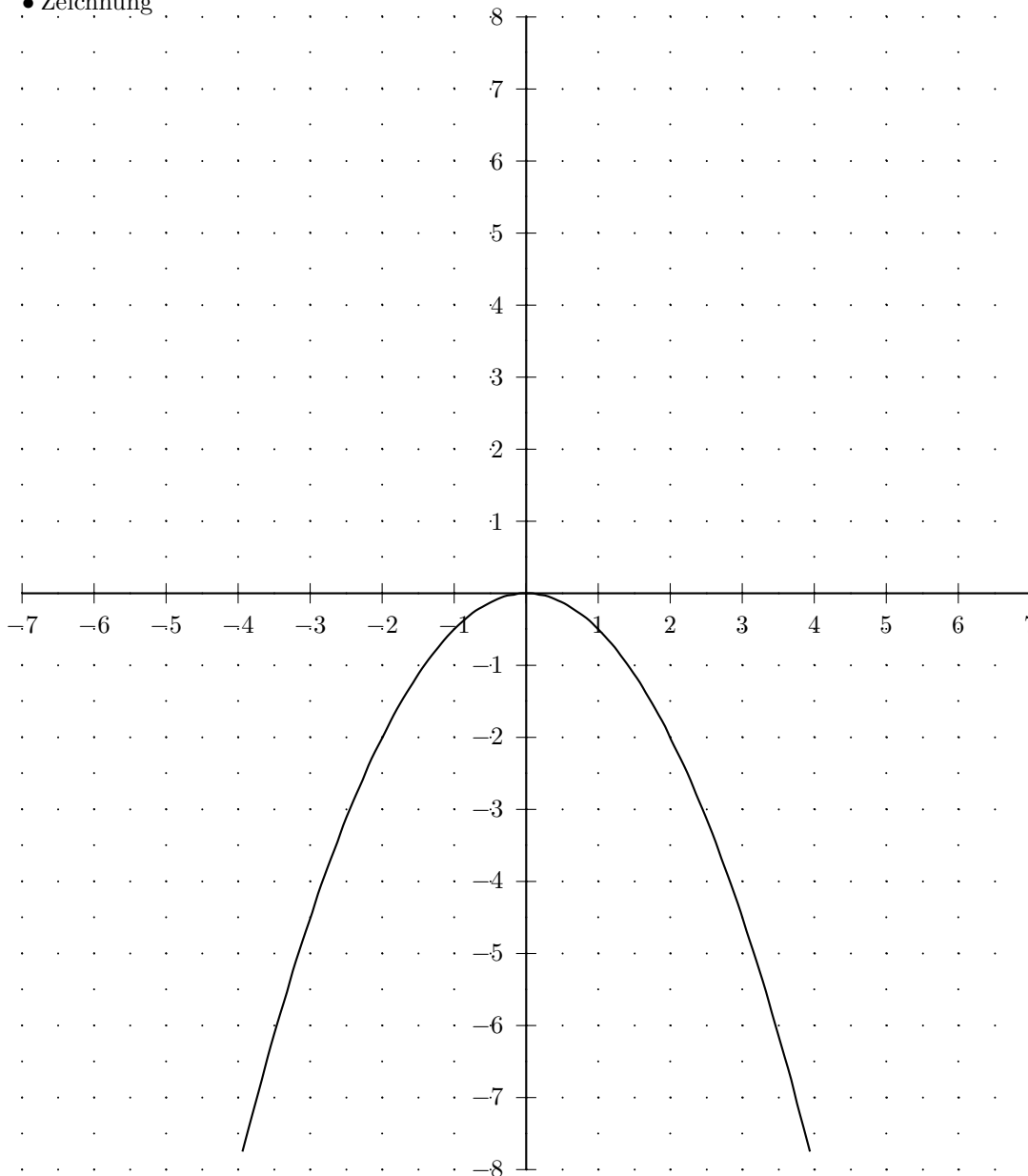
$x \in] 0; \infty[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-24\frac{1}{2}$	7	-1	$57\frac{1}{6}$
$-6\frac{1}{2}$	$-21\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	-1	$45\frac{37}{48}$
-6	-18	6	-1	36
$-5\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{8}$	$5\frac{1}{2}$	-1	$27\frac{35}{48}$
-5	$-12\frac{1}{2}$	5	-1	$20\frac{5}{6}$
$-4\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	$4\frac{1}{2}$	-1	$15\frac{3}{16}$
-4	-8	4	-1	$10\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{8}$	$3\frac{1}{2}$	-1	$7\frac{7}{48}$
-3	$-4\frac{1}{2}$	3	-1	$4\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$2\frac{1}{2}$	-1	$2\frac{29}{48}$
-2	-2	2	-1	$1\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{2}$	-1	$\frac{9}{16}$
-1	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{1}{6}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{48}$
0	0	0	-1	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	-1	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{48}$
1	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	$-\frac{1}{6}$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{8}$	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{9}{16}$
2	-2	-2	-1	$-1\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$-2\frac{1}{2}$	-1	$-2\frac{29}{48}$
3	$-4\frac{1}{2}$	-3	-1	$-4\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{8}$	$-3\frac{1}{2}$	-1	$-7\frac{7}{48}$
4	-8	-4	-1	$-10\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	$-4\frac{1}{2}$	-1	$-15\frac{3}{16}$
5	$-12\frac{1}{2}$	-5	-1	$-20\frac{5}{6}$
$5\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{8}$	$-5\frac{1}{2}$	-1	$-27\frac{35}{48}$
6	-18	-6	-1	-36
$6\frac{1}{2}$	$-21\frac{1}{8}$	$-6\frac{1}{2}$	-1	$-45\frac{37}{48}$
7	$-24\frac{1}{2}$	-7	-1	$-57\frac{1}{6}$

• Zeichnung



Aufgabe (3)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6 = -\frac{1}{2}(x + 3,464)(x - 3,464)$$

$$f'(x) = -x$$

$$f''(x) = -1$$

$$F(x) = \int (-\frac{1}{2}x^2 + 6)dx = -\frac{1}{6}x^3 + 6x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 6[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot (-x)^2 + 6$$

$$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 6$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 6 = 0 \quad / -6$$

$$-\frac{1}{2}x^2 = -6 \quad / : (-\frac{1}{2})$$

$$x^2 = \frac{-6}{-\frac{1}{2}}$$

$$x = \pm\sqrt{12}$$

$$x_1 = 3,464 \quad x_2 = -3,464$$

$$x_1 = -3,464; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 3,464; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,464$	$< x <$	$3,464$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in] - 3,464; 3,464[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - \infty; -3,464[\cup] 3,464; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = -1$$

$$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/6)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in] - \infty; 0[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

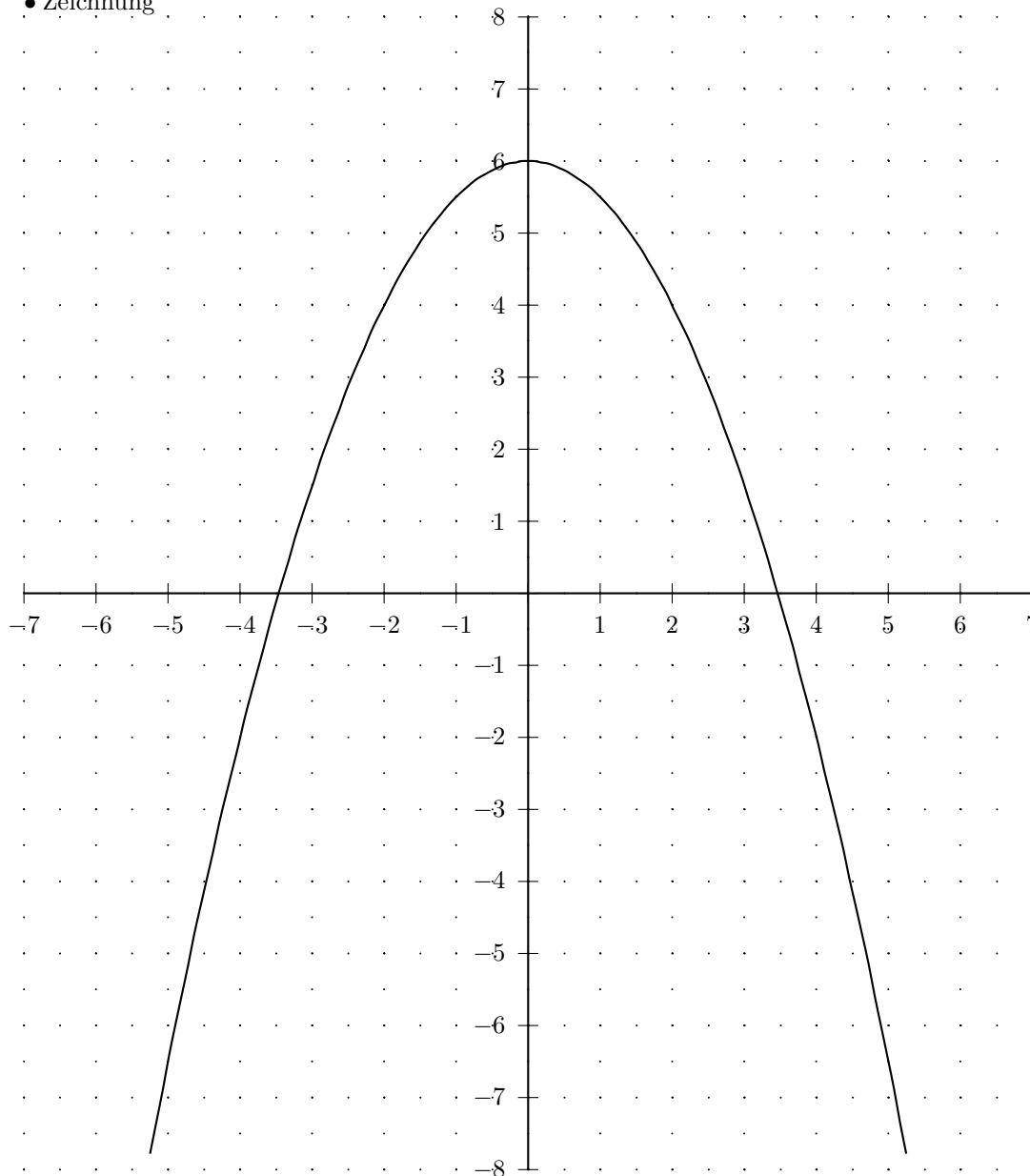
$x \in] 0; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-18\frac{1}{2}$	7	-1	$15\frac{1}{6}$
$-6\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	-1	$6\frac{37}{48}$
-6	-12	6	-1	0
$-5\frac{1}{2}$	$-9\frac{1}{8}$	$5\frac{1}{2}$	-1	$-5\frac{13}{48}$
-5	$-6\frac{1}{2}$	5	-1	$-9\frac{1}{6}$
$-4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{8}$	$4\frac{1}{2}$	-1	$-11\frac{13}{16}$
-4	-2	4	-1	$-13\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$3\frac{1}{2}$	-1	$-13\frac{41}{48}$
-3	$1\frac{1}{2}$	3	-1	$-13\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{8}$	$2\frac{1}{2}$	-1	$-12\frac{19}{48}$
-2	4	2	-1	$-10\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{2}$	-1	$-8\frac{7}{16}$
-1	$5\frac{1}{2}$	1	-1	$-5\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-2\frac{47}{48}$
0	6	0	-1	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	6	0	-1	0
$\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$2\frac{47}{48}$
1	$5\frac{1}{2}$	-1	-1	$5\frac{5}{6}$
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{8}$	$-1\frac{1}{2}$	-1	$8\frac{7}{16}$
2	4	-2	-1	$10\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{8}$	$-2\frac{1}{2}$	-1	$12\frac{19}{48}$
3	$1\frac{1}{2}$	-3	-1	$13\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-3\frac{1}{2}$	-1	$13\frac{41}{48}$
4	-2	-4	-1	$13\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{8}$	$-4\frac{1}{2}$	-1	$11\frac{13}{16}$
5	$-6\frac{1}{2}$	-5	-1	$9\frac{1}{6}$
$5\frac{1}{2}$	$-9\frac{1}{8}$	$-5\frac{1}{2}$	-1	$5\frac{13}{48}$
6	-12	-6	-1	0
$6\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{8}$	$-6\frac{1}{2}$	-1	$-6\frac{37}{48}$
7	$-18\frac{1}{2}$	-7	-1	$-15\frac{1}{6}$

• Zeichnung



Aufgabe (4)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -2x^2 - 8x = -2(x + 4)x$$

$$f'(x) = -4x - 8$$

$$f''(x) = -4$$

$$F(x) = \int (-2x^2 - 8x) dx = -\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 8[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -2 \cdot (-x)^2 - 8 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -2x^2 - 8x = 0$$

$$x(-2x - 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -2x - 8 = 0$$

$$-2x - 8 = 0 \quad / + 8$$

$$-2x = 8 \quad / : (-2)$$

$$x = \frac{8}{-2}$$

$$x = -4$$

$$\underline{x_1 = -4; \quad 1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$\underline{x_2 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -4$	$-4 < x < 0$	$0 < x$
$f(x)$	-	+	-

$x \in] - 4; 0[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - \infty; -4[\cup] 0; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -4x - 8 = 0$$

$$-4x - 8 = 0 \quad / + 8$$

$$-4x = 8 \quad / : (-4)$$

$$x = \frac{8}{-4}$$

$$x = -2$$

$$\underline{x_3 = -2; \quad 1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(-2) = -4$$

$$f''(-2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt: } (-2/8)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -2$	$-2 < x$
$f'(x)$	+	-

$x \in] - \infty; -2[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

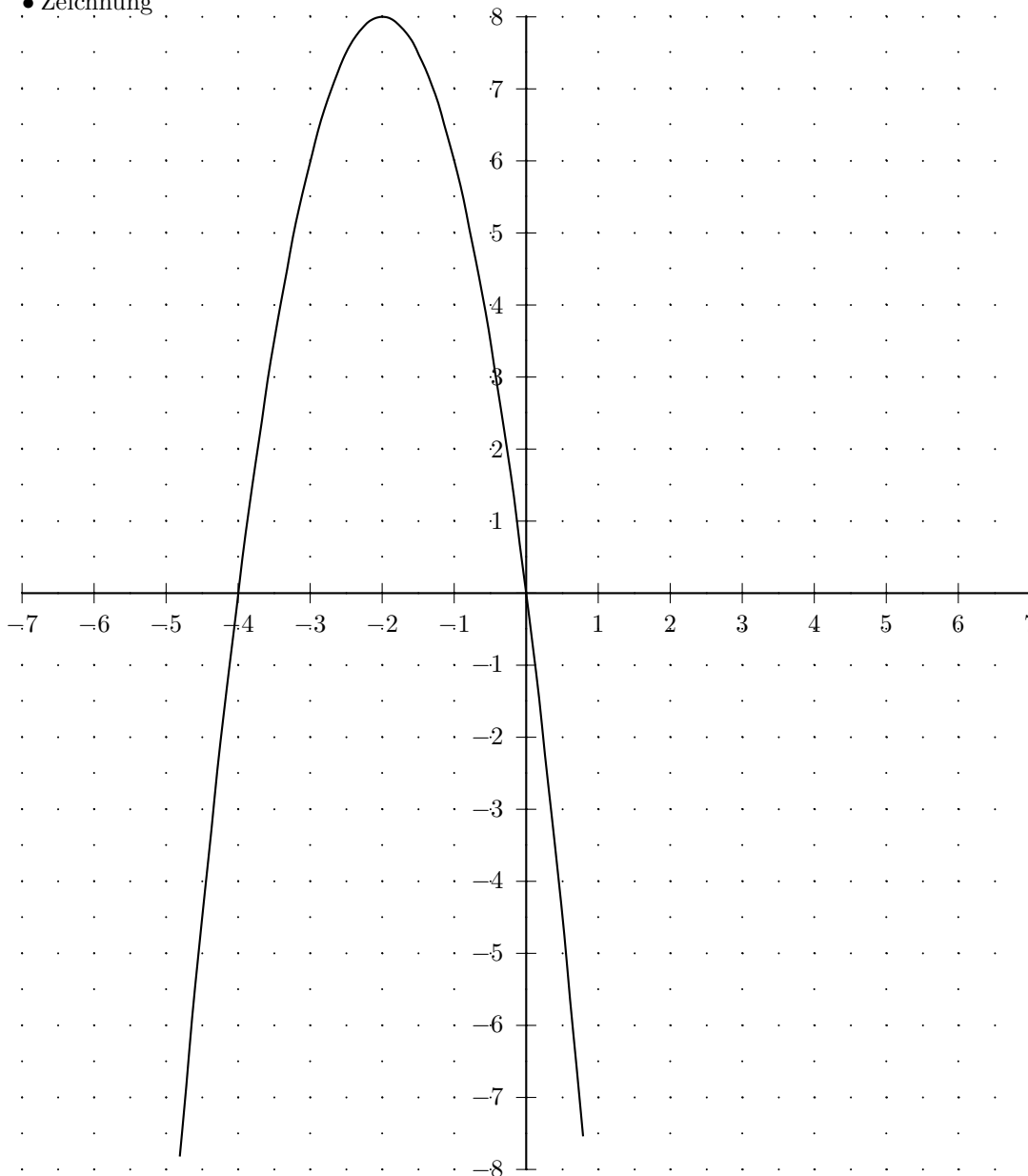
$x \in] - 2; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-42	20	-4	$32\frac{2}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$-32\frac{1}{2}$	18	-4	$14\frac{1}{12}$
-6	-24	16	-4	0
$-5\frac{1}{2}$	$-16\frac{1}{2}$	14	-4	$-10\frac{1}{12}$
-5	-10	12	-4	$-16\frac{2}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	10	-4	$-20\frac{1}{4}$
-4	0	8	-4	$-21\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	6	-4	$-20\frac{5}{12}$
-3	6	4	-4	-18
$-2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	2	-4	$-14\frac{7}{12}$
-2	8	0	-4	$-10\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	-2	-4	$-6\frac{3}{4}$
-1	6	-4	-4	$-3\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	-6	-4	$-\frac{11}{12}$
0	0	-8	-4	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-8	-4	0
$\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	-10	-4	$-1\frac{1}{12}$
1	-10	-12	-4	$-4\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$-16\frac{1}{2}$	-14	-4	$-11\frac{1}{4}$
2	-24	-16	-4	$-21\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$-32\frac{1}{2}$	-18	-4	$-35\frac{5}{12}$
3	-42	-20	-4	-54
$3\frac{1}{2}$	$-52\frac{1}{2}$	-22	-4	$-77\frac{7}{12}$
4	-64	-24	-4	$-106\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$-76\frac{1}{2}$	-26	-4	$-141\frac{3}{4}$
5	-90	-28	-4	$-183\frac{1}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$-104\frac{1}{2}$	-30	-4	$-231\frac{11}{12}$
6	-120	-32	-4	-288
$6\frac{1}{2}$	$-136\frac{1}{2}$	-34	-4	$-352\frac{1}{12}$
7	-154	-36	-4	$-424\frac{2}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (5)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2 = \frac{1}{4}(x + 2,828)(x - 2,828)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int (\frac{1}{4}x^2 - 2)dx = \frac{1}{12}x^3 - 2x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-2), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{4} \cdot (-x)^2 - 2$$

$$f(-x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 2 = 0 \quad / + 2$$

$$\frac{1}{4}x^2 = 2 \quad / : \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \frac{2}{\frac{1}{4}}$$

$$x = \pm\sqrt{8}$$

$$x_1 = 2,828 \quad x_2 = -2,828$$

$$x_1 = -2,828; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 2,828; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2,828$	$< x <$	$2,828$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -2,828[\cup]2,828; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-2,828; 2,828[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/ - 2)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

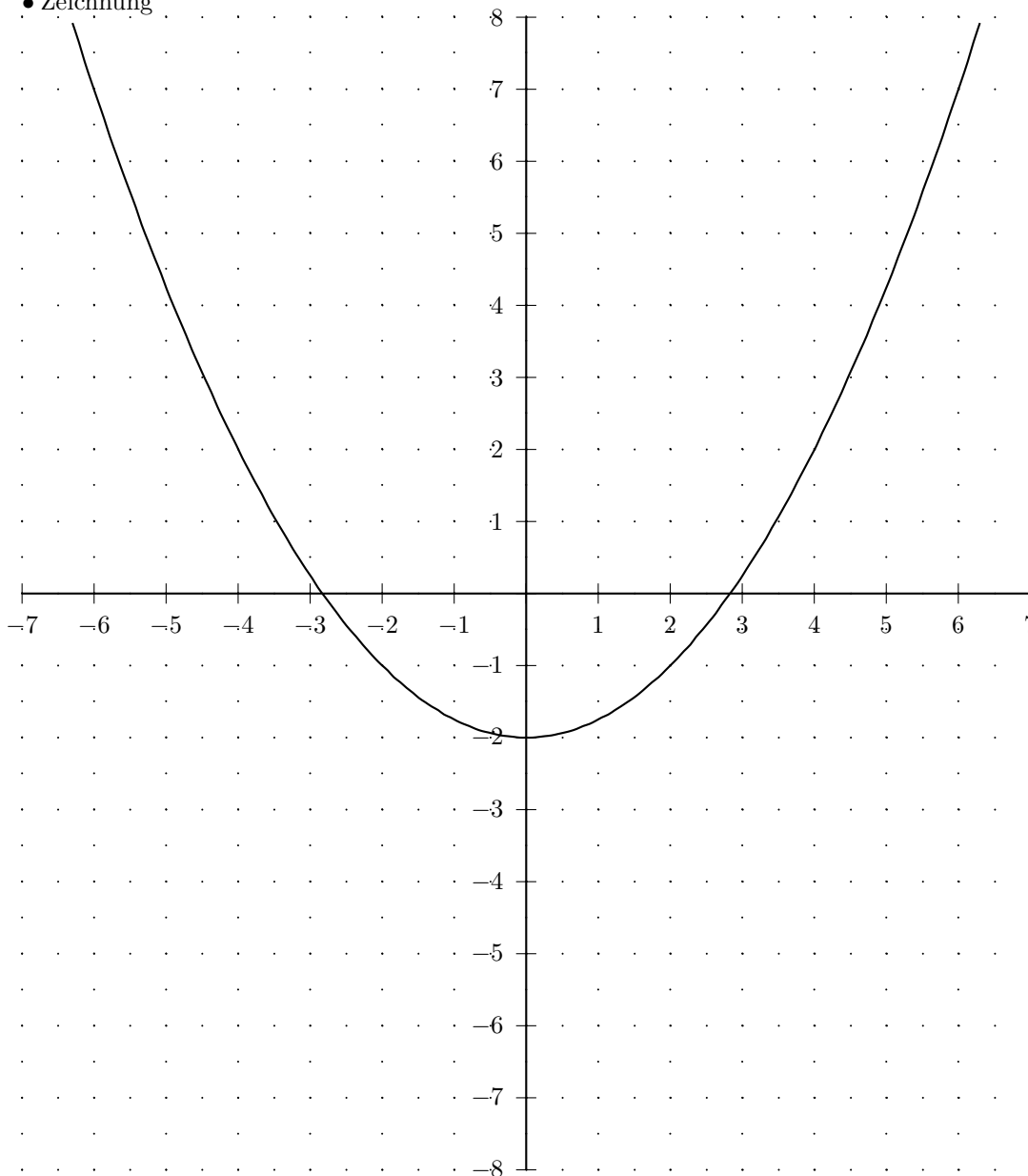
$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$10\frac{1}{4}$	$-3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-14\frac{7}{12}$
$-6\frac{1}{2}$	$8\frac{9}{16}$	$-3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-9\frac{85}{96}$
-6	7	-3	$\frac{1}{2}$	-6
$-5\frac{1}{2}$	$5\frac{9}{16}$	$-2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-2\frac{83}{96}$
-5	$4\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{12}$
$-4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{16}$	$-2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{13}{32}$
-4	2	-2	$\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{16}$	$-1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$3\frac{41}{96}$
-3	$\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{16}$	$-1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$3\frac{67}{96}$
-2	-1	-1	$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{16}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$2\frac{23}{32}$
-1	$-1\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{12}$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{15}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{95}{96}$
0	-2	0	$\frac{1}{2}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-2	0	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{15}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{95}{96}$
1	$-1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-1\frac{11}{12}$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-2\frac{23}{32}$
2	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{16}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-3\frac{67}{96}$
3	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{16}$	$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-3\frac{41}{96}$
4	2	2	$\frac{1}{2}$	$-2\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{16}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-1\frac{13}{32}$
5	$4\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{9}{16}$	$2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$2\frac{83}{96}$
6	7	3	$\frac{1}{2}$	6
$6\frac{1}{2}$	$8\frac{9}{16}$	$3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$9\frac{85}{96}$
7	$10\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$14\frac{7}{12}$

• Zeichnung



Aufgabe (6)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = -\frac{1}{3}(x + 7,243)(x - 1,243)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x - 2$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}$$

$$F(x) = \int(-\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3)dx = -\frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 6[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{3} \cdot (-x)^2 - 2 \cdot (-x) + 3$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot 3}}{2 \cdot (-\frac{1}{3})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{8}}{-\frac{2}{3}}$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm 2,828}{-\frac{2}{3}}$$

$$x_1 = \frac{2 + 2,828}{-\frac{2}{3}} \quad x_2 = \frac{2 - 2,828}{-\frac{2}{3}}$$

$$x_1 = -7,243 \quad x_2 = 1,243$$

$$x_1 = -7,243; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 1,243; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-7,243$	$< x <$	$1,243$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in] - 7,243; 1,243[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - \infty; -7,243[\cup] 1,243; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x - 2 = 0$$

$$-\frac{2}{3}x - 2 = 0 \quad / + 2$$

$$-\frac{2}{3}x = 2 \quad / : \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$x = \frac{2}{-\frac{2}{3}}$$

$$x = -3$$

$$x_3 = -3; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(-3) = -\frac{2}{3}$$

$$f''(-3) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt: } (-3/6)}$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

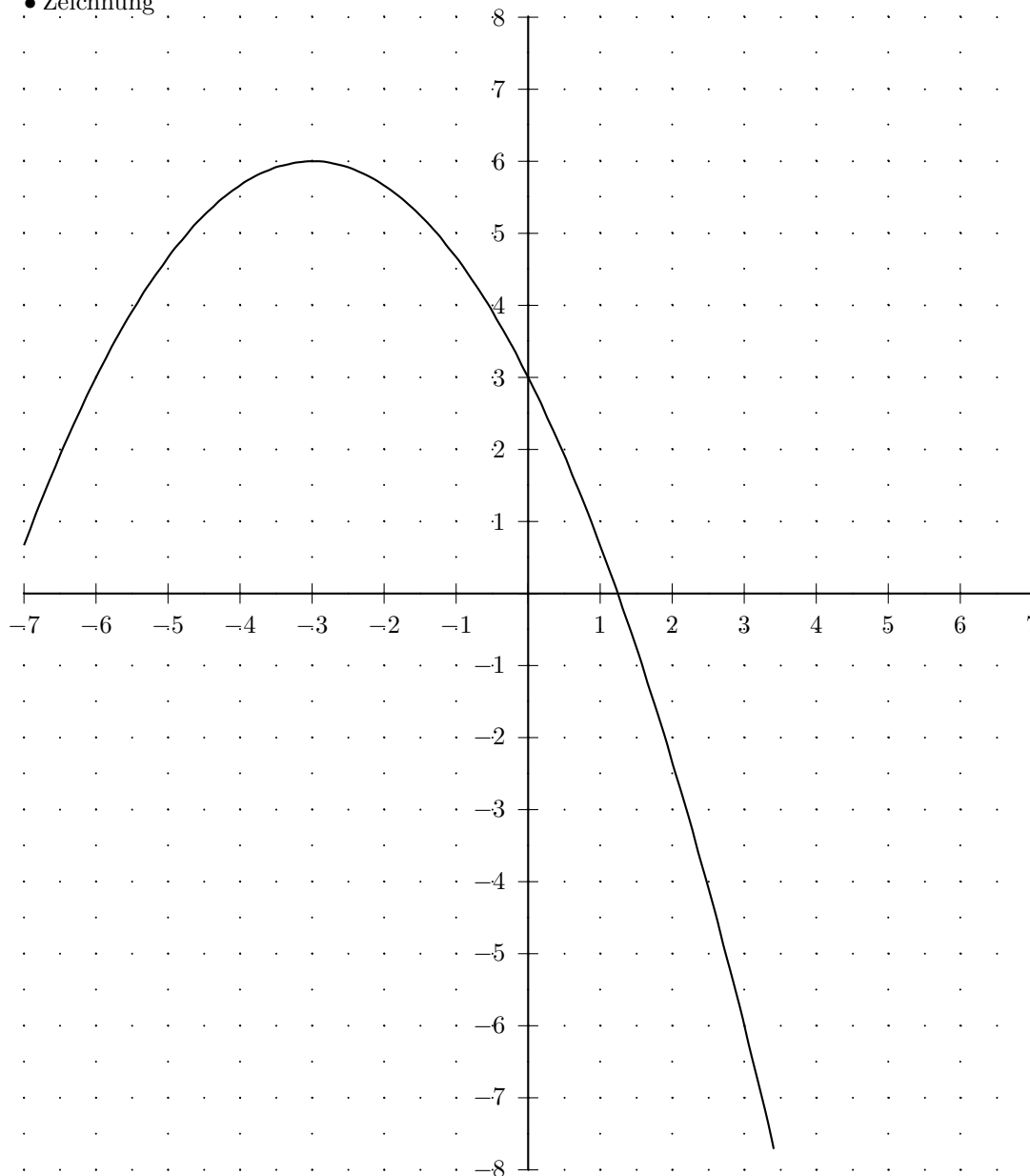
$x \in]-3; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$\frac{2}{3}$	$\frac{22}{3}$	-2	$-31\frac{8}{9}$
$-6\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{12}$	$2\frac{1}{3}$	-	$-31\frac{17}{72}$
-6	3	2	-	-30
$-5\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{12}$	$1\frac{2}{3}$	-	$-28\frac{19}{72}$
-5	$4\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	-	$-26\frac{1}{9}$
$-4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	1	-	$-23\frac{5}{8}$
-4	$5\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-	$-20\frac{5}{9}$
$-3\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{12}$	$\frac{1}{3}$	-	$-17\frac{7}{72}$
-3	6	0	-	-15
$-2\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{12}$	$-\frac{1}{3}$	-	$-12\frac{1}{72}$
-2	$5\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-	$-9\frac{1}{9}$
$-1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-1	-	$-6\frac{3}{8}$
-1	$4\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	-	$-3\frac{5}{9}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{12}$	$-1\frac{2}{3}$	-	$-1\frac{53}{72}$
0	3	-2	-	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	3	-2	-	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{12}$	$-2\frac{1}{3}$	-	$1\frac{17}{72}$
1	$\frac{2}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	-	$1\frac{8}{9}$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-3	-	$1\frac{7}{6}$
2	$-2\frac{1}{3}$	$-3\frac{1}{3}$	-	$1\frac{1}{9}$
$2\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{12}$	$-3\frac{2}{3}$	-	$-\frac{35}{72}$
3	-6	-4	-	-3
$3\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{12}$	$-4\frac{1}{3}$	-	$-6\frac{37}{72}$
4	-10	$-4\frac{2}{3}$	-	$-11\frac{1}{9}$
$4\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{4}$	-5	-	$-16\frac{7}{8}$
5	-15	$-5\frac{1}{3}$	-	$-23\frac{5}{9}$
$5\frac{1}{2}$	$-18\frac{1}{12}$	$-5\frac{2}{3}$	-	$-32\frac{17}{72}$
6	-21	-6	-	-42
$6\frac{1}{2}$	$-24\frac{1}{12}$	$-6\frac{1}{3}$	-	$-53\frac{19}{72}$
7	$-27\frac{1}{3}$	$-6\frac{2}{3}$	-	$-66\frac{1}{9}$

• Zeichnung



Aufgabe (7)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3 = \frac{1}{4}(x + 3,464)(x - 3,464)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int (\frac{1}{4}x^2 - 3)dx = \frac{1}{12}x^3 - 3x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-3), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{4} \cdot (-x)^2 - 3$$

$$f(-x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 3$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 3 = 0 \quad / + 3$$

$$\frac{1}{4}x^2 = 3 \quad / : \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \frac{3}{\frac{1}{4}}$$

$$x = \pm \sqrt{12}$$

$$x_1 = 3,464 \quad x_2 = -3,464$$

$$x_1 = -3,464; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 3,464; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,464$	$< x <$	$3,464$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -3,464[\cup]3,464; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-3,464; 3,464[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/ -3)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

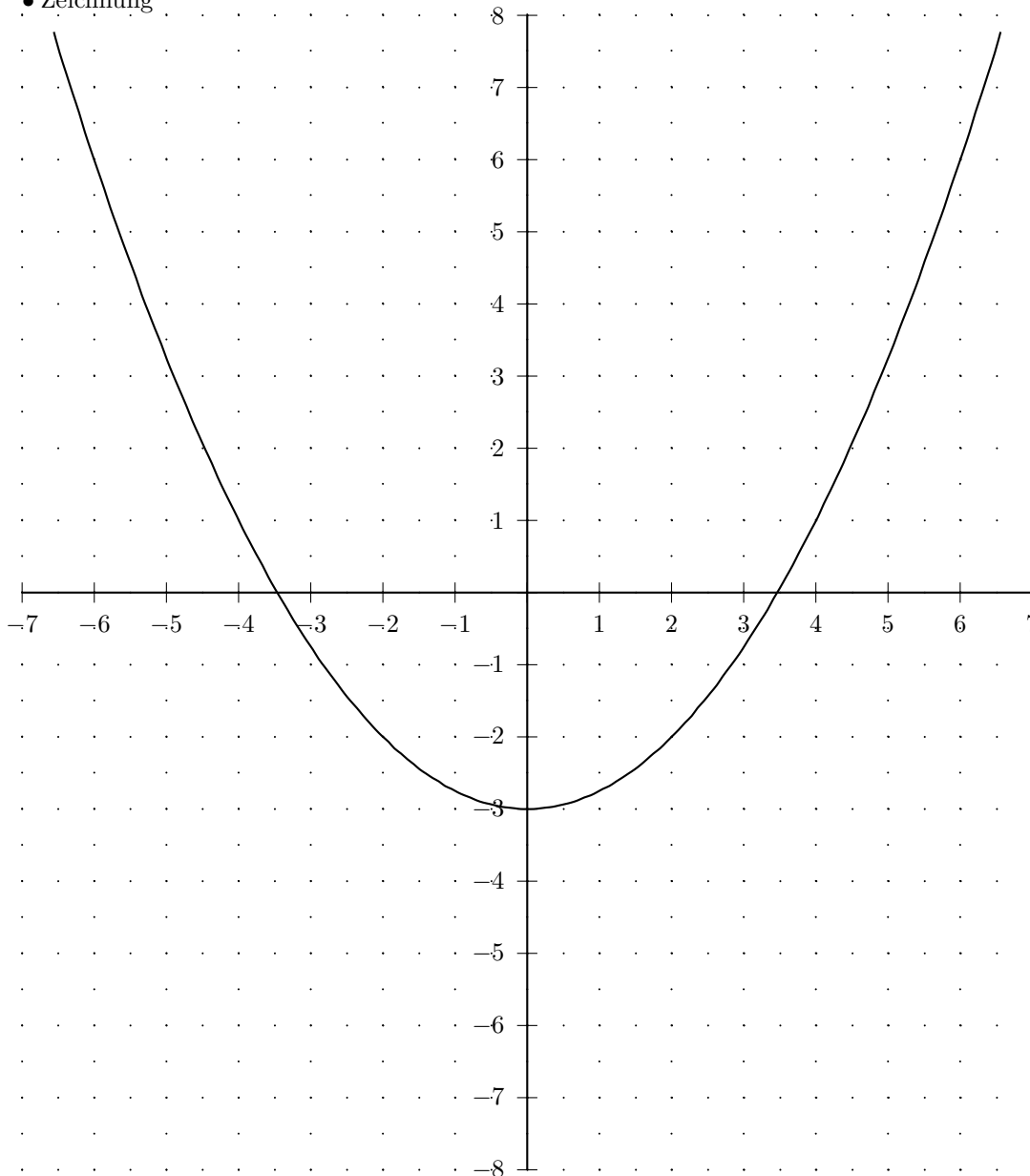
$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$9\frac{1}{4}$	$-3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-7\frac{7}{12}$
$-6\frac{1}{2}$	$7\frac{9}{16}$	$-3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-3\frac{37}{96}$
-6	6	-3	$\frac{1}{2}$	0
$-5\frac{1}{2}$	$4\frac{9}{16}$	$-2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$2\frac{61}{96}$
-5	$3\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{12}$
$-4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{16}$	$-2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$5\frac{29}{32}$
-4	1	-2	$\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$-1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$6\frac{89}{96}$
-3	$-\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{16}$	$-1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$6\frac{19}{96}$
-2	-2	-1	$\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{16}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{32}$
-1	$-2\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{12}$
$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{15}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{47}{96}$
0	-3	0	$\frac{1}{2}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-3	0	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$-2\frac{15}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-1\frac{47}{96}$
1	$-2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-2\frac{11}{12}$
$1\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-4\frac{7}{32}$
2	-2	1	$\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{16}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-6\frac{19}{96}$
3	$-\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-6\frac{89}{96}$
4	1	2	$\frac{1}{2}$	$-6\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{16}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-5\frac{29}{32}$
5	$3\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-4\frac{7}{12}$
$5\frac{1}{2}$	$4\frac{9}{16}$	$2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-2\frac{61}{96}$
6	6	3	$\frac{1}{2}$	0
$6\frac{1}{2}$	$7\frac{9}{16}$	$3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$3\frac{37}{96}$
7	$9\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$7\frac{7}{12}$

• Zeichnung



Aufgabe (8)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -2x^2 + 4 = -2(x + 1,414)(x - 1,414)$$

$$f'(x) = -4x$$

$$f''(x) = -4$$

$$F(x) = \int (-2x^2 + 4)dx = -\frac{2}{3}x^3 + 4x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 4[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -2 \cdot (-x)^2 + 4$$

$$f(-x) = -2 \cdot x^2 + 4$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -2x^2 + 4 = 0$$

$$-2x^2 + 4 = 0 \quad / -4$$

$$-2x^2 = -4 \quad / : (-2)$$

$$x^2 = \frac{-4}{-2}$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = 1,414 \quad x_2 = -1,414$$

$$x_1 = -1,414; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 1,414; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1,414$	$< x <$	$1,414$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in] - 1,414; 1,414[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - \infty; -1,414[\cup]1,414; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -4x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = -4$$

$$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/4)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in] - \infty; 0[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

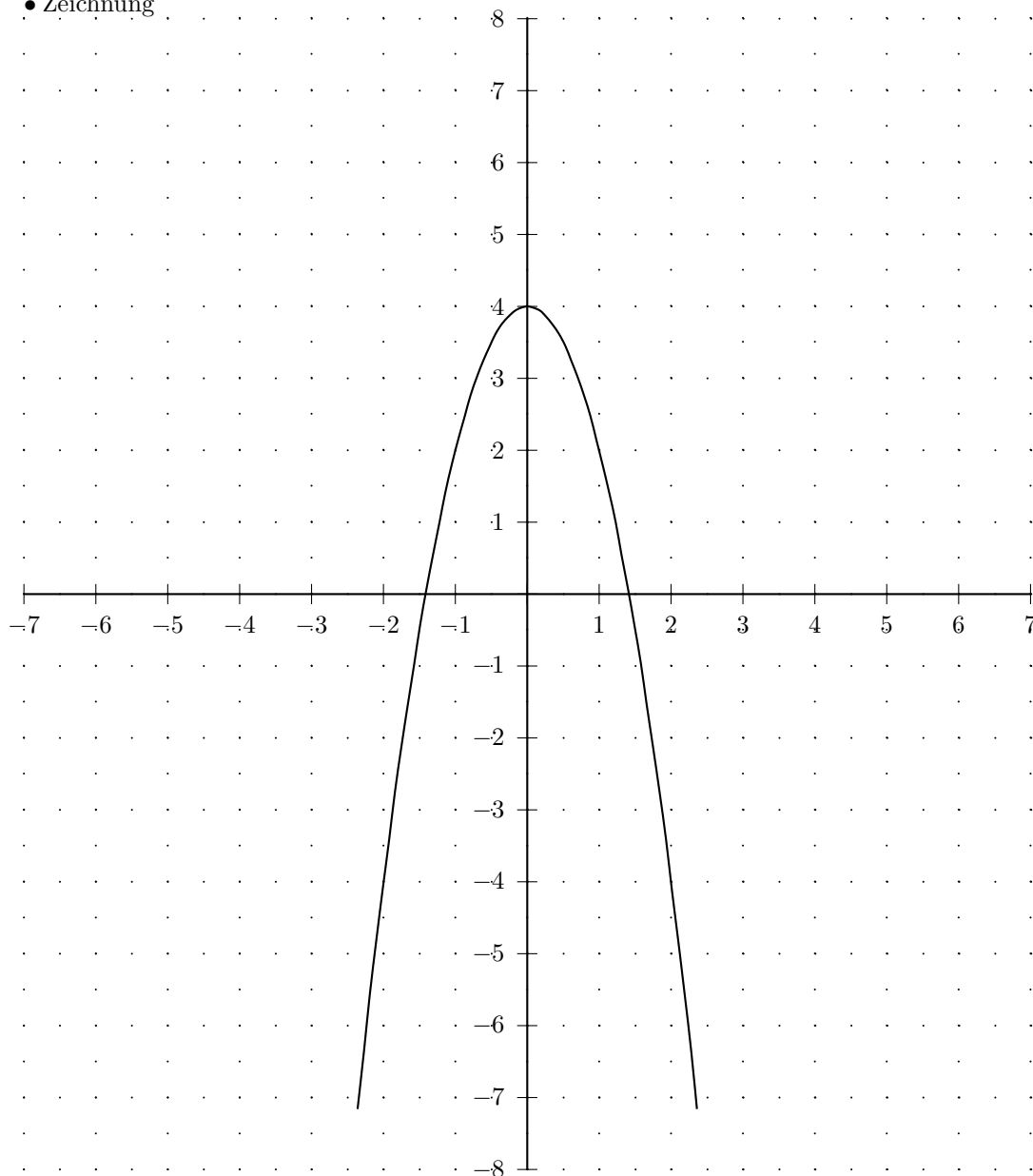
$x \in]0; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-94	28	-4	$200\frac{2}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$-80\frac{1}{2}$	26	-4	$157\frac{1}{12}$
-6	-68	24	-4	120
$-5\frac{1}{2}$	$-56\frac{1}{2}$	22	-4	$88\frac{11}{12}$
-5	-46	20	-4	$63\frac{1}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$-36\frac{1}{2}$	18	-4	$42\frac{3}{4}$
-4	-28	16	-4	$26\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-20\frac{1}{2}$	14	-4	$14\frac{7}{12}$
-3	-14	12	-4	6
$-2\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$	10	-4	$\frac{5}{12}$
-2	-4	8	-4	$-2\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	6	-4	$-3\frac{3}{4}$
-1	2	4	-4	$-3\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	2	-4	$-1\frac{11}{12}$
0	4	0	-4	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	4	0	-4	0
$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	-2	-4	$1\frac{11}{12}$
1	2	-4	-4	$3\frac{1}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-6	-4	$3\frac{3}{4}$
2	-4	-8	-4	$2\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$	-10	-4	$-\frac{5}{12}$
3	-14	-12	-4	-6
$3\frac{1}{2}$	$-20\frac{1}{2}$	-14	-4	$-14\frac{7}{12}$
4	-28	-16	-4	$-26\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$-36\frac{1}{2}$	-18	-4	$-42\frac{3}{4}$
5	-46	-20	-4	$-63\frac{1}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$-56\frac{1}{2}$	-22	-4	$-88\frac{11}{12}$
6	-68	-24	-4	-120
$6\frac{1}{2}$	$-80\frac{1}{2}$	-26	-4	$-157\frac{1}{12}$
7	-94	-28	-4	$-200\frac{2}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (9)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^2 - 2 = (x + 1,414)(x - 1,414)$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

$$F(x) = \int (x^2 - 2)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-2), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 2$$

$$f(-x) = 1 \cdot x^2 - 2$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

$$1x^2 - 2 = 0 \quad / + 2$$

$$1x^2 = 2 \quad / : 1$$

$$x^2 = \frac{2}{1}$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = 1,414 \quad x_2 = -1,414$$

$$x_1 = -1,414; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 1,414; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1,414$	$< x <$	$1,414$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1,414[\cup]1,414; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-1,414; 1,414[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 2x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/ - 2)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

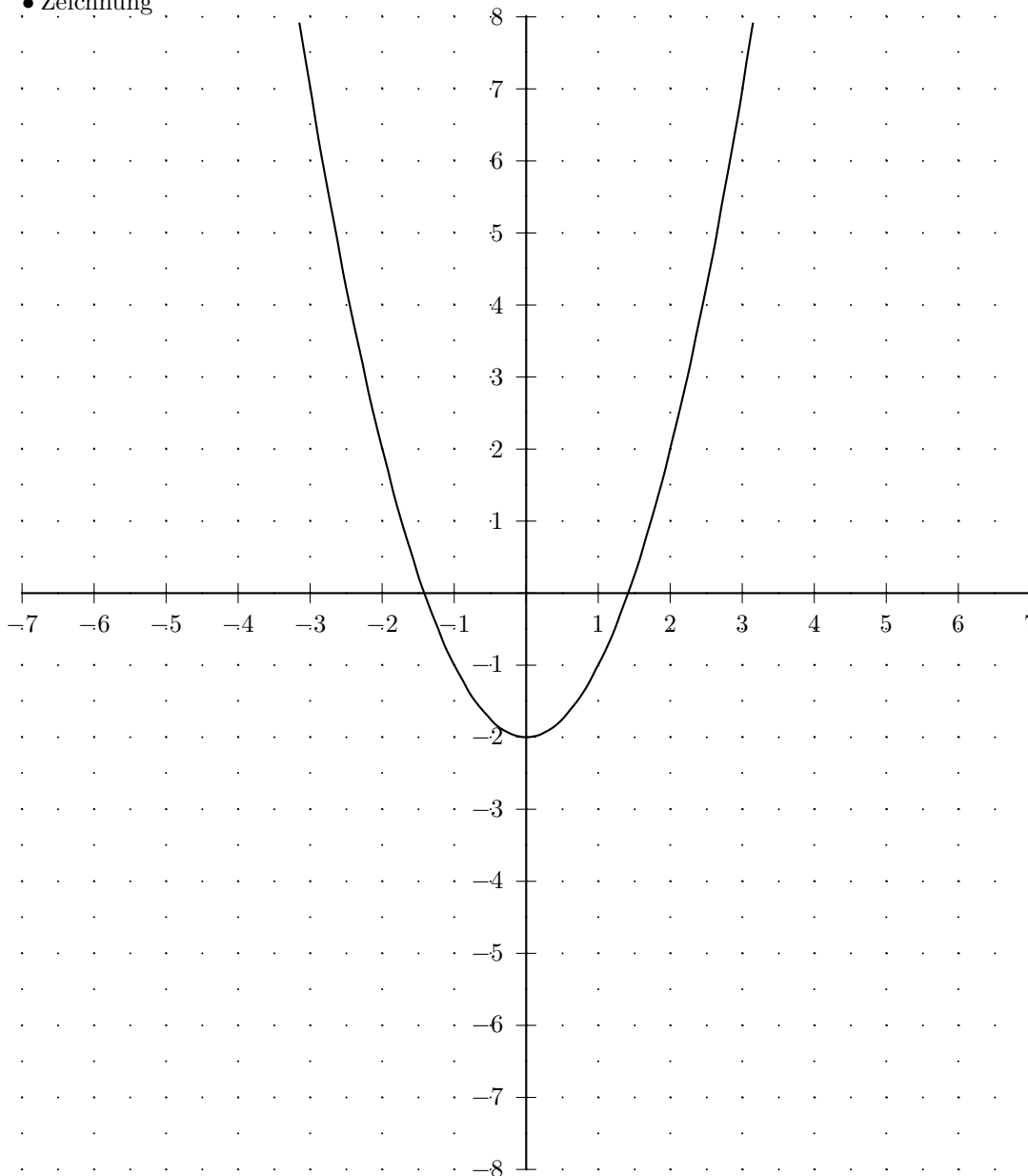
$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	47	-14	2	$-100\frac{1}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{4}$	-13	2	$-78\frac{13}{24}$
-6	34	-12	2	-60
$-5\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{4}$	-11	2	$-44\frac{11}{24}$
-5	23	-10	2	$-31\frac{5}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$18\frac{1}{4}$	-9	2	$-21\frac{3}{8}$
-4	14	-8	2	$-13\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{4}$	-7	2	$-7\frac{7}{24}$
-3	7	-6	2	-3
$-2\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	-5	2	$-\frac{5}{24}$
-2	2	-4	2	$1\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-3	2	$1\frac{7}{8}$
-1	-1	-2	2	$1\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$	-1	2	$\frac{23}{24}$
0	-2	0	2	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-2	0	2	0
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$	1	2	$-\frac{23}{24}$
1	-1	2	2	$-1\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	3	2	$-1\frac{7}{8}$
2	2	4	2	$-1\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	5	2	$\frac{5}{24}$
3	7	6	2	3
$3\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{4}$	7	2	$7\frac{7}{24}$
4	14	8	2	$13\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$18\frac{1}{4}$	9	2	$21\frac{3}{8}$
5	23	10	2	$31\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{4}$	11	2	$44\frac{11}{24}$
6	34	12	2	60
$6\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{4}$	13	2	$78\frac{13}{24}$
7	47	14	2	$100\frac{1}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (10)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x = -\frac{1}{3}x(x - 6)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}$$

$$F(x) = \int(-\frac{1}{3}x^2 + 2x)dx = -\frac{1}{9}x^3 + x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 3[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{3} \cdot (-x)^2 + 2 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$$

$$x(-\frac{1}{3}x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{3}x + 2 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-\frac{1}{3}x = -2 \quad / : (-\frac{1}{3})$$

$$x = \frac{-2}{-\frac{1}{3}}$$

$$x = 6$$

$x_1 = 0$; 1-fache Nullstelle

$x_2 = 6$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 6$	$6 < x$
$f(x)$	-	+	-

$x \in]0; 6[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[\cup]6; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2 = 0$$

$$-\frac{2}{3}x + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-\frac{2}{3}x = -2 \quad / : (-\frac{2}{3})$$

$$x = \frac{-2}{-\frac{2}{3}}$$

$$x = 3$$

$x_3 = 3$; 1-fache Nullstelle

$$f''(3) = -\frac{2}{3}$$

$f''(3) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(3/3)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 3$	$3 < x$
$f'(x)$	+	-

$x \in]-\infty; 3[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

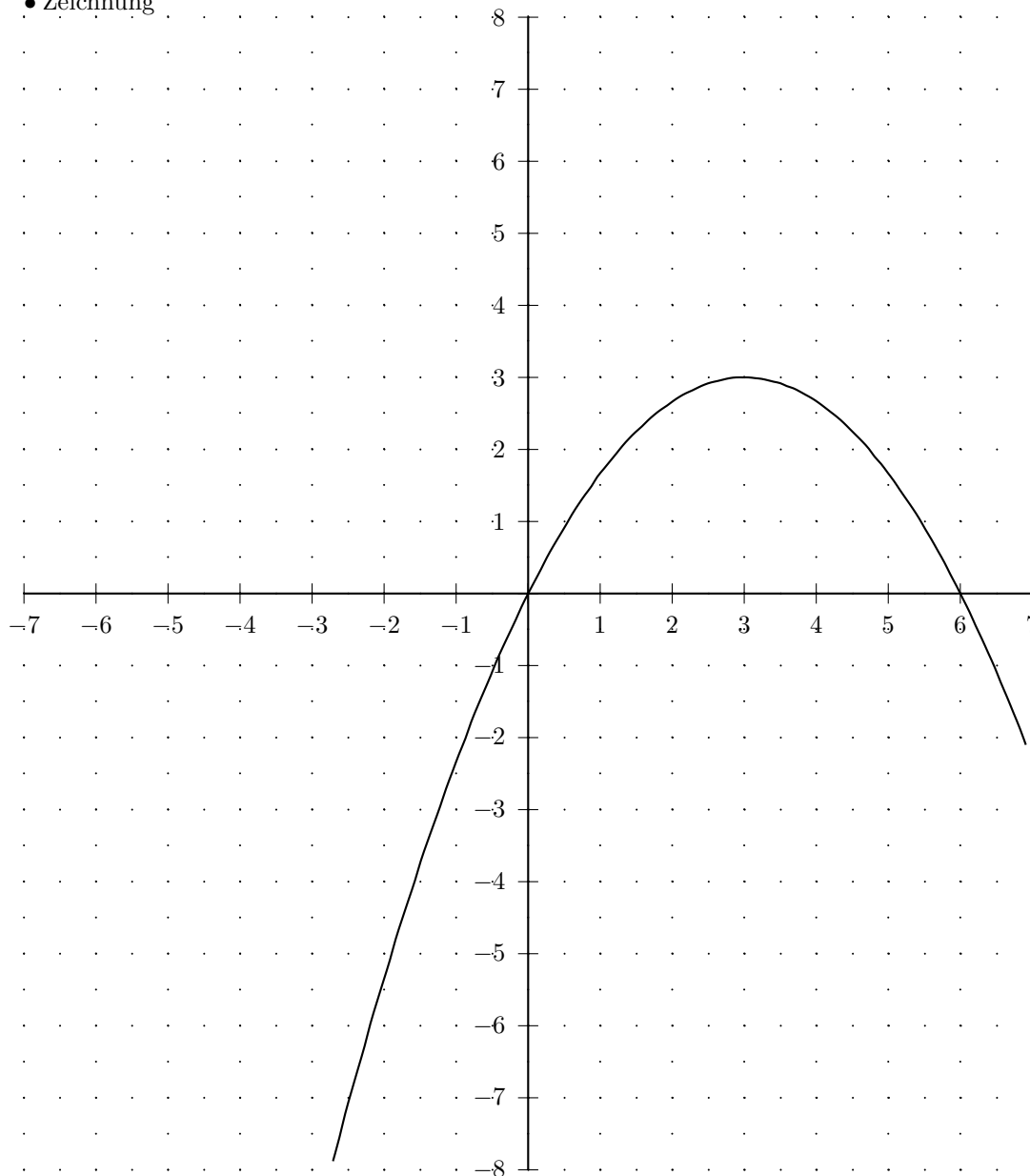
$x \in]3; \infty[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-30\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	-2	$87\frac{1}{9}$
$-6\frac{1}{2}$	$-27\frac{1}{12}$	$6\frac{1}{3}$	-	$72\frac{55}{72}$
-6	-24	6	-	60
$-5\frac{1}{2}$	$-21\frac{1}{12}$	$5\frac{2}{3}$	-	$48\frac{53}{72}$
-5	$-18\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	-	$38\frac{5}{6}$
$-4\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{4}$	5	-	$30\frac{3}{8}$
-4	$-13\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$	-	$23\frac{1}{9}$
$-3\frac{1}{2}$	$-11\frac{1}{12}$	$4\frac{1}{3}$	-	$17\frac{1}{72}$
-3	-9	4	-	12
$-2\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{12}$	$3\frac{2}{3}$	-	$7\frac{71}{72}$
-2	$-5\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	-	$4\frac{5}{6}$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	3	-	$2\frac{15}{8}$
-1	$-2\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	-	$1\frac{1}{9}$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{12}$	$2\frac{1}{3}$	-	$\frac{19}{72}$
0	0	2	-	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	2	-2	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{12}$	$1\frac{2}{3}$	-	$\frac{17}{72}$
1	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	-	$\frac{8}{9}$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	1	-	$1\frac{7}{6}$
2	$2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-	$3\frac{1}{6}$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{12}$	$\frac{1}{3}$	-	$4\frac{37}{72}$
3	3	0	-	6
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{12}$	$-\frac{1}{3}$	-	$7\frac{35}{72}$
4	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-	$8\frac{8}{9}$
$4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	-1	-	$10\frac{1}{6}$
5	$1\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	-	$11\frac{1}{6}$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{11}{12}$	$-1\frac{2}{3}$	-	$11\frac{55}{72}$
6	0	-2	-	12
$6\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{12}$	$-2\frac{1}{3}$	-	$11\frac{53}{72}$
7	$-2\frac{1}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	-	$10\frac{8}{9}$

• Zeichnung



Aufgabe (11)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f''(x) = 2$$

$$F(x) = \int (x^2 - 4x + 7) dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 7x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]3, \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 4 \cdot (-x) + 7$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$1x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichentabelle:

kein Vorzeichenwechsel

$x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0$$

$$2x - 4 = 0 \quad / + 4$$

$$2x = 4 \quad / : 2$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

$x_1 = 2$; 1-fache Nullstelle

$$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2/3)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 2$	2	$< x$
$f'(x)$	-	0	+

$x \in]2; \infty[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

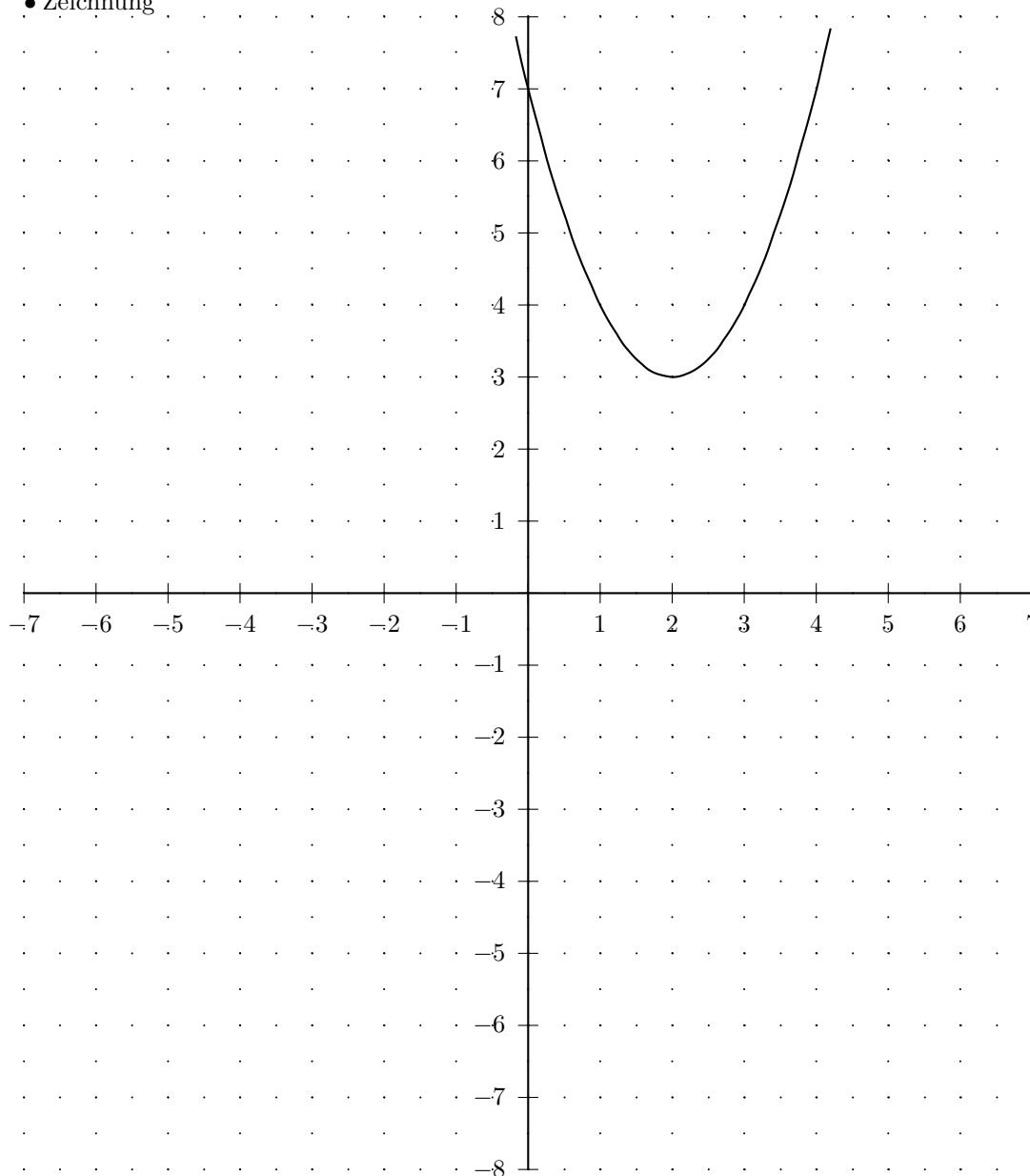
$x \in]-\infty; 2[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	84	-18	2	$-261\frac{1}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$75\frac{1}{4}$	-17	2	$-221\frac{13}{24}$
-6	67	-16	2	-186
$-5\frac{1}{2}$	$59\frac{1}{4}$	-15	2	$-154\frac{11}{24}$
-5	52	-14	2	$-126\frac{2}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$45\frac{1}{4}$	-13	2	$-102\frac{5}{8}$
-4	39	-12	2	$-81\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$33\frac{1}{4}$	-11	2	$-63\frac{7}{24}$
-3	28	-10	2	-48
$-2\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{4}$	-9	2	$-35\frac{5}{24}$
-2	19	-8	2	$-24\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{4}$	-7	2	$-16\frac{1}{8}$
-1	12	-6	2	$-9\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	-5	2	$-4\frac{1}{24}$
0	7	-4	2	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	7	-4	2	0
$\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-3	2	$3\frac{1}{24}$
1	4	-2	2	$5\frac{1}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	-1	2	$7\frac{1}{8}$
2	3	0	2	$8\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	1	2	$10\frac{5}{24}$
3	4	2	2	12
$3\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	3	2	$14\frac{7}{24}$
4	7	4	2	$17\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	5	2	$21\frac{3}{8}$
5	12	6	2	$26\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{4}$	7	2	$33\frac{11}{24}$
6	19	8	2	42
$6\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{4}$	9	2	$52\frac{13}{24}$
7	28	10	2	$65\frac{1}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (12)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -x^2 + 4x - 7$$

$$f'(x) = -2x + 4$$

$$f''(x) = -2$$

$$F(x) = \int (-x^2 + 4x - 7) dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 7x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, (-3)[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -1 \cdot (-x)^2 + 4 \cdot (-x) - 7$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$-x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{-2}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichen-tabelle:

kein Vorzeichenwechsel

$x \in \mathbb{R}$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -2x + 4 = 0$$

$$-2x + 4 = 0 \quad / -4$$

$$-2x = -4 \quad / : (-2)$$

$$x = \frac{-4}{-2}$$

$$x = 2$$

$x_1 = 2$; 1-fache Nullstelle

$$f''(2) = -2$$

$f''(2) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(2/ - 3)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 2$	2	$< x$
$f'(x)$	+	0	-

$x \in] - \infty; 2[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

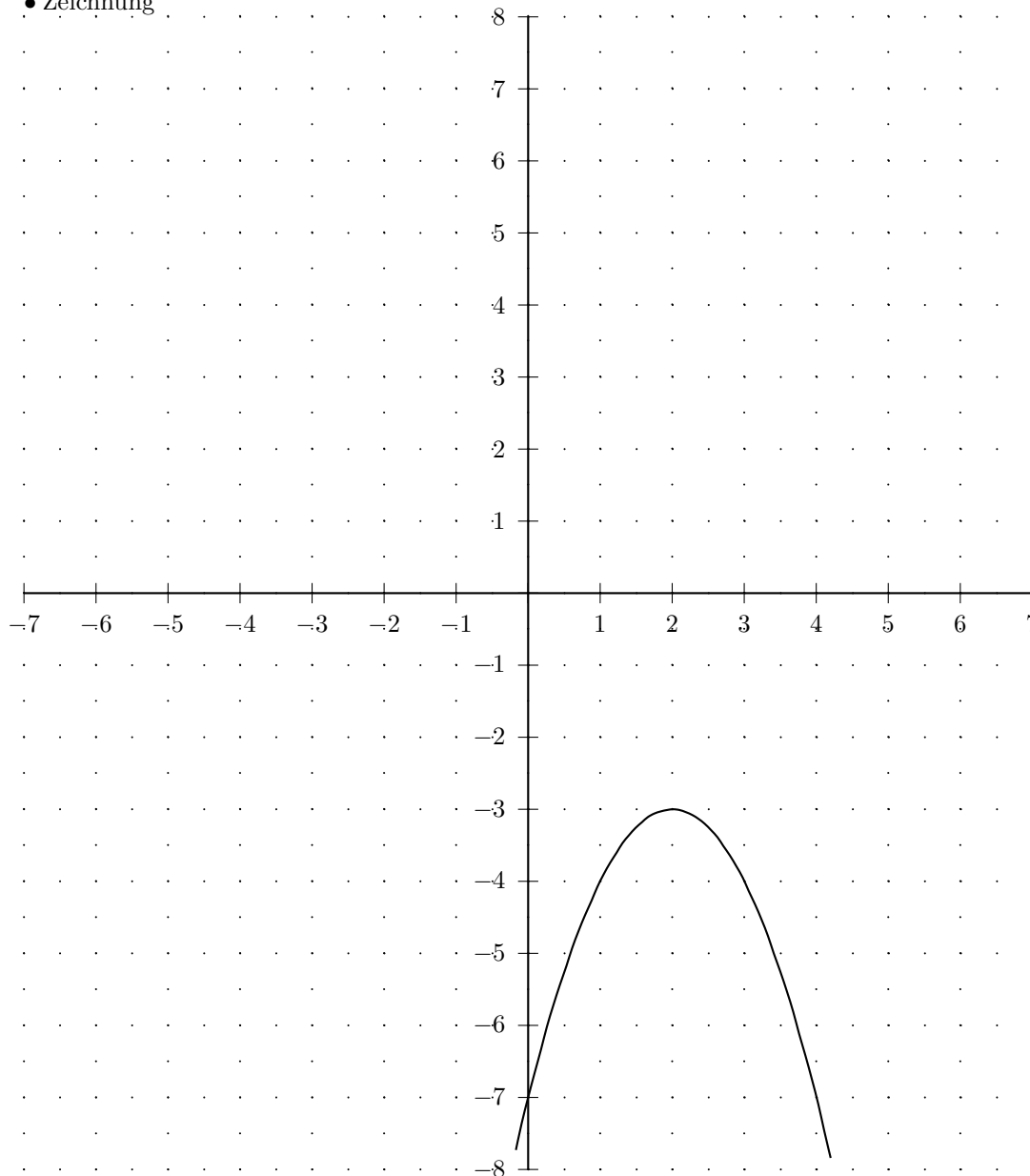
$x \in]2; \infty[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-84	18	-2	$261\frac{1}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$-75\frac{1}{4}$	17	-2	$221\frac{13}{24}$
-6	-67	16	-2	186
$-5\frac{1}{2}$	$-59\frac{1}{4}$	15	-2	$154\frac{11}{24}$
-5	-52	14	-2	$126\frac{2}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$-45\frac{1}{4}$	13	-2	$102\frac{3}{8}$
-4	-39	12	-2	$81\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-33\frac{1}{4}$	11	-2	$63\frac{7}{24}$
-3	-28	10	-2	48
$-2\frac{1}{2}$	$-23\frac{1}{4}$	9	-2	$35\frac{5}{24}$
-2	-19	8	-2	$24\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{4}$	7	-2	$16\frac{1}{8}$
-1	-12	6	-2	$9\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-9\frac{1}{4}$	5	-2	$4\frac{1}{24}$
0	-7	4	-2	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-7	4	-2	0
$\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	3	-2	$-3\frac{1}{24}$
1	-4	2	-2	$-5\frac{1}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{4}$	1	-2	$-7\frac{7}{8}$
2	-3	0	-2	$-8\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{4}$	-1	-2	$-10\frac{5}{24}$
3	-4	-2	-2	-12
$3\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	-3	-2	$-14\frac{7}{24}$
4	-7	-4	-2	$-17\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$-9\frac{1}{4}$	-5	-2	$-21\frac{3}{8}$
5	-12	-6	-2	$-26\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{4}$	-7	-2	$-33\frac{11}{24}$
6	-19	-8	-2	-42
$6\frac{1}{2}$	$-23\frac{1}{4}$	-9	-2	$-52\frac{13}{24}$
7	-28	-10	-2	$-65\frac{1}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (13)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 2x^2 + 4x = 2(x + 2)x$$

$$f'(x) = 4x + 4$$

$$f''(x) = 4$$

$$F(x) = \int (2x^2 + 4x) dx = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-2), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [2 \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [2 \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 + 4 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 2x^2 + 4x = 0$$

$$x(2x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2x + 4 = 0$$

$$2x + 4 = 0 \quad / -4$$

$$2x = -4 \quad / : 2$$

$$x = \frac{-4}{2}$$

$$x = -2$$

$$x_1 = -2; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x$
$f(x)$	+	-	+

$x \in]-\infty; -2[\cup]0; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-2; 0[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4x + 4 = 0$$

$$4x + 4 = 0 \quad / -4$$

$$4x = -4 \quad / : 4$$

$$x = \frac{-4}{4}$$

$$x = -1$$

$$x_3 = -1; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f''(-1) = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt: } (-1 / -2)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -1$	$-1 < x$
$f'(x)$	-	+

$x \in]-1; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

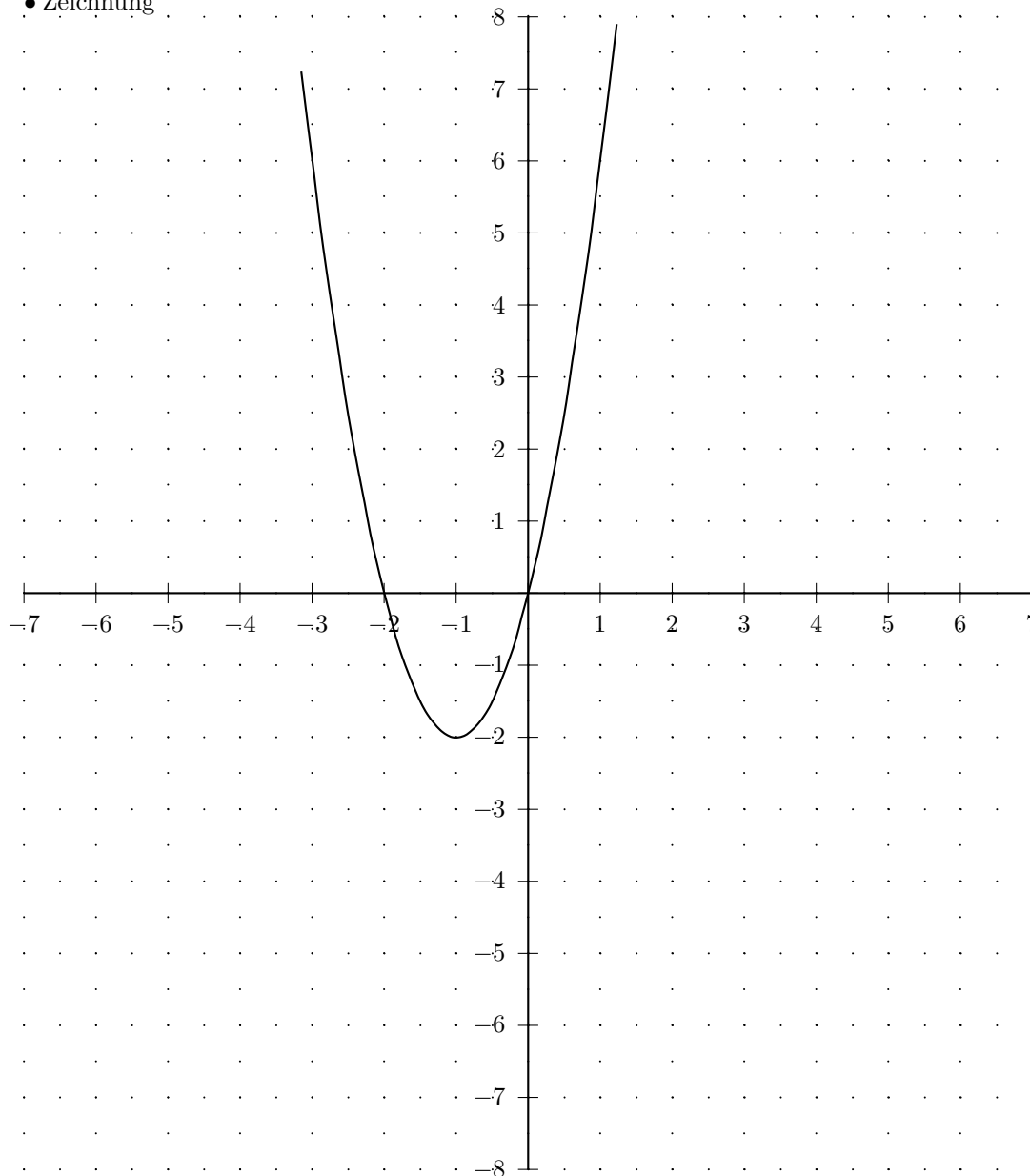
$x \in]-\infty; -1[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	70	-24	4	$-130\frac{2}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$58\frac{1}{2}$	-22	4	$-98\frac{7}{12}$
-6	48	-20	4	-72
$-5\frac{1}{2}$	$38\frac{1}{2}$	-18	4	$-50\frac{5}{12}$
-5	30	-16	4	$-33\frac{1}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	-14	4	$-20\frac{1}{4}$
-4	16	-12	4	$-10\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	-10	4	$-4\frac{1}{12}$
-3	6	-8	4	0
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	-6	4	$2\frac{1}{12}$
-2	0	-4	4	$2\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	-2	4	$2\frac{1}{4}$
-1	-2	0	4	$1\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	2	4	$\frac{5}{12}$
0	0	4	4	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	4	4	0
$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	6	4	$\frac{7}{12}$
1	6	8	4	$2\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	10	4	$6\frac{3}{4}$
2	16	12	4	$13\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	14	4	$22\frac{11}{12}$
3	30	16	4	36
$3\frac{1}{2}$	$38\frac{1}{2}$	18	4	$53\frac{1}{12}$
4	48	20	4	$74\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$58\frac{1}{2}$	22	4	$101\frac{1}{4}$
5	70	24	4	$133\frac{1}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$82\frac{1}{2}$	26	4	$171\frac{5}{12}$
6	96	28	4	216
$6\frac{1}{2}$	$110\frac{1}{2}$	30	4	$267\frac{7}{12}$
7	126	32	4	$326\frac{2}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (14)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 = -\frac{1}{2}(x + 1,742)(x - 5,742)$$

$$f'(x) = -x + 2$$

$$f''(x) = -1$$

$$F(x) = \int (-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5)dx = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 7[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot (-x)^2 + 2 \cdot (-x) + 5$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 5}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{-1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 3,742}{-1}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 3,742}{-1} \quad x_2 = \frac{-2 - 3,742}{-1}$$

$$x_1 = -1,742 \quad x_2 = 5,742$$

$$x_1 = -1,742; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 5,742; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1,742$	$< x <$	$5,742$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x \in] - 1,742; 5,742[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in] - \infty; -1,742[\cup] 5,742; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -x + 2 = 0$$

$$-1x + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-1x = -2 \quad / : (-1)$$

$$x = \frac{-2}{-1}$$

$$x = 2$$

$$x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(2) = -1$$

$$f''(2) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(2/7)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$$x \in] - \infty; 2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

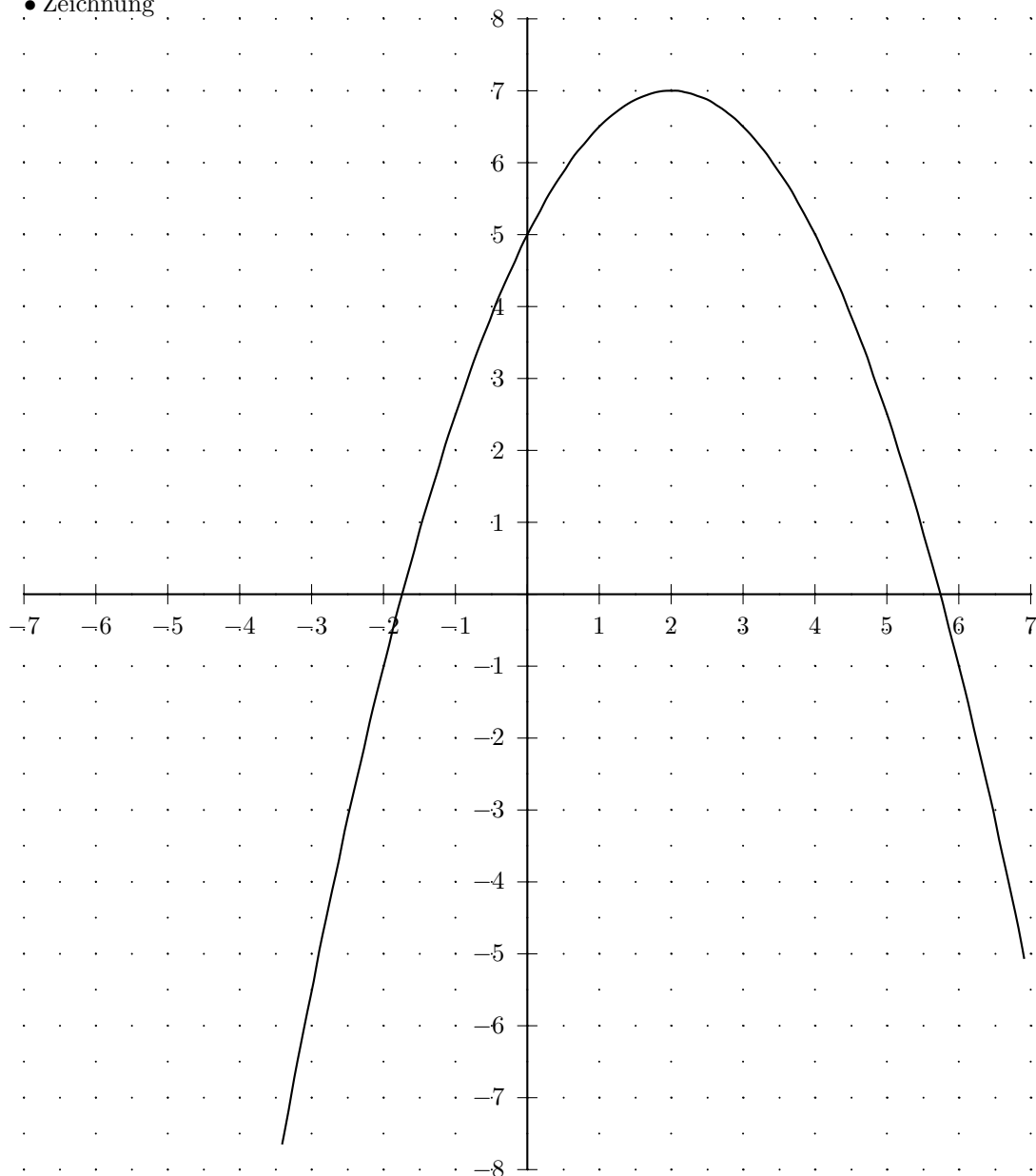
$x \in]2; \infty[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-33\frac{1}{2}$	9	-1	$71\frac{1}{6}$
$-6\frac{1}{2}$	$-29\frac{1}{8}$	$8\frac{1}{2}$	-1	$55\frac{25}{48}$
-6	-25	8	-1	42
$-5\frac{1}{2}$	$-21\frac{1}{8}$	$7\frac{1}{2}$	-1	$30\frac{23}{48}$
-5	$-17\frac{1}{2}$	7	-1	$20\frac{5}{6}$
$-4\frac{1}{2}$	$-14\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	-1	$12\frac{13}{16}$
-4	-11	6	-1	$6\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{8}$	$5\frac{1}{2}$	-1	$1\frac{43}{48}$
-3	$-5\frac{1}{2}$	5	-1	$-1\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$4\frac{1}{2}$	-1	$-3\frac{31}{48}$
-2	-1	4	-1	$-4\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$3\frac{1}{2}$	-1	$-4\frac{11}{16}$
-1	$2\frac{1}{2}$	3	-1	$-3\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{7}{8}$	$2\frac{1}{2}$	-1	$-2\frac{11}{48}$
0	5	2	-1	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	5	2	-1	0
$\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{2}$	-1	$2\frac{35}{48}$
1	$6\frac{1}{2}$	1	-1	$5\frac{5}{6}$
$1\frac{1}{2}$	$6\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	-1	$9\frac{3}{16}$
2	7	0	-1	$12\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$6\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$16\frac{7}{48}$
3	$6\frac{1}{2}$	-1	-1	$19\frac{1}{3}$
$3\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{8}$	$-1\frac{1}{2}$	-1	$22\frac{29}{48}$
4	5	-2	-1	$25\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$3\frac{7}{8}$	$-2\frac{1}{2}$	-1	$27\frac{9}{16}$
5	$2\frac{1}{2}$	-3	-1	$29\frac{1}{6}$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$-3\frac{1}{2}$	-1	$30\frac{1}{48}$
6	-1	-4	-1	30
$6\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$-4\frac{1}{2}$	-1	$28\frac{47}{48}$
7	$-5\frac{1}{2}$	-5	-1	$26\frac{5}{6}$

• Zeichnung



Aufgabe (15)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 4 = -2(x + 0,851)(x - 2,351)$$

$$f'(x) = -4x + 3$$

$$f''(x) = -4$$

$$F(x) = \int (-2x^2 + 3x + 4)dx = -\frac{2}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 4x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 5\frac{1}{8}[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -2 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 4$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$-2x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 4}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{-4}$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm 6,403}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 6,403}{-4} \quad x_2 = \frac{-3 - 6,403}{-4}$$

$$x_1 = -0,851 \quad x_2 = 2,351$$

$$x_1 = -0,851; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 2,351; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-0,851$	$< x <$	$2,351$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in] - 0,851; 2,351[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - \infty; -0,851[\cup] 2,351; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -4x + 3 = 0$$

$$-4x + 3 = 0 \quad / -3$$

$$-4x = -3 \quad / : (-4)$$

$$x = \frac{-3}{-4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$x_3 = \frac{3}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''\left(\frac{3}{4}\right) = -4$$

$$f''\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } \left(\frac{3}{4}; 5\frac{1}{8}\right)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$\frac{3}{4}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; \frac{3}{4}[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

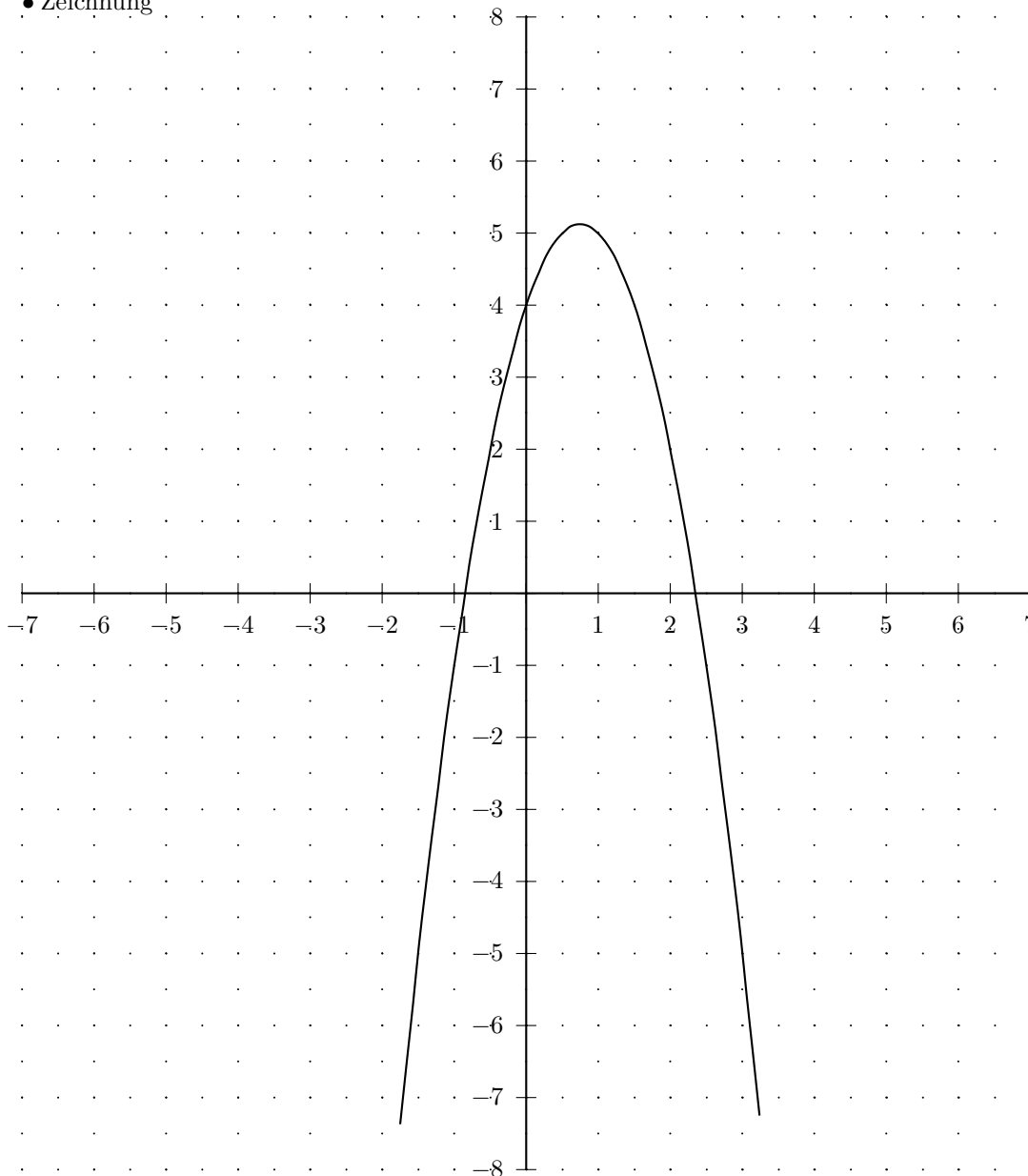
$x \in]\frac{3}{4}; \infty[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-115	31	-4	$274\frac{1}{6}$
$-6\frac{1}{2}$	-100	29	-4	$220\frac{11}{24}$
-6	-86	27	-4	174
$-5\frac{1}{2}$	-73	25	-4	$134\frac{7}{24}$
-5	-61	23	-4	$100\frac{5}{6}$
$-4\frac{1}{2}$	-50	21	-4	$73\frac{3}{8}$
-4	-40	19	-4	$50\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	-31	17	-4	$32\frac{23}{24}$
-3	-23	15	-4	$19\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	-16	13	-4	$9\frac{19}{24}$
-2	-10	11	-4	$3\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	-5	9	-4	$-\frac{3}{8}$
-1	-1	7	-4	$-1\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{2}$	2	5	-4	$-1\frac{13}{24}$
0	4	3	-4	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	4	3	-4	0
$\frac{1}{2}$	5	1	-4	$2\frac{7}{24}$
1	5	-1	-4	$4\frac{5}{6}$
$1\frac{1}{2}$	4	-3	-4	$7\frac{1}{8}$
2	2	-5	-4	$8\frac{8}{3}$
$2\frac{1}{2}$	-1	-7	-4	$8\frac{23}{24}$
3	-5	-9	-4	$7\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	-10	-11	-4	$3\frac{19}{24}$
4	-16	-13	-4	$-2\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	-23	-15	-4	$-12\frac{3}{8}$
5	-31	-17	-4	$-25\frac{5}{6}$
$5\frac{1}{2}$	-40	-19	-4	$-43\frac{13}{24}$
6	-50	-21	-4	-66
$6\frac{1}{2}$	-61	-23	-4	$-93\frac{17}{24}$
7	-73	-25	-4	$-127\frac{1}{6}$

• Zeichnung



Aufgabe (16)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^2 + 6x - 2 = (x + 6, 317)(x - 0, 317)$$

$$f'(x) = 2x + 6$$

$$f''(x) = 2$$

$$F(x) = \int (x^2 + 6x - 2) dx = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 2x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-11), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 + 6 \cdot (-x) - 2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$1x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm 6,633}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 6,633}{2} \quad x_2 = \frac{-6 - 6,633}{2}$$

$$x_1 = 0,317 \quad x_2 = -6,317$$

$$x_1 = -6,317; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 0,317; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-6,317$	$< x <$	$0,317$	$< x$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; -6,317[\cup]0,317; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-6,317; 0,317[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 2x + 6 = 0$$

$$2x + 6 = 0 \quad / -6$$

$$2x = -6 \quad / :2$$

$$x = \frac{-6}{2}$$

$$x = -3$$

$$x_3 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-3) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-3 / -11)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-3	$< x$
$f'(x)$	-	0	+

$x \in]-3; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

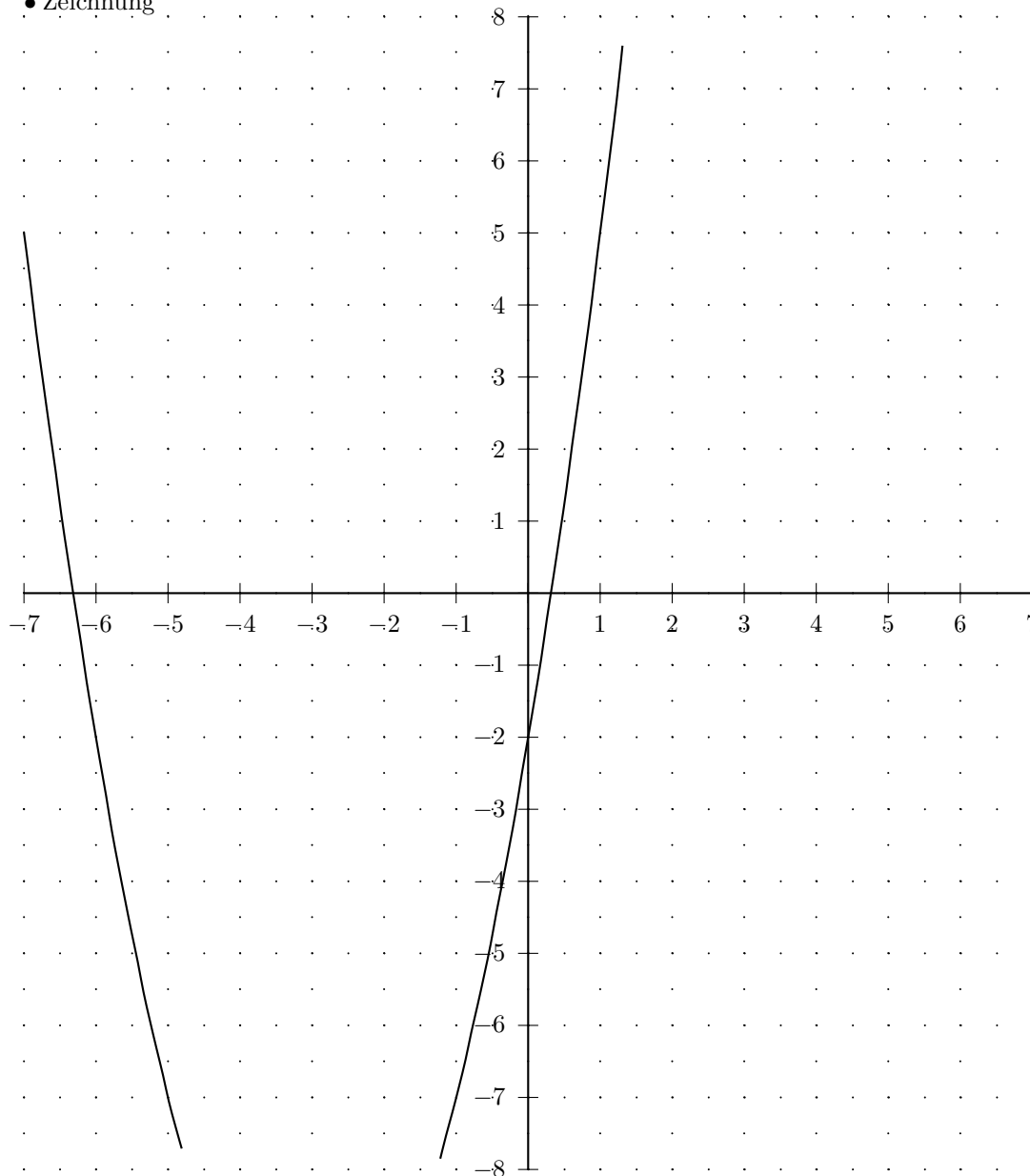
$x \in]-\infty; -3[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	5	-8	2	$46\frac{2}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	-7	2	$48\frac{5}{24}$
-6	-2	-6	2	48
$-5\frac{1}{2}$	$-4\frac{3}{4}$	-5	2	$46\frac{7}{24}$
-5	-7	-4	2	$43\frac{1}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	-3	2	$39\frac{3}{8}$
-4	-10	-2	2	$34\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-10\frac{3}{4}$	-1	2	$29\frac{11}{24}$
-3	-11	0	2	24
$-2\frac{1}{2}$	$-10\frac{3}{4}$	1	2	$18\frac{13}{24}$
-2	-10	2	2	$13\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	3	2	$8\frac{5}{8}$
-1	-7	4	2	$4\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-4\frac{3}{4}$	5	2	$1\frac{17}{24}$
0	-2	6	2	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-2	6	2	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	7	2	$-\frac{5}{24}$
1	5	8	2	$1\frac{1}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	9	2	$4\frac{7}{8}$
2	14	10	2	$10\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$	11	2	$18\frac{23}{24}$
3	25	12	2	30
$3\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{4}$	13	2	$44\frac{1}{24}$
4	38	14	2	$61\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$45\frac{1}{4}$	15	2	$82\frac{1}{8}$
5	53	16	2	$106\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$61\frac{1}{4}$	17	2	$135\frac{5}{24}$
6	70	18	2	168
$6\frac{1}{2}$	$79\frac{1}{4}$	19	2	$205\frac{7}{24}$
7	89	20	2	$247\frac{1}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (17)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5 = -\frac{1}{3}(x + 1,899)(x - 7,899)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}$$

$$F(x) = \int (-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5)dx = -\frac{1}{9}x^3 + x^2 + 5x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 8[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{3} \cdot (-x)^2 + 2 \cdot (-x) + 5$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot 5}}{2 \cdot (-\frac{1}{3})}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{10\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 3,266}{-\frac{2}{3}}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 3,266}{-\frac{2}{3}} \quad x_2 = \frac{-2 - 3,266}{-\frac{2}{3}}$$

$$x_1 = -1,899 \quad x_2 = 7,899$$

$$x_1 = -1,899; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 7,899; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1,899$	$< x <$	$7,899$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1,899; 7,899[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -1,899[\cup]7,899; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2 = 0$$

$$-\frac{2}{3}x + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-\frac{2}{3}x = -2 \quad / : \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$x = \frac{-2}{-\frac{2}{3}}$$

$$x = 3$$

$$x_3 = 3; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(3) = -\frac{2}{3}$$

$$f''(3) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(3/8)}$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 3$	3	$x > 3$
$f'(x)$	+	0	-

$x \in]-\infty; 3[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

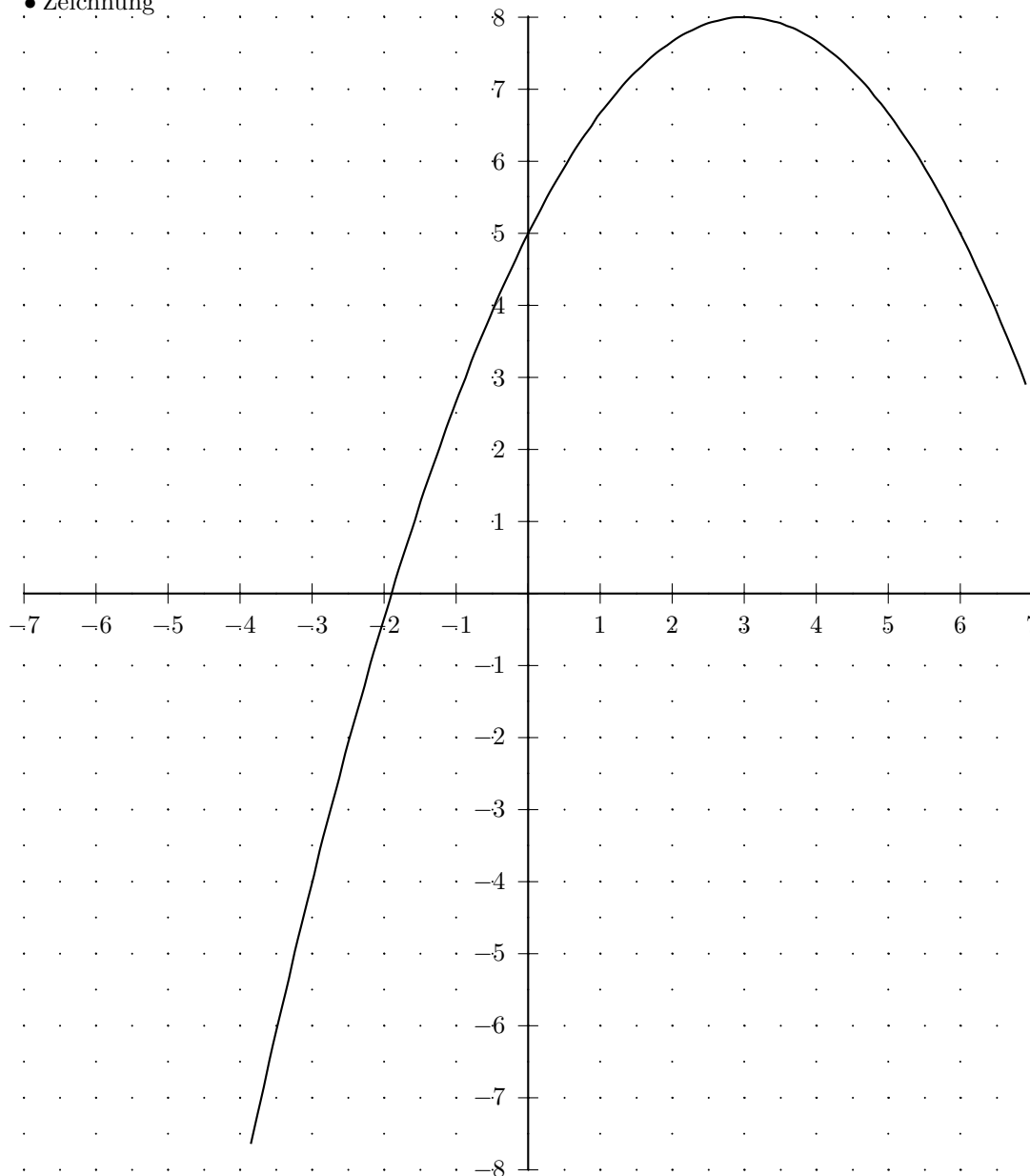
$x \in]3; \infty[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-25\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	-2	$52\frac{1}{9}$
$-6\frac{1}{2}$	$-22\frac{1}{12}$	$6\frac{1}{3}$	-	$40\frac{19}{72}$
-6	-19	6	-	30
$-5\frac{1}{2}$	$-16\frac{1}{12}$	$5\frac{2}{3}$	-	$21\frac{17}{72}$
-5	$-13\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	-	$13\frac{8}{9}$
$-4\frac{1}{2}$	$-10\frac{2}{4}$	5	-	$7\frac{7}{8}$
-4	$-8\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$	-	$3\frac{1}{9}$
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{12}$	$4\frac{1}{3}$	-	$-\frac{35}{72}$
-3	-4	4	-	-3
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{12}$	$3\frac{2}{3}$	-	$-4\frac{37}{72}$
-2	$-\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	-	$-5\frac{1}{9}$
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	3	-	$-4\frac{1}{8}$
-1	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	-	$-3\frac{8}{9}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{12}$	$2\frac{1}{3}$	-	$-2\frac{17}{72}$
0	5	2	-	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	5	2	-2	0
$\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{12}$	$1\frac{2}{3}$	-	$2\frac{53}{72}$
1	$6\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	-	$5\frac{8}{9}$
$1\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4}$	1	-	$9\frac{3}{8}$
2	$7\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-	$13\frac{1}{6}$
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{11}{12}$	$\frac{1}{3}$	-	$17\frac{1}{72}$
3	8	0	-	21
$3\frac{1}{2}$	$7\frac{11}{12}$	$-\frac{1}{3}$	-	$24\frac{71}{72}$
4	$7\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-	$28\frac{8}{9}$
$4\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4}$	-1	-	$32\frac{5}{8}$
5	$6\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	-	$36\frac{1}{9}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{12}$	$-1\frac{2}{3}$	-	$39\frac{19}{72}$
6	5	-2	-	42
$6\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{12}$	$-2\frac{1}{3}$	-	$44\frac{17}{72}$
7	$2\frac{2}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	-	$45\frac{8}{9}$

• Zeichnung



Aufgabe (18)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{8}{49}x^2 - \frac{24}{49}x + 1\frac{31}{49} = -\frac{8}{49}(x+5)(x-2)$$

$$f'(x) = -\frac{16}{49}x - \frac{24}{49}$$

$$f''(x) = -\frac{16}{49}$$

$$F(x) = \int \left(-\frac{8}{49}x^2 - \frac{24}{49}x + 1\frac{31}{49}\right) dx = -0,054x^3 - \frac{12}{49}x^2 + 1\frac{31}{49}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 2[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left[-\frac{8}{49} \cdot \infty^2\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[-\frac{8}{49} \cdot (-\infty)^2\right] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{8}{49} \cdot (-x)^2 - \frac{24}{49} \cdot (-x) + 1\frac{31}{49}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{8}{49}x^2 - \frac{24}{49}x + 1\frac{31}{49} = 0$$

$$-\frac{8}{49}x^2 - \frac{24}{49}x + 1\frac{31}{49} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{24}{49} \pm \sqrt{\left(-\frac{24}{49}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{8}{49}\right) \cdot 1\frac{31}{49}}}{2 \cdot \left(-\frac{8}{49}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{24}{49} \pm \sqrt{1\frac{15}{49}}}{-\frac{16}{49}}$$

$$x_{1/2} = \frac{\frac{24}{49} \pm 1\frac{1}{7}}{-\frac{16}{49}}$$

$$x_1 = \frac{\frac{24}{49} + 1\frac{1}{7}}{-\frac{16}{49}} \quad x_2 = \frac{\frac{24}{49} - 1\frac{1}{7}}{-\frac{16}{49}}$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 2$$

$$x_1 = -5; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -5$	-5	$< x < 2$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-5, 2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -5[\cup]2; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{16}{49}x - \frac{24}{49} = 0$$

$$-\frac{16}{49}x - \frac{24}{49} = 0 \quad / + \frac{24}{49}$$

$$-\frac{16}{49}x = \frac{24}{49} \quad / : \left(-\frac{16}{49}\right)$$

$$x = \frac{\frac{24}{49}}{-\frac{16}{49}}$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

$$x_3 = -1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''\left(-1\frac{1}{2}\right) = -\frac{16}{49}$$

$$f''(-1\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1\frac{1}{2}/2)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-

$$x \in] - \infty; -1\frac{1}{2}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

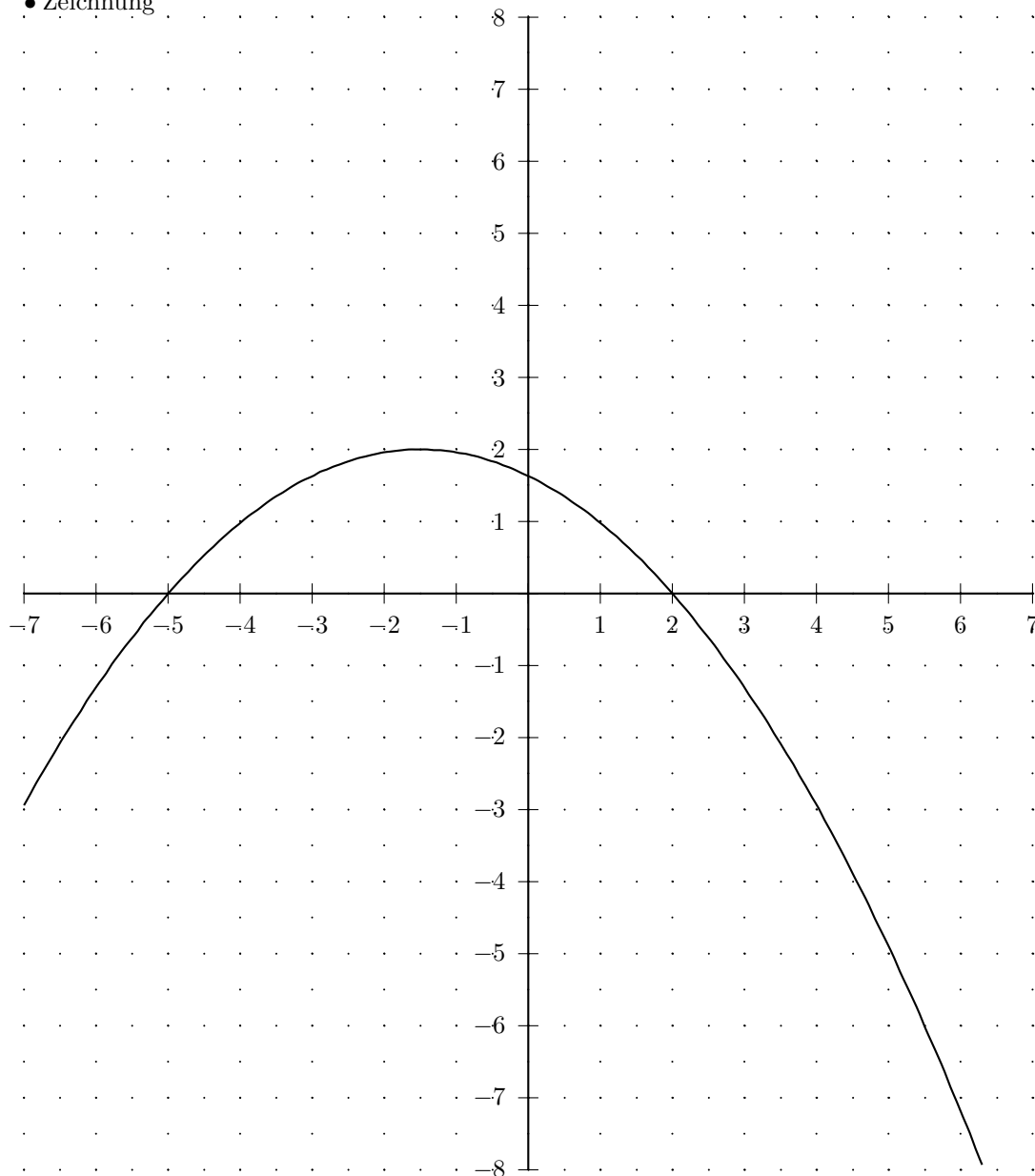
$$x \in] -1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-2\frac{46}{49}$	$1\frac{39}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-4\frac{16}{21}$
$-6\frac{1}{2}$	$-2\frac{4}{49}$	$1\frac{31}{49}$	$-\frac{16}{49}$	-6,014
-6	$-1\frac{15}{49}$	$1\frac{23}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-6\frac{6}{7}$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{30}{49}$	$1\frac{15}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-7\frac{1}{3}$
-5	0	$1\frac{7}{49}$	$-\frac{16}{49}$	-7,483
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{26}{49}$	$\frac{48}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-7\frac{17}{49}$
-4	$\frac{48}{49}$	$\frac{40}{49}$	$-\frac{16}{49}$	-6,966
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{17}{49}$	$\frac{32}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-6\frac{8}{21}$
-3	$1\frac{31}{49}$	$\frac{24}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-5\frac{31}{49}$
$-2\frac{1}{2}$	$1\frac{41}{49}$	$\frac{16}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-4\frac{16}{21}$
-2	$1\frac{47}{49}$	$\frac{8}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-3\frac{17}{21}$
$-1\frac{1}{2}$	2	0	$-\frac{16}{49}$	$-2\frac{40}{49}$
-1	$1\frac{47}{49}$	$-\frac{8}{49}$	$-\frac{16}{49}$	-1,823
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{41}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-\frac{16}{49}$	-0,871
0	$1\frac{31}{49}$	$-\frac{24}{49}$	$-\frac{16}{49}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$1\frac{31}{49}$	$-\frac{24}{49}$	$-\frac{16}{49}$	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{17}{49}$	$-\frac{32}{49}$	$-\frac{16}{49}$	0,748
1	$\frac{48}{49}$	$-\frac{40}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$1\frac{1}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{26}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$1\frac{3}{7}$
2	0	$-1\frac{7}{49}$	$-\frac{16}{49}$	1,85
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{30}{49}$	$-1\frac{15}{49}$	$-\frac{16}{49}$	1,701
3	$-1\frac{15}{49}$	$-1\frac{23}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$1\frac{11}{49}$
$3\frac{1}{2}$	$-2\frac{4}{49}$	$-1\frac{31}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$\frac{8}{21}$
4	$-2\frac{46}{49}$	$-1\frac{39}{49}$	$-\frac{16}{49}$	-0,871
$4\frac{1}{2}$	$-3\frac{43}{49}$	$-1\frac{47}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-2\frac{4}{7}$
5	$-4\frac{44}{49}$	$-2\frac{6}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-4\frac{16}{21}$
$5\frac{1}{2}$	-6	$-2\frac{2}{49}$	$-\frac{16}{49}$	-7,483
6	$-7\frac{9}{49}$	$-2\frac{22}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-10\frac{38}{49}$
$6\frac{1}{2}$	$-8\frac{22}{49}$	$-2\frac{30}{49}$	$-\frac{16}{49}$	-14,68
7	$-9\frac{39}{49}$	$-2\frac{38}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-19\frac{5}{21}$

• Zeichnung



Aufgabe (19)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{32}{81}x^2 - \frac{32}{81}x + 7\frac{73}{81} = -\frac{32}{81}(x+5)(x-4)$$

$$f'(x) = -\frac{64}{81}x - \frac{32}{81}$$

$$f''(x) = -\frac{64}{81}$$

$$F(x) = \int \left(-\frac{32}{81}x^2 - \frac{32}{81}x + 7\frac{73}{81}\right) dx = -0,132x^3 - \frac{16}{81}x^2 + 7\frac{73}{81}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 8[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left[-\frac{32}{81} \cdot \infty^2\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[-\frac{32}{81} \cdot (-\infty)^2\right] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{32}{81} \cdot (-x)^2 - \frac{32}{81} \cdot (-x) + 7\frac{73}{81}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{32}{81}x^2 - \frac{32}{81}x + 7\frac{73}{81} = 0$$

$$-\frac{32}{81}x^2 - \frac{32}{81}x + 7\frac{73}{81} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{32}{81} \pm \sqrt{\left(-\frac{32}{81}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{32}{81}\right) \cdot 7\frac{73}{81}}}{2 \cdot \left(-\frac{32}{81}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{32}{81} \pm \sqrt{12\frac{52}{81}}}{-\frac{64}{81}}$$

$$x_{1/2} = \frac{\frac{32}{81} \pm 3\frac{5}{9}}{-\frac{64}{81}}$$

$$x_1 = \frac{\frac{32}{81} + 3\frac{5}{9}}{-\frac{64}{81}} \quad x_2 = \frac{\frac{32}{81} - 3\frac{5}{9}}{-\frac{64}{81}}$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 4$$

$$x_1 = -5; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 4; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -5$	-5	$-5 < x < 4$	4	$x > 4$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-5; 4[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -5[\cup]4; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{64}{81}x - \frac{32}{81} = 0$$

$$-\frac{64}{81}x - \frac{32}{81} = 0 \quad / + \frac{32}{81}$$

$$-\frac{64}{81}x = \frac{32}{81} \quad / : \left(-\frac{64}{81}\right)$$

$$x = \frac{\frac{32}{81}}{-\frac{64}{81}}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{64}{81}$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } \left(-\frac{1}{2}/8\right)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-

$$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

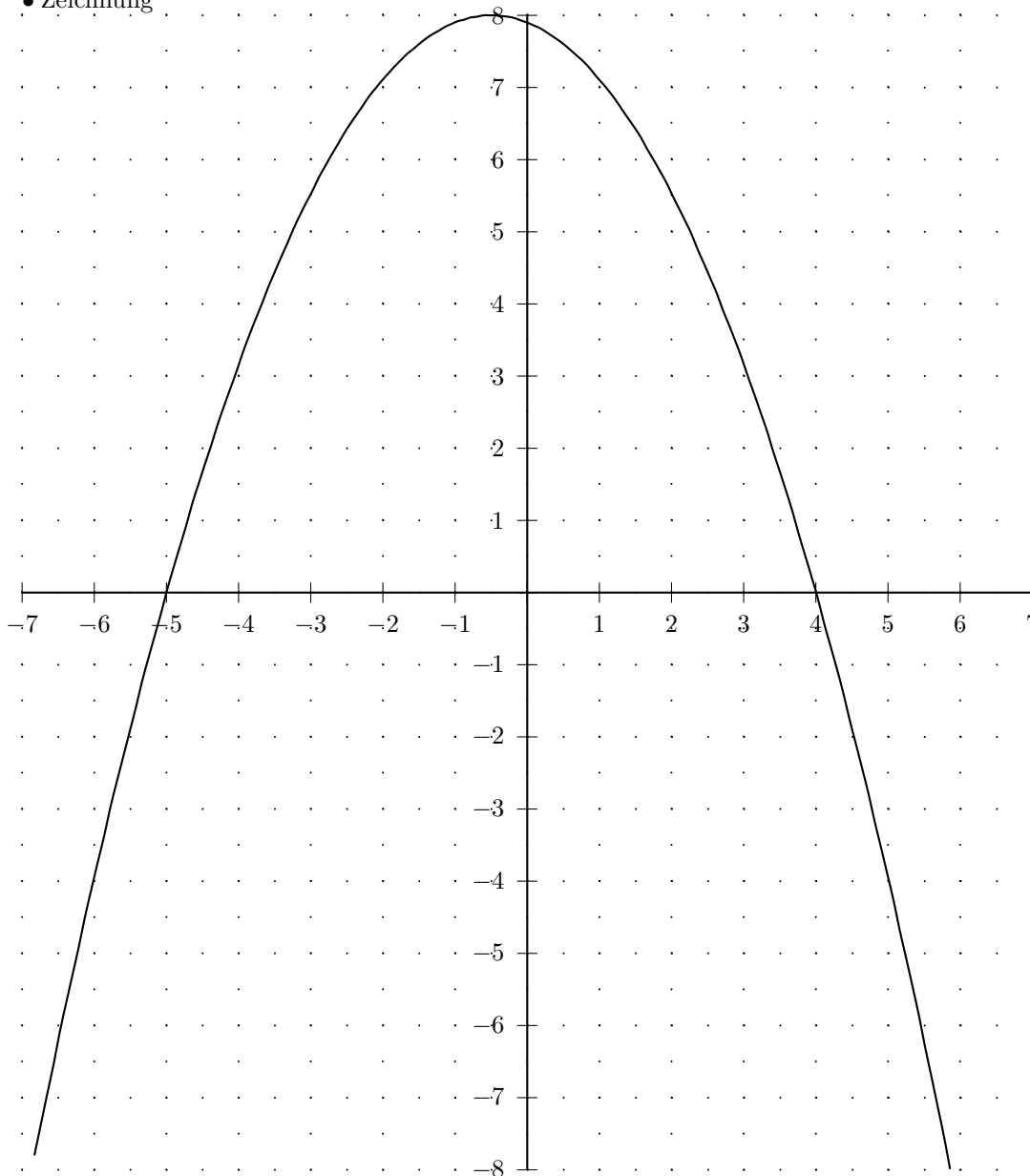
$$x \in]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-8\frac{56}{81}$	$5\frac{11}{81}$	$-\frac{64}{81}$	-19,819
$-6\frac{1}{2}$	$-6\frac{2}{9}$	$4\frac{20}{27}$	$-\frac{64}{81}$	-23,539
-6	$-3\frac{77}{81}$	$4\frac{28}{81}$	$-\frac{64}{81}$	$-26\frac{2}{27}$
$-5\frac{1}{2}$	$-1\frac{71}{81}$	$3\frac{77}{81}$	$-\frac{64}{81}$	-27,523
-5	0	$3\frac{5}{9}$	$-\frac{64}{81}$	-27,984
$-4\frac{1}{2}$	$1\frac{55}{81}$	$3\frac{13}{81}$	$-\frac{64}{81}$	$-27\frac{5}{9}$
-4	$3\frac{13}{81}$	$2\frac{62}{81}$	$-\frac{64}{81}$	-26,337
$-3\frac{1}{2}$	$4\frac{4}{9}$	$2\frac{10}{27}$	$-\frac{64}{81}$	-24,428
-3	$5\frac{43}{81}$	$1\frac{79}{81}$	$-\frac{64}{81}$	$-21\frac{25}{27}$
$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{34}{81}$	$1\frac{47}{81}$	$-\frac{64}{81}$	-18,93
-2	$7\frac{1}{9}$	$1\frac{5}{27}$	$-\frac{64}{81}$	-15,539
$-1\frac{1}{2}$	$7\frac{49}{81}$	$\frac{64}{81}$	$-\frac{64}{81}$	$-11\frac{23}{27}$
-1	$7\frac{73}{81}$	$\frac{32}{81}$	$-\frac{64}{81}$	-7,967
$-\frac{1}{2}$	8	0	$-\frac{64}{81}$	-3,984
0	$7\frac{73}{81}$	$-\frac{32}{81}$	$-\frac{64}{81}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$7\frac{73}{81}$	$-\frac{32}{81}$	$-\frac{64}{81}$	0
$\frac{1}{2}$	$7\frac{49}{81}$	$-\frac{64}{81}$	$-\frac{64}{81}$	3,885
1	$7\frac{1}{9}$	$-1\frac{5}{27}$	$-\frac{64}{81}$	7,572
$1\frac{1}{2}$	$6\frac{34}{81}$	$-1\frac{47}{81}$	$-\frac{64}{81}$	$10\frac{26}{27}$
2	$5\frac{43}{81}$	$-1\frac{79}{81}$	$-\frac{64}{81}$	13,959
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{4}{9}$	$-2\frac{10}{27}$	$-\frac{64}{81}$	16,461
3	$3\frac{13}{81}$	$-2\frac{62}{81}$	$-\frac{64}{81}$	$18\frac{10}{27}$
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{55}{81}$	$-3\frac{13}{81}$	$-\frac{64}{81}$	19,588
4	0	$-3\frac{5}{9}$	$-\frac{64}{81}$	20,016
$4\frac{1}{2}$	$-1\frac{71}{81}$	$-3\frac{77}{81}$	$-\frac{64}{81}$	$19\frac{5}{9}$
5	$-3\frac{77}{81}$	$-4\frac{28}{81}$	$-\frac{64}{81}$	18,107
$5\frac{1}{2}$	$-6\frac{2}{9}$	$-4\frac{20}{27}$	$-\frac{64}{81}$	15,572
6	$-8\frac{56}{81}$	$-5\frac{11}{81}$	$-\frac{64}{81}$	$11\frac{23}{27}$
$6\frac{1}{2}$	$-11\frac{29}{81}$	$-5\frac{43}{81}$	$-\frac{64}{81}$	6,848
7	$-14\frac{2}{9}$	$-5\frac{25}{27}$	$-\frac{64}{81}$	0,461

• Zeichnung



Aufgabe (20)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x - 4)$$

$$f'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$$

$$f''(x) = -2\frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int (-1\frac{1}{4}x^2 + 5x)dx = -\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 5[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -1\frac{1}{4} \cdot (-x)^2 + 5 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = 0$$

$$x(-1\frac{1}{4}x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -1\frac{1}{4}x + 5 = 0$$

$$-1\frac{1}{4}x + 5 = 0 \quad / -5$$

$$-1\frac{1}{4}x = -5 \quad / : (-1\frac{1}{4})$$

$$x = \frac{-5}{-1\frac{1}{4}}$$

$$x = 4$$

$$x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 4; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 4$	$4 < x$
$f(x)$	-	+	-

$x \in]0; 4[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - \infty; 0[\cup]4; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5 = 0$$

$$-2\frac{1}{2}x + 5 = 0 \quad / -5$$

$$-2\frac{1}{2}x = -5 \quad / : \left(-2\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{-5}{-2\frac{1}{2}}$$

$$x = 2$$

$$x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(2) = -2\frac{1}{2}$$

$$f''(2) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(2/5)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 2$	$2 < x$
$f'(x)$	+	-

$x \in] - \infty; 2[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

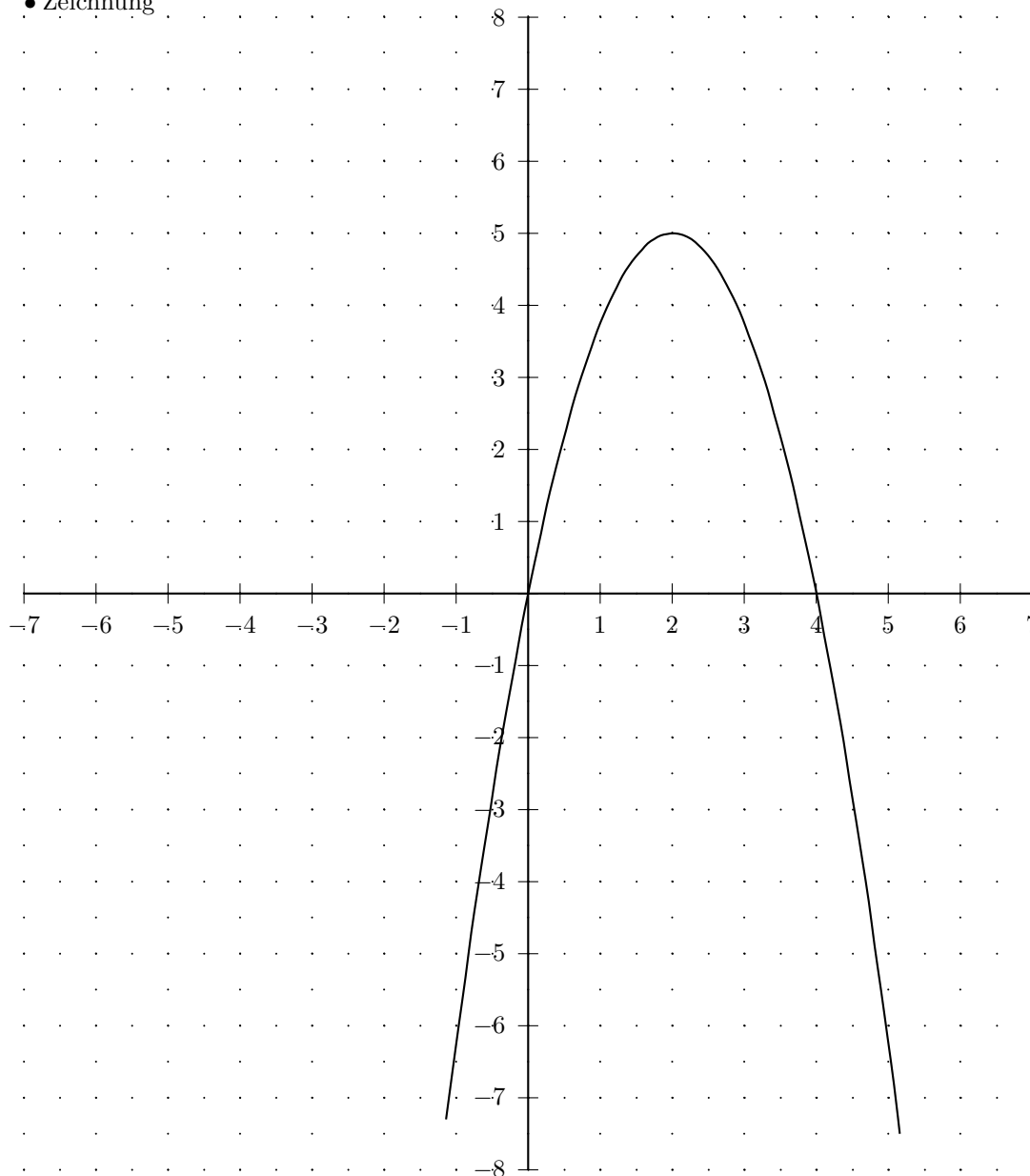
$x \in]2; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-96\frac{1}{4}$	$22\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$265\frac{5}{12}$
$-6\frac{1}{2}$	$-85\frac{5}{16}$	$21\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$220\frac{5}{96}$
-6	-75	20	$-2\frac{1}{2}$	180
$-5\frac{1}{2}$	$-65\frac{5}{16}$	$18\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$144\frac{91}{96}$
-5	$-56\frac{1}{4}$	$17\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$114\frac{7}{12}$
$-4\frac{1}{2}$	$-47\frac{13}{16}$	$16\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$88\frac{19}{32}$
-4	-40	15	$-2\frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-32\frac{13}{16}$	$13\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$48\frac{47}{96}$
-3	$-26\frac{1}{4}$	$12\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$33\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$-20\frac{5}{16}$	$11\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$22\frac{13}{96}$
-2	-15	10	$-2\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-10\frac{5}{16}$	$8\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{32}$
-1	$-6\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{12}$
$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{16}$	$6\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{65}{96}$
0	0	5	$-2\frac{1}{2}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	5	$-2\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{16}$	$3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{55}{96}$
1	$3\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{12}$
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	$1\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{32}$
2	5	0	$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	$-1\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$9\frac{11}{96}$
3	$3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{16}$	$-3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$12\frac{73}{96}$
4	0	-5	$-2\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{16}$	$-6\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$12\frac{21}{32}$
5	$-6\frac{1}{4}$	$-7\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$10\frac{5}{12}$
$5\frac{1}{2}$	$-10\frac{5}{16}$	$-8\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{29}{96}$
6	-15	-10	$-2\frac{1}{2}$	0
$6\frac{1}{2}$	$-20\frac{5}{16}$	$-11\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-8\frac{77}{96}$
7	$-26\frac{1}{4}$	$-12\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-20\frac{5}{12}$

• Zeichnung



Aufgabe (21)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x = -\frac{3}{4}(x+4)x$$

$$f'(x) = -1\frac{1}{2}x - 3$$

$$f''(x) = -1\frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int(-\frac{3}{4}x^2 - 3x)dx = -\frac{1}{4}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 3[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{3}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{3}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{3}{4} \cdot (-x)^2 - 3 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x = 0$$

$$x(-\frac{3}{4}x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{3}{4}x - 3 = 0$$

$$-\frac{3}{4}x - 3 = 0 \quad / + 3$$

$$-\frac{3}{4}x = 3 \quad / : (-\frac{3}{4})$$

$$x = \frac{3}{-\frac{3}{4}}$$

$$x = -4$$

$$x_1 = -4; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-4	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-4; 0[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -4[\cup]0; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -1\frac{1}{2}x - 3 = 0$$

$$-1\frac{1}{2}x - 3 = 0 \quad / + 3$$

$$-1\frac{1}{2}x = 3 \quad / : (-1\frac{1}{2})$$

$$x = \frac{3}{-1\frac{1}{2}}$$

$$x = -2$$

$$x_3 = -2; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f''(-2) = -1\frac{1}{2}$$

$$f''(-2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt: } (-2/3)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

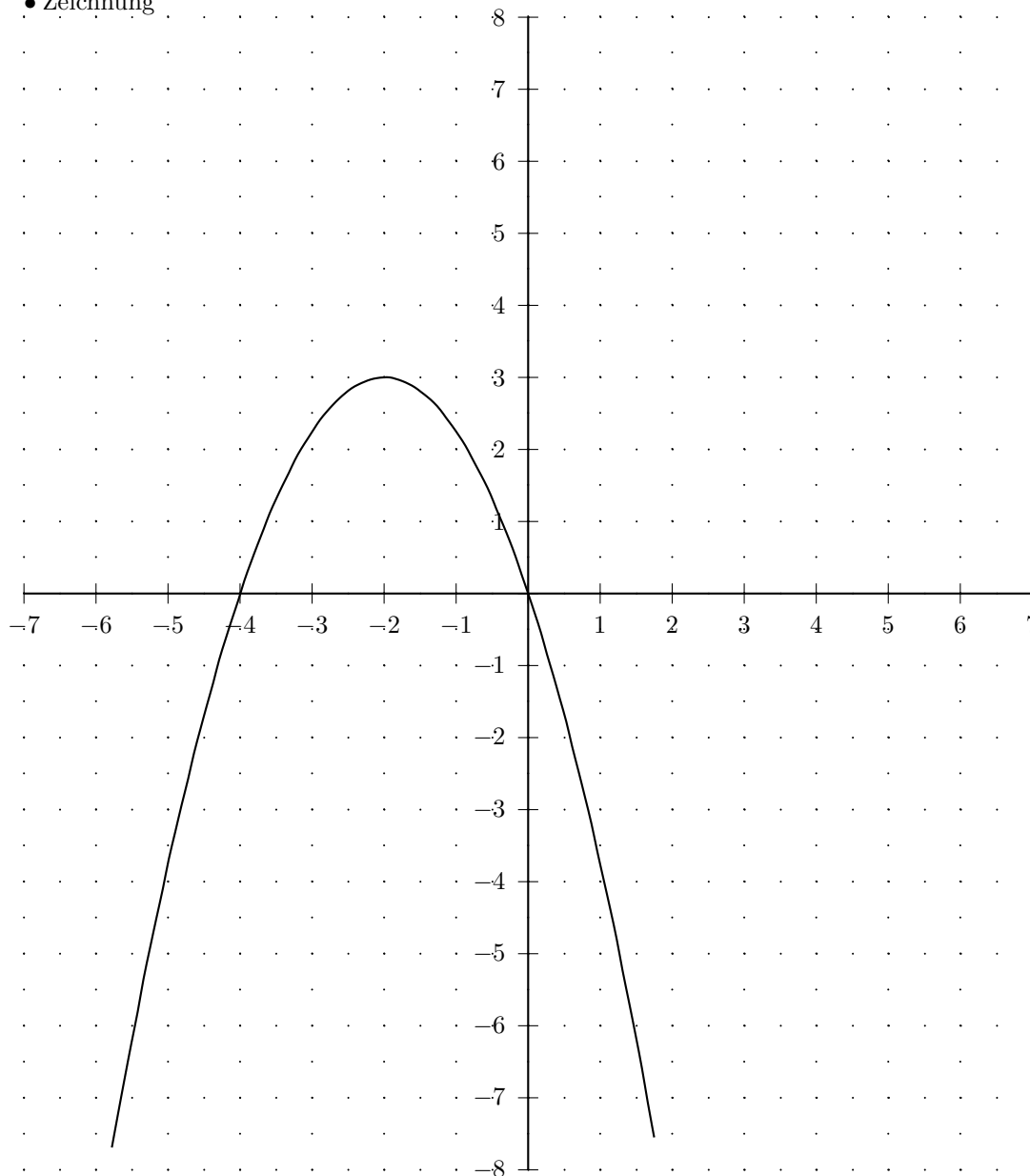
$x \in]-2; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-15\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$
$-6\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{16}$	$6\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$5\frac{9}{32}$
-6	-9	6	$-1\frac{1}{2}$	0
$-5\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	$5\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{25}{32}$
-5	$-3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{4}$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{11}{16}$	$3\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-7\frac{19}{32}$
-4	0	3	$-1\frac{1}{2}$	-8
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{16}$	$2\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-7\frac{21}{32}$
-3	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{13}{16}$	$\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{15}{32}$
-2	3	0	$-1\frac{1}{2}$	-4
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{13}{16}$	$-\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{17}{32}$
-1	$2\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{16}$	$-2\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{32}$
0	0	-3	$-1\frac{1}{2}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-3	$-1\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{11}{16}$	$-3\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{32}$
1	$-3\frac{3}{4}$	$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	$-5\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-4\frac{7}{32}$
2	-9	-6	$-1\frac{1}{2}$	-8
$2\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{16}$	$-6\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-13\frac{9}{32}$
3	$-15\frac{3}{4}$	$-7\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-20\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$-19\frac{11}{16}$	$-8\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-29\frac{3}{32}$
4	-24	-9	$-1\frac{1}{2}$	-40
$4\frac{1}{2}$	$-28\frac{11}{16}$	$-9\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-53\frac{5}{32}$
5	$-33\frac{3}{4}$	$-10\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-68\frac{3}{4}$
$5\frac{1}{2}$	$-39\frac{3}{16}$	$-11\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-86\frac{31}{32}$
6	-45	-12	$-1\frac{1}{2}$	-108
$6\frac{1}{2}$	$-51\frac{3}{16}$	$-12\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-132\frac{1}{32}$
7	$-57\frac{3}{4}$	$-13\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-159\frac{1}{4}$

• Zeichnung



Aufgabe (22)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 5 = \frac{5}{9}(x+3)(x-3)$$

$$f'(x) = 1\frac{1}{9}x$$

$$f''(x) = 1\frac{1}{9}$$

$$F(x) = \int(\frac{5}{9}x^2 - 5)dx = \frac{5}{27}x^3 - 5x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-5), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{5}{9} \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{5}{9} \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{5}{9} \cdot (-x)^2 - 5$$

$$f(-x) = \frac{5}{9} \cdot x^2 - 5$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 5 = 0$$

$$\frac{5}{9}x^2 - 5 = 0 \quad / + 5$$

$$\frac{5}{9}x^2 = 5 \quad / : \frac{5}{9}$$

$$x^2 = \frac{5}{\frac{5}{9}}$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$$x_1 = -3; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 3; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -3$	-3	$< x < 3$	3	$< x$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; -3[\cup]3; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-3; 3[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 1\frac{1}{9}x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = 1\frac{1}{9} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:(0/ - 5)}}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$< x$
$f'(x)$	-	0	+

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

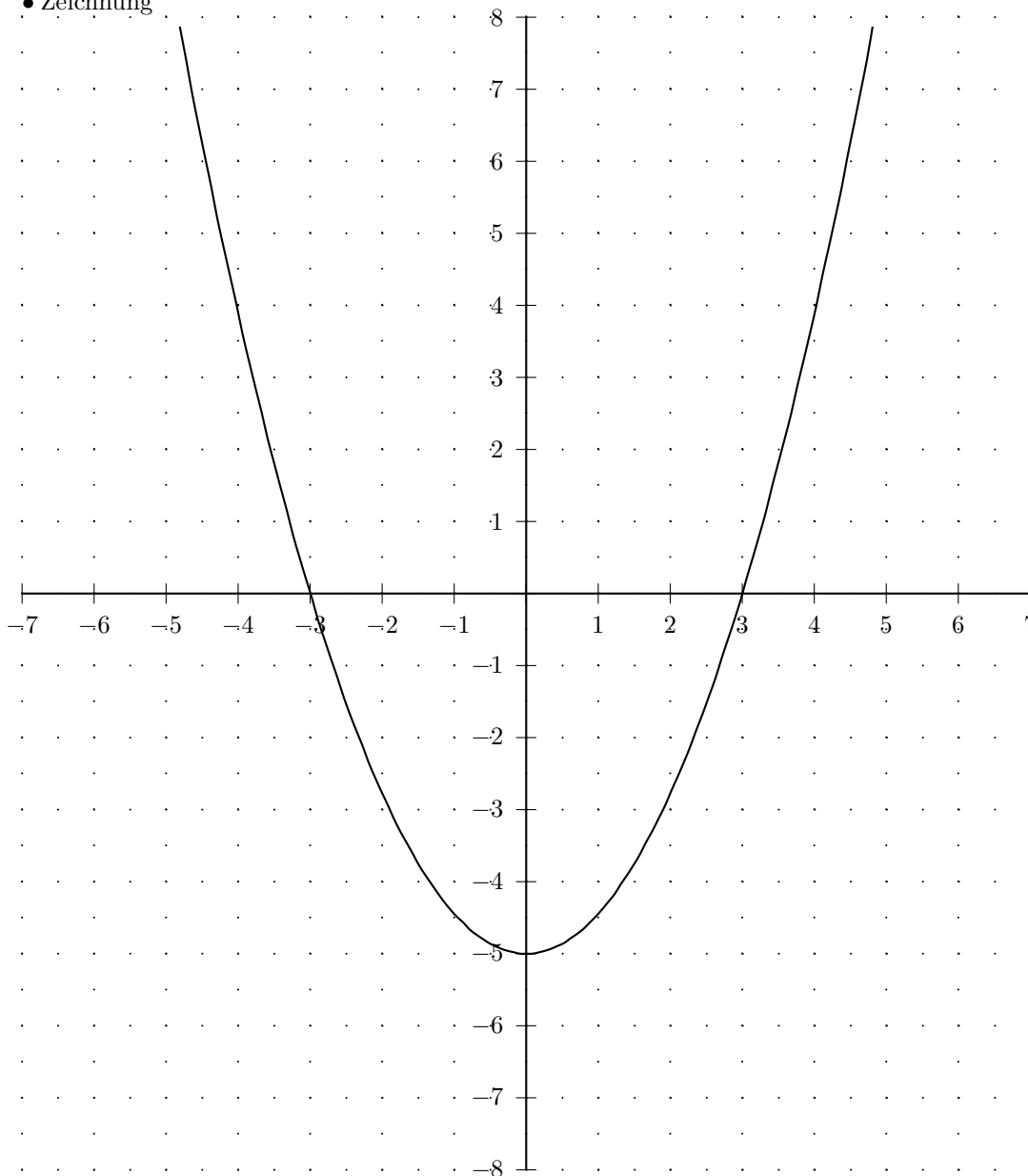
$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$22\frac{2}{9}$	$-7\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-28\frac{14}{27}$
$-6\frac{1}{2}$	$18\frac{17}{36}$	$-7\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-18,356$
-6	15	$-6\frac{3}{3}$	$1\frac{1}{9}$	-10
$-5\frac{1}{2}$	$11\frac{29}{36}$	$-6\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$	-3,31
-5	$8\frac{8}{9}$	$-5\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$1\frac{23}{27}$
$-4\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	-5	$1\frac{1}{9}$	$5\frac{5}{8}$
-4	$3\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$8\frac{4}{27}$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{36}$	$-3\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{9}$	9,56
-3	0	$-3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$	10
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{19}{36}$	$-2\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$	9,606
-2	$-2\frac{7}{9}$	$-2\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$8\frac{14}{27}$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	$-1\frac{3}{3}$	$1\frac{1}{9}$	$6\frac{7}{8}$
-1	$-4\frac{4}{9}$	$-1\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$4\frac{22}{27}$
$-\frac{1}{2}$	$-4\frac{31}{36}$	$-\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$	2,477
0	-5	0	$1\frac{1}{9}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-5	0	$1\frac{1}{9}$	0
$\frac{1}{2}$	$-4\frac{31}{36}$	$\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$	-2,477
1	$-4\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-4\frac{22}{27}$
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{9}$	$-6\frac{7}{8}$
2	-2	$2\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-8\frac{14}{27}$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{19}{36}$	$2\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$	-9,606
3	0	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$	-10
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{36}$	$3\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{9}$	-9,56
4	$3\frac{8}{9}$	$4\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-8\frac{4}{27}$
$4\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	5	$1\frac{1}{9}$	$-5\frac{5}{8}$
5	$8\frac{8}{9}$	$5\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-1\frac{23}{27}$
$5\frac{1}{2}$	$11\frac{29}{36}$	$6\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$	3,31
6	15	$6\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{9}$	10
$6\frac{1}{2}$	$18\frac{17}{36}$	$7\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$	18,356
7	$22\frac{2}{9}$	$7\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$28\frac{14}{27}$

• Zeichnung



Aufgabe (23)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 12x^2 + 12x = 12(x + 1)x$$

$$f'(x) = 24x + 12$$

$$f''(x) = 24$$

$$F(x) = \int (12x^2 + 12x)dx = 4x^3 + 6x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-3), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [12 \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [12 \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 12 \cdot (-x)^2 + 12 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 12x^2 + 12x = 0$$

$$x(12x + 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 12x + 12 = 0$$

$$12x + 12 = 0 \quad / -12$$

$$12x = -12 \quad / :12$$

$$x = \frac{-12}{12}$$

$$x = -1$$

$$x_1 = -1; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x$
$f(x)$	+	-	+

$x \in]-\infty; -1[\cup]0; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-1; 0[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 24x + 12 = 0$$

$$24x + 12 = 0 \quad / -12$$

$$24x = -12 \quad / :24$$

$$x = \frac{-12}{24}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f''(-\frac{1}{2}) = 24 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt: } (-\frac{1}{2} / -3)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x$
$f'(x)$	-	+

$x \in]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

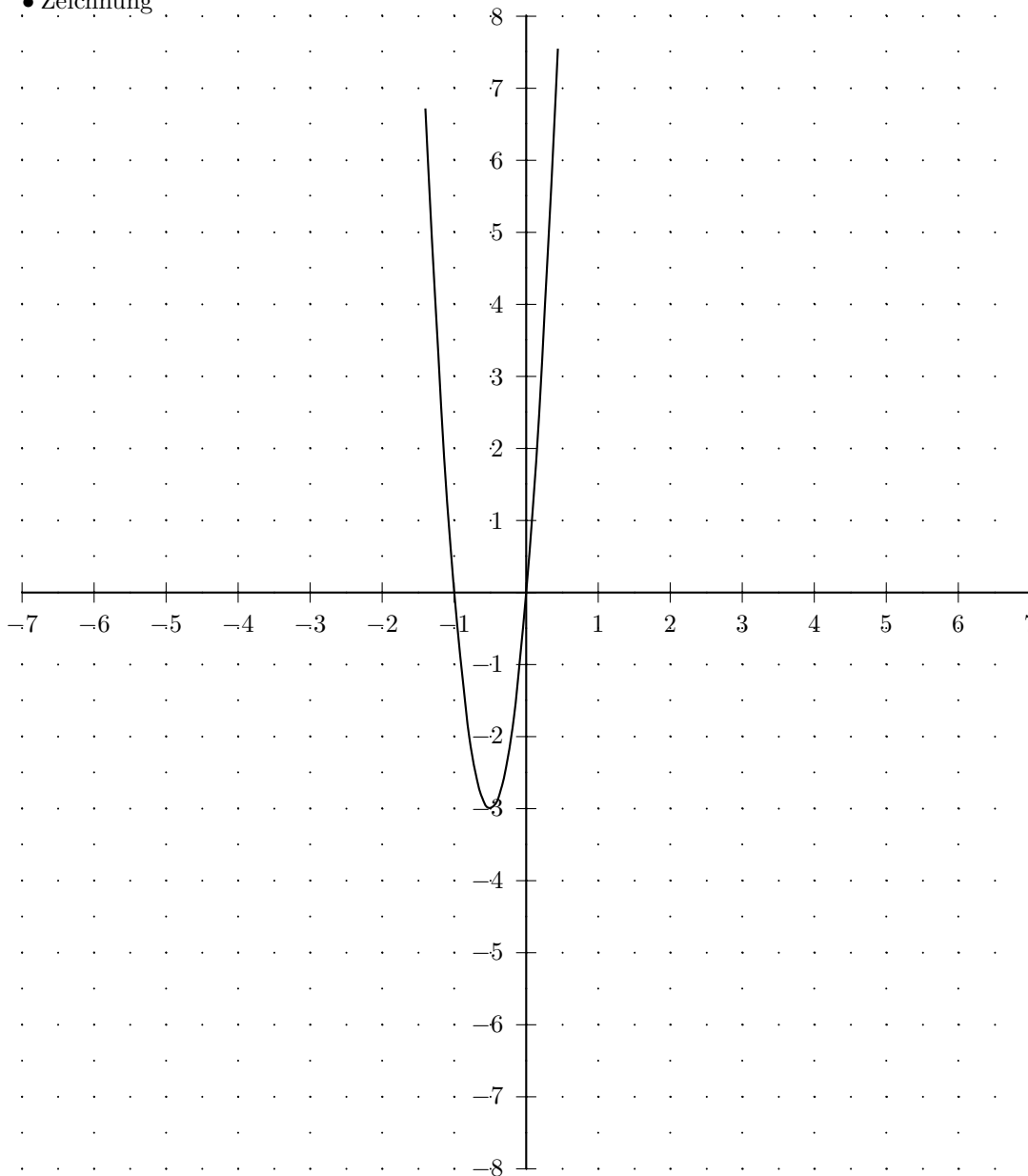
$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	504	-156	24	-1078
$-6\frac{1}{2}$	429	-144	24	-845
-6	360	-132	24	-648
$-5\frac{1}{2}$	297	-120	24	-484
-5	240	-108	24	-350
$-4\frac{1}{2}$	189	-96	24	-243
-4	144	-84	24	-160
$-3\frac{1}{2}$	105	-72	24	-98
-3	72	-60	24	-54
$-2\frac{1}{2}$	45	-48	24	-25
-2	24	-36	24	-8
$-1\frac{1}{2}$	9	-24	24	0
-1	0	-12	24	2
$-\frac{1}{2}$	-3	0	24	1
0	0	12	24	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	12	24	0
$\frac{1}{2}$	9	24	24	2
1	24	36	24	10
$1\frac{1}{2}$	45	48	24	27
2	72	60	24	56
$2\frac{1}{2}$	105	72	24	100
3	144	84	24	162
$3\frac{1}{2}$	189	96	24	245
4	240	108	24	352
$4\frac{1}{2}$	297	120	24	486
5	360	132	24	650
$5\frac{1}{2}$	429	144	24	847
6	504	156	24	1080
$6\frac{1}{2}$	585	168	24	1352
7	672	180	24	1666

• Zeichnung



Aufgabe (24)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{6}{25}x^2 + 1\frac{23}{25}x + 2\frac{4}{25} = -\frac{6}{25}(x+1)(x-9)$$

$$f'(x) = -\frac{12}{25}x + 1\frac{23}{25}$$

$$f''(x) = -\frac{12}{25}$$

$$F(x) = \int \left(-\frac{6}{25}x^2 + 1\frac{23}{25}x + 2\frac{4}{25}\right) dx = -\frac{2}{25}x^3 + \frac{24}{25}x^2 + 2\frac{4}{25}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 6[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left[-\frac{6}{25} \cdot \infty^2\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[-\frac{6}{25} \cdot (-\infty)^2\right] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{6}{25} \cdot (-x)^2 + 1\frac{23}{25} \cdot (-x) + 2\frac{4}{25}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{6}{25}x^2 + 1\frac{23}{25}x + 2\frac{4}{25} = 0$$

$$-\frac{6}{25}x^2 + 1\frac{23}{25}x + 2\frac{4}{25} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1\frac{23}{25} \pm \sqrt{1\frac{23}{25}^2 - 4 \cdot \left(-\frac{6}{25}\right) \cdot 2\frac{4}{25}}}{2 \cdot \left(-\frac{6}{25}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1\frac{23}{25} \pm \sqrt{5\frac{19}{25}}}{-\frac{12}{25}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1\frac{23}{25} \pm 2\frac{2}{5}}{-\frac{12}{25}}$$

$$x_1 = \frac{-1\frac{23}{25} + 2\frac{2}{5}}{-\frac{12}{25}} \quad x_2 = \frac{-1\frac{23}{25} - 2\frac{2}{5}}{-\frac{12}{25}}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 9$$

$x_1 = -1$; 1-fache Nullstelle

$x_2 = 9$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	-1	$< x < 9$	9	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1; 9[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -(\cup]9; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{12}{25}x + 1\frac{23}{25} = 0$$

$$-\frac{12}{25}x + 1\frac{23}{25} = 0 \quad / -1\frac{23}{25}$$

$$-\frac{12}{25}x = -1\frac{23}{25} \quad / : \left(-\frac{12}{25}\right)$$

$$x = \frac{-1\frac{23}{25}}{-\frac{12}{25}}$$

$$x = 4$$

$x_3 = 4$; 1-fache Nullstelle

$$f''(4) = -\frac{12}{25}$$

$f''(4) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(4/6)

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 4$	4	$x < 4$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 4[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

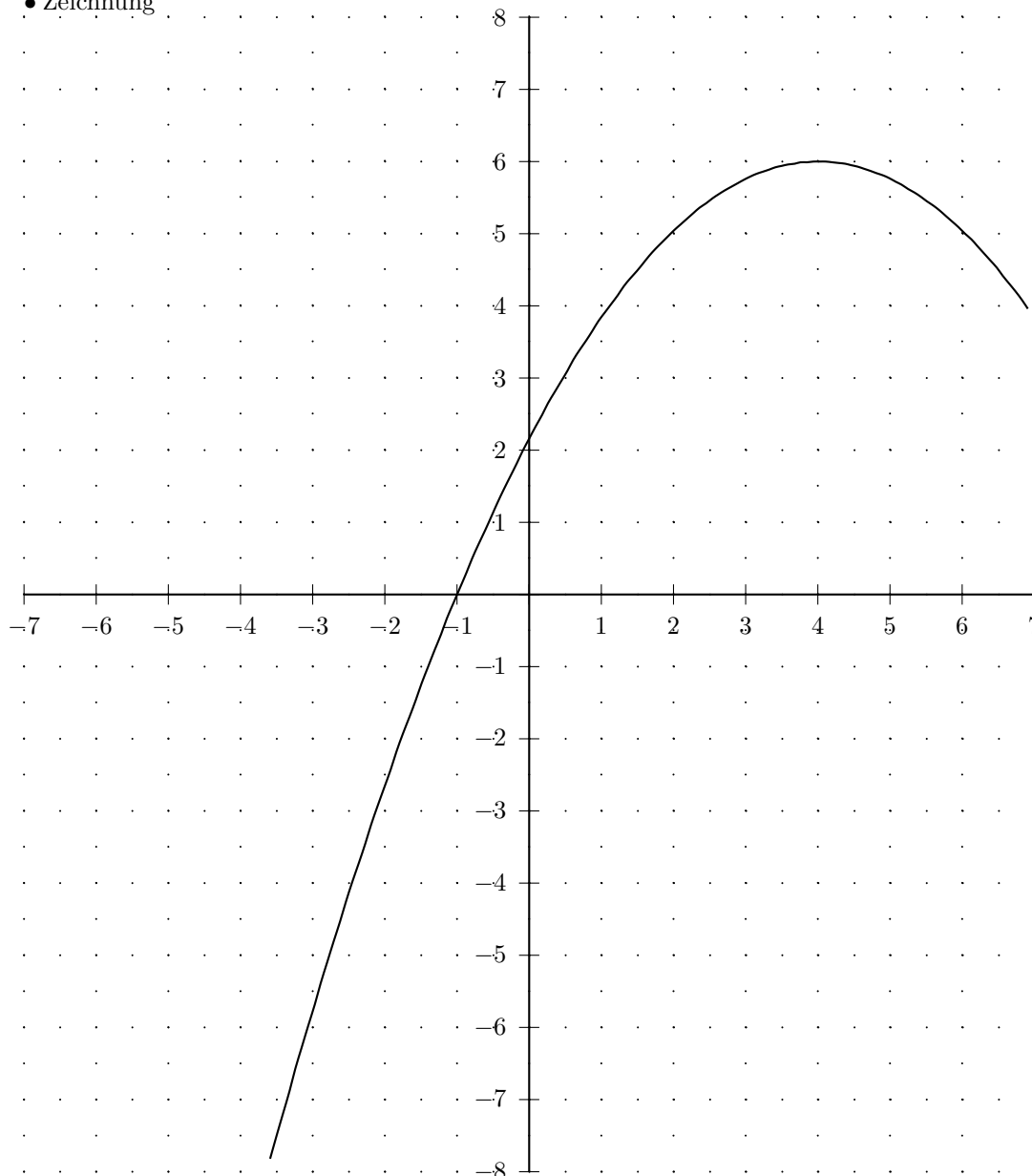
$x \in]4; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-23\frac{1}{25}$	$5\frac{7}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$59\frac{9}{25}$
$-6\frac{1}{2}$	$-20\frac{23}{50}$	$5\frac{1}{25}$	$-\frac{12}{25}$	48,49
-6	-18	$4\frac{4}{5}$	$-\frac{12}{25}$	$38\frac{22}{25}$
$-5\frac{1}{2}$	$-15\frac{33}{50}$	$4\frac{14}{25}$	$-\frac{12}{25}$	30,47
-5	-13	$4\frac{8}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$23\frac{1}{5}$
$-4\frac{1}{2}$	$-11\frac{17}{50}$	$4\frac{2}{25}$	$-\frac{12}{25}$	17,01
-4	-9	$3\frac{21}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$11\frac{21}{25}$
$-3\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{2}$	$3\frac{5}{5}$	$-\frac{12}{25}$	7,63
-3	-5	$3\frac{9}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$4\frac{8}{25}$
$-2\frac{1}{2}$	$-4\frac{7}{50}$	$3\frac{3}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$1\frac{17}{20}$
-2	-2	$2\frac{22}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$\frac{4}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{13}{50}$	$2\frac{16}{25}$	$-\frac{12}{25}$	-0,81
-1	0	$2\frac{2}{5}$	$-\frac{12}{25}$	$-1\frac{3}{25}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{50}$	$2\frac{4}{25}$	$-\frac{12}{25}$	-0,83
0	$2\frac{4}{25}$	$1\frac{23}{25}$	$-\frac{12}{25}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$2\frac{4}{25}$	$1\frac{23}{25}$	$-\frac{12}{25}$	0
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{50}$	$1\frac{17}{25}$	$-\frac{12}{25}$	1,31
1	$3\frac{21}{25}$	$1\frac{11}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$3\frac{1}{25}$
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{5}$	$-\frac{12}{25}$	5,13
2	$5\frac{1}{25}$	$\frac{24}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$7\frac{13}{25}$
$2\frac{1}{2}$	$5\frac{23}{50}$	$\frac{18}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$10\frac{3}{20}$
3	$5\frac{19}{25}$	$\frac{12}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$12\frac{24}{25}$
$3\frac{1}{2}$	$5\frac{47}{50}$	$\frac{6}{25}$	$-\frac{12}{25}$	15,89
4	6	0	$-\frac{12}{25}$	$18\frac{22}{25}$
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{47}{50}$	$-\frac{6}{25}$	$-\frac{12}{25}$	21,87
5	$5\frac{19}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$24\frac{4}{5}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{23}{50}$	$-\frac{18}{25}$	$-\frac{12}{25}$	27,61
6	$5\frac{1}{25}$	$-\frac{24}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$30\frac{6}{25}$
$6\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{5}$	$-\frac{12}{25}$	32,63
7	$3\frac{21}{25}$	$-1\frac{11}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$34\frac{18}{25}$

• Zeichnung



Aufgabe (25)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{9}{25}x^2 - 2\frac{22}{25}x + 3\frac{6}{25} = -\frac{9}{25}(x+9)(x-1)$$

$$f'(x) = -\frac{18}{25}x - 2\frac{22}{25}$$

$$f''(x) = -\frac{18}{25}$$

$$F(x) = \int \left(-\frac{9}{25}x^2 - 2\frac{22}{25}x + 3\frac{6}{25}\right) dx = -\frac{3}{25}x^3 - 1\frac{11}{25}x^2 + 3\frac{6}{25}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 9[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left[-\frac{9}{25} \cdot \infty^2\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[-\frac{9}{25} \cdot (-\infty)^2\right] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{9}{25} \cdot (-x)^2 - 2\frac{22}{25} \cdot (-x) + 3\frac{6}{25}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{9}{25}x^2 - 2\frac{22}{25}x + 3\frac{6}{25} = 0$$

$$-\frac{9}{25}x^2 - 2\frac{22}{25}x + 3\frac{6}{25} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+2\frac{22}{25} \pm \sqrt{\left(-2\frac{22}{25}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right) \cdot 3\frac{6}{25}}}{2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2\frac{22}{25} \pm \sqrt{12\frac{24}{25}}}{-\frac{18}{25}}$$

$$x_{1/2} = \frac{2\frac{22}{25} \pm 3\frac{3}{5}}{-\frac{18}{25}}$$

$$x_1 = \frac{2\frac{22}{25} + 3\frac{3}{5}}{-\frac{18}{25}} \quad x_2 = \frac{2\frac{22}{25} - 3\frac{3}{5}}{-\frac{18}{25}}$$

$$x_1 = -9 \quad x_2 = 1$$

$x_1 = -9$; 1-fache Nullstelle

$x_2 = 1$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x < -9$	-9	$< x < 1$	1	$< x$
$f(x)$	-	0	+	0	-

$x \in]-9; 1[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -9[\cup]1; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{18}{25}x - 2\frac{22}{25} = 0$$

$$-\frac{18}{25}x - 2\frac{22}{25} = 0 \quad / + 2\frac{22}{25}$$

$$-\frac{18}{25}x = 2\frac{22}{25} \quad / : \left(-\frac{18}{25}\right)$$

$$x = \frac{2\frac{22}{25}}{-\frac{18}{25}}$$

$$x = -4$$

$x_3 = -4$; 1-fache Nullstelle

$$f''(-4) = -\frac{18}{25}$$

$f''(-4) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt: $(-4/9)$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-4	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in] - \infty; -4[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

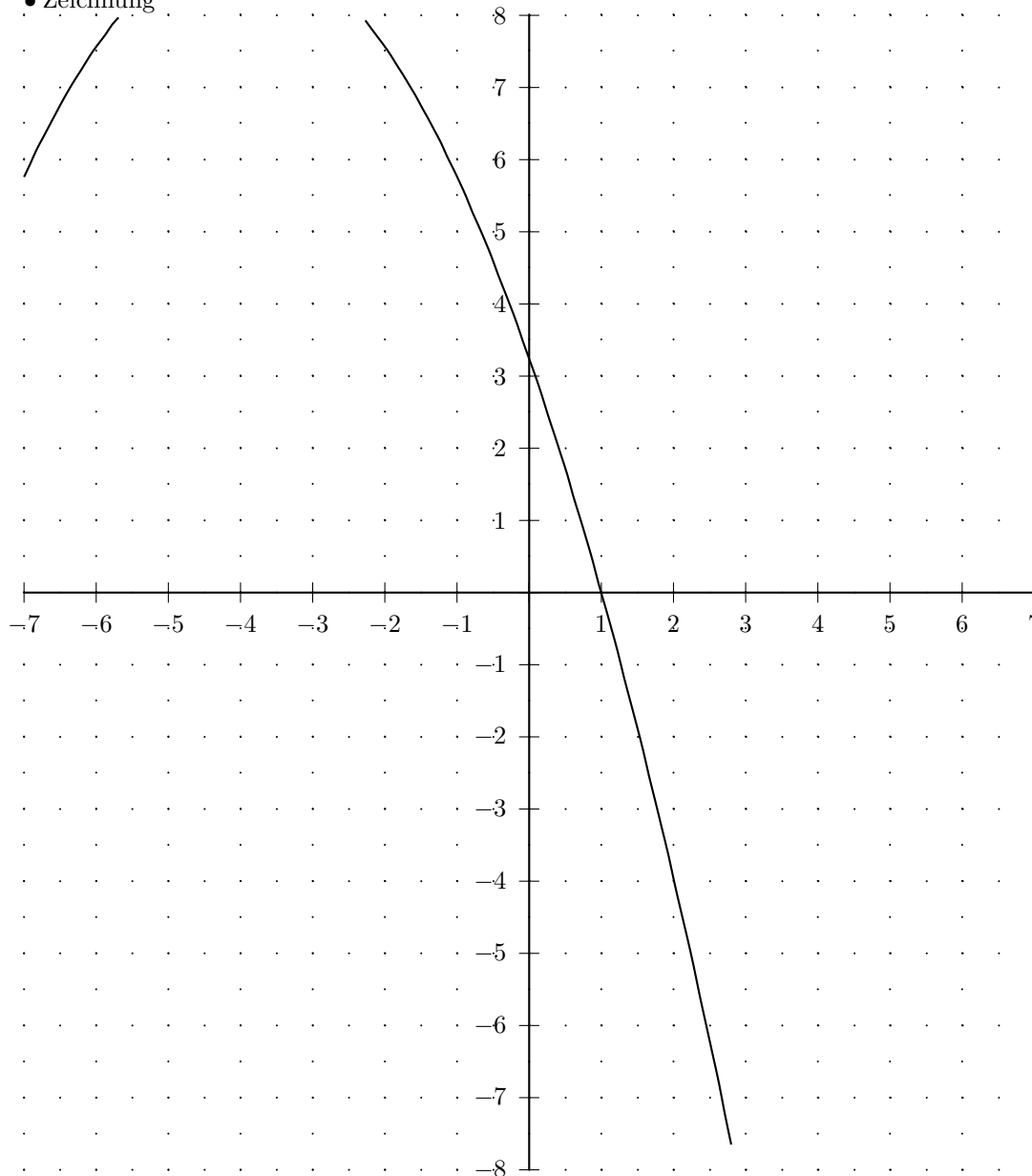
$x \in] - 4; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$5\frac{19}{25}$	$2\frac{4}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-52\frac{2}{25}$
$-6\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$1\frac{4}{5}$	$-\frac{18}{25}$	-48,945
-6	$7\frac{14}{25}$	$1\frac{11}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-45\frac{9}{25}$
$-5\frac{1}{2}$	8,19	$1\frac{2}{25}$	$-\frac{18}{25}$	-41,415
-5	$8\frac{16}{25}$	$\frac{18}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-37\frac{1}{5}$
$-4\frac{1}{2}$	8,91	$\frac{9}{25}$	$-\frac{18}{25}$	-32,805
-4	9	0	$-\frac{18}{25}$	$-28\frac{8}{25}$
$-3\frac{1}{2}$	8,91	$-\frac{9}{25}$	$-\frac{18}{25}$	-23,835
-3	$8\frac{16}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-19\frac{11}{25}$
$-2\frac{1}{2}$	8,19	$-1\frac{2}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-15\frac{9}{40}$
-2	$7\frac{14}{25}$	$-1\frac{11}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-11\frac{7}{25}$
$-1\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$-1\frac{4}{5}$	$-\frac{18}{25}$	-7,695
-1	$5\frac{19}{25}$	$-2\frac{4}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-4\frac{14}{25}$
$-\frac{1}{2}$	4,59	$-2\frac{13}{25}$	$-\frac{18}{25}$	-1,965
0	$3\frac{6}{25}$	$-2\frac{22}{25}$	$-\frac{18}{25}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$3\frac{6}{25}$	$-2\frac{22}{25}$	$-\frac{18}{25}$	0
$\frac{1}{2}$	1,71	$-3\frac{6}{25}$	$-\frac{18}{25}$	1,245
1	0	$-3\frac{3}{5}$	$-\frac{18}{25}$	$1\frac{17}{25}$
$1\frac{1}{2}$	-1,89	$-3\frac{24}{25}$	$-\frac{18}{25}$	1,215
2	$-3\frac{24}{25}$	$-4\frac{8}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-\frac{6}{25}$
$2\frac{1}{2}$	-6,21	$-4\frac{17}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-2\frac{31}{40}$
3	$-8\frac{16}{25}$	$-5\frac{1}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-6\frac{12}{25}$
$3\frac{1}{2}$	$-11\frac{1}{4}$	$-5\frac{2}{5}$	$-\frac{18}{25}$	-11,445
4	$-14\frac{1}{25}$	$-5\frac{19}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-17\frac{19}{25}$
$4\frac{1}{2}$	-17,01	$-6\frac{3}{25}$	$-\frac{18}{25}$	-25,515
5	$-20\frac{4}{25}$	$-6\frac{12}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-34\frac{4}{5}$
$5\frac{1}{2}$	-23,49	$-6\frac{21}{25}$	$-\frac{18}{25}$	-45,705
6	-27	$-7\frac{1}{5}$	$-\frac{18}{25}$	$-58\frac{8}{25}$
$6\frac{1}{2}$	-30,69	$-7\frac{14}{25}$	$-\frac{18}{25}$	-72,735
7	$-34\frac{14}{25}$	$-7\frac{23}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-89\frac{1}{25}$

• Zeichnung



Aufgabe (26)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7\frac{7}{8} = -\frac{1}{8}(x+7)(x-9)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}$$

$$F(x) = \int(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7\frac{7}{8})dx = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + 7\frac{7}{8}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 8[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{8} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{8} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{8} \cdot (-x)^2 + \frac{1}{4} \cdot (-x) + 7\frac{7}{8}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7\frac{7}{8} = 0$$

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7\frac{7}{8} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4}^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{8}) \cdot 7\frac{7}{8}}}{2 \cdot (-\frac{1}{8})}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{4}}{-\frac{1}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{4} \pm 2}{-\frac{1}{4}}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{4} + 2}{-\frac{1}{4}} \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{4} - 2}{-\frac{1}{4}}$$

$$x_1 = -7 \quad x_2 = 9$$

$$x_1 = -7; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 9; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -7$	$-7 < x < 9$	$9 < x$	
$f(x)$	-	+	0	-

$x \in]-7; 9[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -7[\cup]9; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0 \quad / -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4}x = -\frac{1}{4} \quad / : \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$x = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}}$$

$$x = 1$$

$$x_3 = 1; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f''(1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1/8)}$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 1$	1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

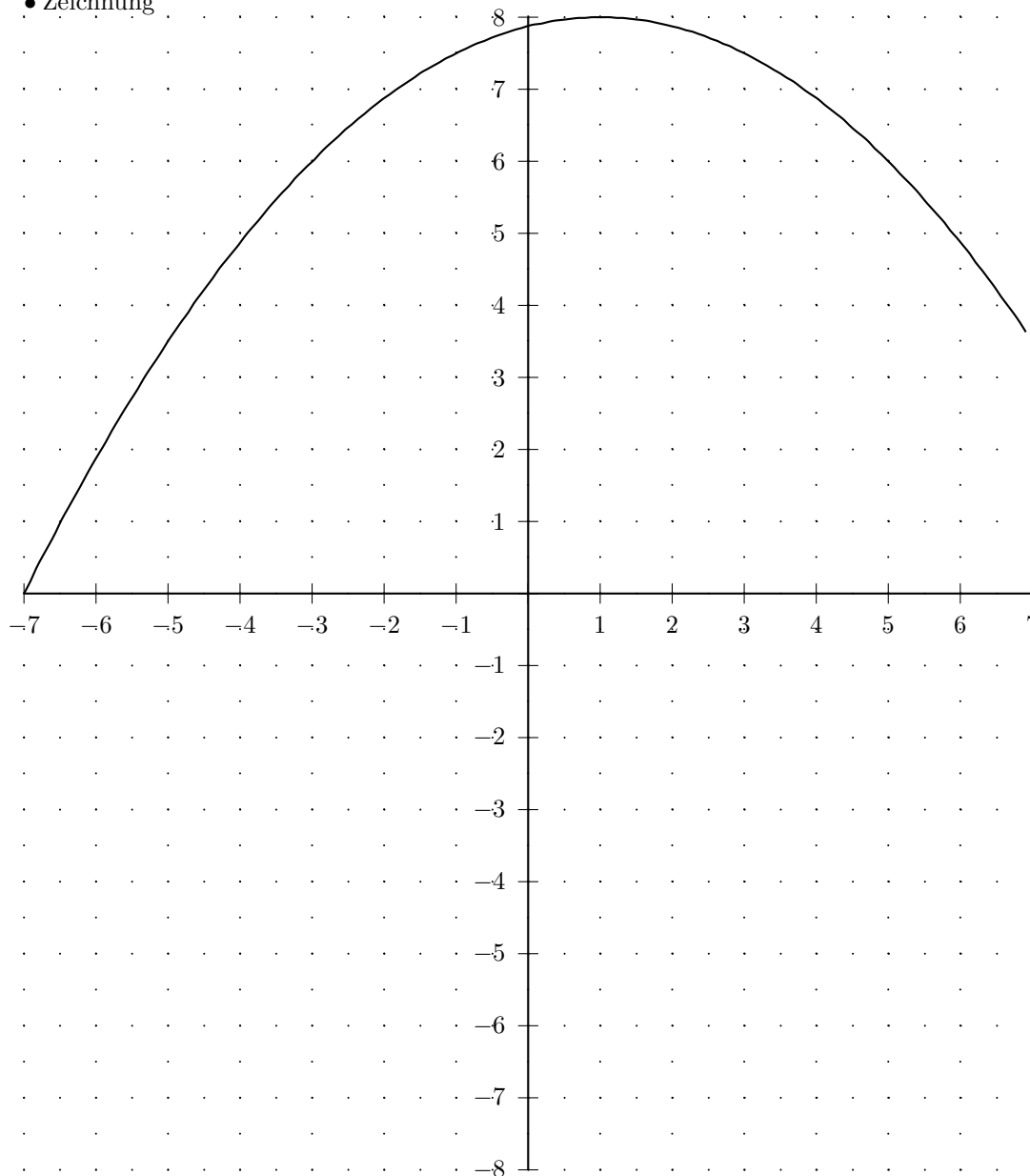
$x \in]1; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	0	2	$-\frac{1}{4}$	$-34\frac{17}{24}$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{31}{32}$	$1\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-34,464$
-6	$1\frac{7}{8}$	$1\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-33\frac{3}{4}$
$-5\frac{1}{2}$	$2\frac{23}{32}$	$1\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-32,599$
-5	$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-31\frac{1}{24}$
$-4\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{32}$	$1\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-29\frac{7}{64}$
-4	$4\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-26\frac{5}{6}$
$-3\frac{1}{2}$	$5\frac{15}{32}$	$1\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-24,245$
-3	6	1	$-\frac{1}{4}$	$-21\frac{3}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{15}{32}$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-18,255$
-2	$6\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-14\frac{11}{12}$
$-1\frac{1}{2}$	$7\frac{7}{32}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-11\frac{25}{64}$
-1	$7\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-7\frac{17}{24}$
$-\frac{1}{2}$	$7\frac{23}{32}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-3,901$
0	$7\frac{7}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$7\frac{7}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
$\frac{1}{2}$	$7\frac{31}{32}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$3,964$
1	8	0	$-\frac{1}{4}$	$7\frac{23}{24}$
$1\frac{1}{2}$	$7\frac{31}{32}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$11\frac{61}{64}$
2	$7\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$15\frac{11}{12}$
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{23}{32}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$19,818$
3	$7\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$23\frac{5}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$7\frac{7}{32}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$27,307$
4	$6\frac{7}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$30\frac{5}{6}$
$4\frac{1}{2}$	$6\frac{15}{32}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$34\frac{11}{64}$
5	6	-1	$-\frac{1}{4}$	$37\frac{7}{24}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{15}{32}$	$-1\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$40,161$
6	$4\frac{7}{8}$	$-1\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$42\frac{3}{4}$
$6\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{32}$	$-1\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$45,026$
7	$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$46\frac{23}{24}$

• Zeichnung



Aufgabe (27)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{20}{49}x^2 + 3\frac{33}{49}x + 3\frac{13}{49} = \frac{20}{49}(x+8)(x+1)$$

$$f'(x) = \frac{40}{49}x + 3\frac{33}{49}$$

$$f''(x) = \frac{40}{49}$$

$$F(x) = \int (\frac{20}{49}x^2 + 3\frac{33}{49}x + 3\frac{13}{49})dx = 0,136x^3 + 1\frac{41}{49}x^2 + 3\frac{13}{49}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-5), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{20}{49} \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{20}{49} \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{20}{49} \cdot (-x)^2 + 3\frac{33}{49} \cdot (-x) + 3\frac{13}{49}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{20}{49}x^2 + 3\frac{33}{49}x + 3\frac{13}{49} = 0$$

$$\frac{20}{49}x^2 + 3\frac{33}{49}x + 3\frac{13}{49} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-3\frac{33}{49} \pm \sqrt{3\frac{33}{49}^2 - 4 \cdot \frac{20}{49} \cdot 3\frac{13}{49}}}{2 \cdot \frac{20}{49}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-3\frac{33}{49} \pm \sqrt{8\frac{8}{49}}}{\frac{40}{49}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-3\frac{33}{49} \pm 2\frac{6}{7}}{\frac{40}{49}}$$

$$x_1 = \frac{-3\frac{33}{49} + 2\frac{6}{7}}{\frac{40}{49}} \quad x_2 = \frac{-3\frac{33}{49} - 2\frac{6}{7}}{\frac{40}{49}}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -8$$

$$x_1 = -8; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -8$	$-8 < x < -1$	$-1 < x$
$f(x)$	+	0	-

$x \in]-\infty; -8[\cup]-1; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-8; -1[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{40}{49}x + 3\frac{33}{49} = 0$$

$$\frac{40}{49}x + 3\frac{33}{49} = 0 \quad / -3\frac{33}{49}$$

$$\frac{40}{49}x = -3\frac{33}{49} \quad / : \frac{40}{49}$$

$$x = \frac{-3\frac{33}{49}}{\frac{40}{49}}$$

$$x = -4\frac{1}{2}$$

$$x_3 = -4\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-4\frac{1}{2}) = \frac{40}{49} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-4\frac{1}{2} / -5)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-4\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in] -4\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

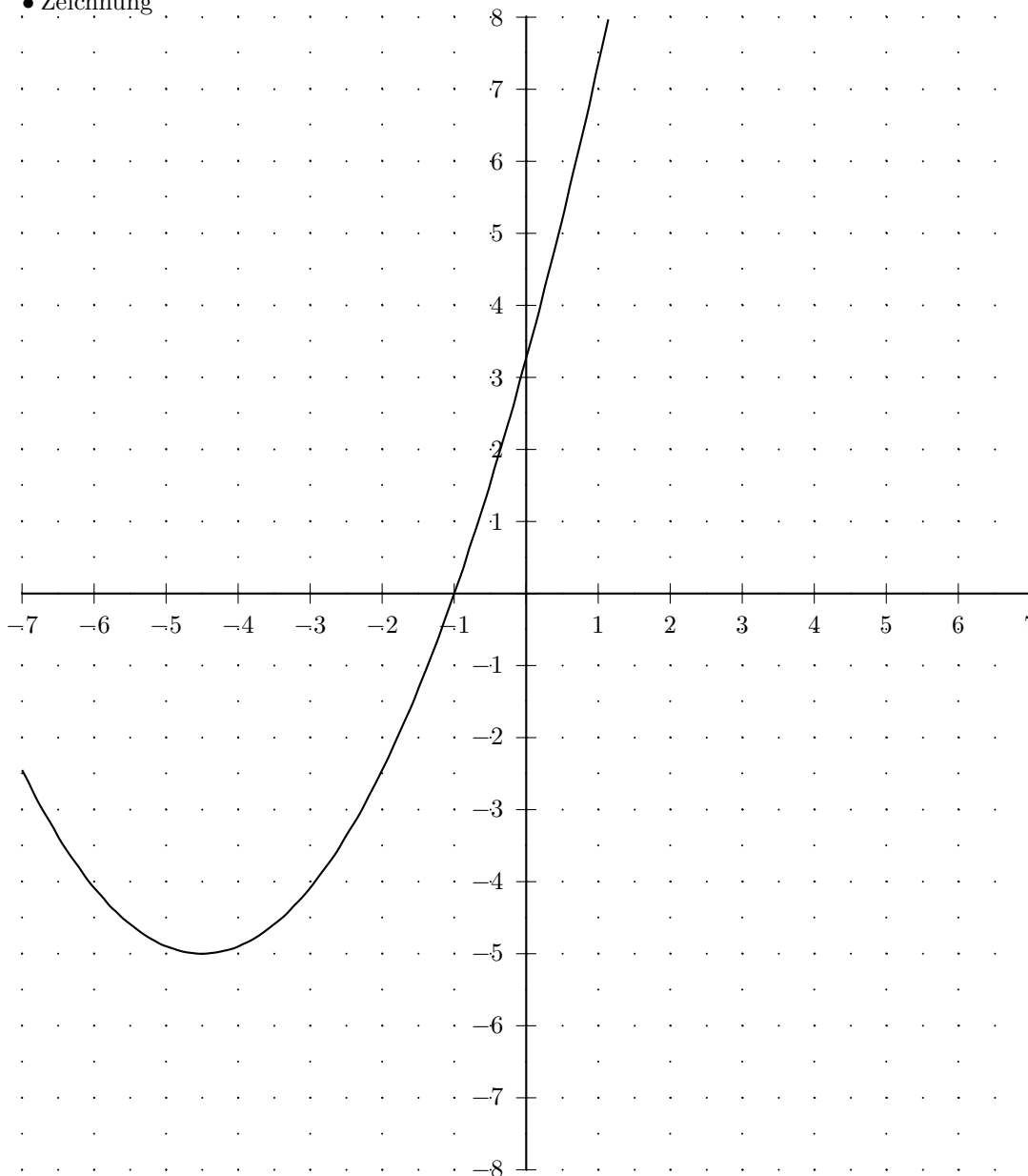
$x \in] -\infty; -4\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-2\frac{22}{49}$	$-2\frac{2}{49}$	$\frac{40}{49}$	$20\frac{10}{21}$
$-6\frac{1}{2}$	$-3\frac{18}{49}$	$-1\frac{31}{49}$	$\frac{40}{49}$	19,014
-6	$-4\frac{4}{49}$	$-1\frac{11}{49}$	$\frac{40}{49}$	$17\frac{1}{7}$
$-5\frac{1}{2}$	$-4\frac{29}{49}$	$-\frac{40}{49}$	$\frac{40}{49}$	14,966
-5	$-4\frac{44}{49}$	$-\frac{20}{49}$	$\frac{40}{49}$	12,585
$-4\frac{1}{2}$	-5	0	$\frac{40}{49}$	$10\frac{5}{49}$
-4	$-4\frac{44}{49}$	$\frac{20}{49}$	$\frac{40}{49}$	$7\frac{13}{21}$
$-3\frac{1}{2}$	$-4\frac{29}{49}$	$\frac{40}{49}$	$\frac{40}{49}$	$5\frac{5}{21}$
-3	$-4\frac{4}{49}$	$1\frac{11}{49}$	$\frac{40}{49}$	$3\frac{3}{49}$
$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{18}{49}$	$1\frac{31}{49}$	$\frac{40}{49}$	$1\frac{4}{21}$
-2	$-2\frac{22}{49}$	$2\frac{2}{49}$	$\frac{40}{49}$	-0,272
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{16}{49}$	$2\frac{22}{49}$	$\frac{40}{49}$	$-1\frac{11}{49}$
-1	0	$2\frac{6}{7}$	$\frac{40}{49}$	-1,565
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{26}{49}$	$3\frac{13}{49}$	$\frac{40}{49}$	$-1\frac{4}{21}$
0	$3\frac{13}{49}$	$3\frac{33}{49}$	$\frac{40}{49}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$3\frac{13}{49}$	$3\frac{33}{49}$	$\frac{40}{49}$	0
$\frac{1}{2}$	$5\frac{10}{49}$	$4\frac{4}{49}$	$\frac{40}{49}$	2,109
1	$7\frac{17}{49}$	$4\frac{24}{49}$	$\frac{40}{49}$	$5\frac{5}{21}$
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{34}{49}$	$4\frac{44}{49}$	$\frac{40}{49}$	$9\frac{24}{49}$
2	$12\frac{12}{49}$	$5\frac{13}{49}$	$\frac{40}{49}$	14,966
$2\frac{1}{2}$	15	$5\frac{2}{7}$	$\frac{40}{49}$	21,769
3	$17\frac{47}{49}$	$6\frac{6}{49}$	$\frac{40}{49}$	30
$3\frac{1}{2}$	$21\frac{6}{49}$	$6\frac{26}{49}$	$\frac{40}{49}$	$39\frac{16}{21}$
4	$24\frac{24}{49}$	$6\frac{46}{49}$	$\frac{40}{49}$	51,156
$4\frac{1}{2}$	$28\frac{3}{49}$	$7\frac{17}{49}$	$\frac{40}{49}$	$64\frac{2}{7}$
5	$31\frac{41}{49}$	$7\frac{37}{49}$	$\frac{40}{49}$	79,252
$5\frac{1}{2}$	$35\frac{40}{49}$	$8\frac{8}{49}$	$\frac{40}{49}$	96,156
6	40	$8\frac{4}{7}$	$\frac{40}{49}$	$115\frac{5}{49}$
$6\frac{1}{2}$	$44\frac{19}{49}$	$8\frac{48}{49}$	$\frac{40}{49}$	$136\frac{4}{21}$
7	$48\frac{48}{49}$	$9\frac{19}{49}$	$\frac{40}{49}$	$159\frac{11}{21}$

• Zeichnung



Aufgabe (28)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9} = -\frac{4}{9}(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = -\frac{8}{9}x + \frac{4}{9}$$

$$f''(x) = -\frac{8}{9}$$

$$F(x) = \int(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9})dx = -\frac{4}{27}x^3 + \frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 1[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{4}{9} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{4}{9} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{4}{9} \cdot (-x)^2 + \frac{4}{9} \cdot (-x) + \frac{8}{9}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9} = 0$$

$$-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{4}{9} \pm \sqrt{\frac{4^2}{9^2} - 4 \cdot (-\frac{4}{9}) \cdot \frac{8}{9}}}{2 \cdot (-\frac{4}{9})}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{4}{9} \pm \sqrt{1\frac{7}{9}}}{-\frac{8}{9}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{4}{9} \pm 1\frac{1}{3}}{-\frac{8}{9}}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{4}{9} + 1\frac{1}{3}}{-\frac{8}{9}} \quad x_2 = \frac{-\frac{4}{9} - 1\frac{1}{3}}{-\frac{8}{9}}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

$$x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 2$	2	$x > 2$
$f(x)$	-	0	+	0	-

$x \in]-1; 2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -1[\cup]2; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{8}{9}x + \frac{4}{9} = 0$$

$$-\frac{8}{9}x + \frac{4}{9} = 0 \quad / -\frac{4}{9}$$

$$-\frac{8}{9}x = -\frac{4}{9} \quad / : \left(-\frac{8}{9}\right)$$

$$x = \frac{-\frac{4}{9}}{-\frac{8}{9}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } \left(\frac{1}{2} / 1\right)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$> x$
$f'(x)$	+	0	-

$$x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

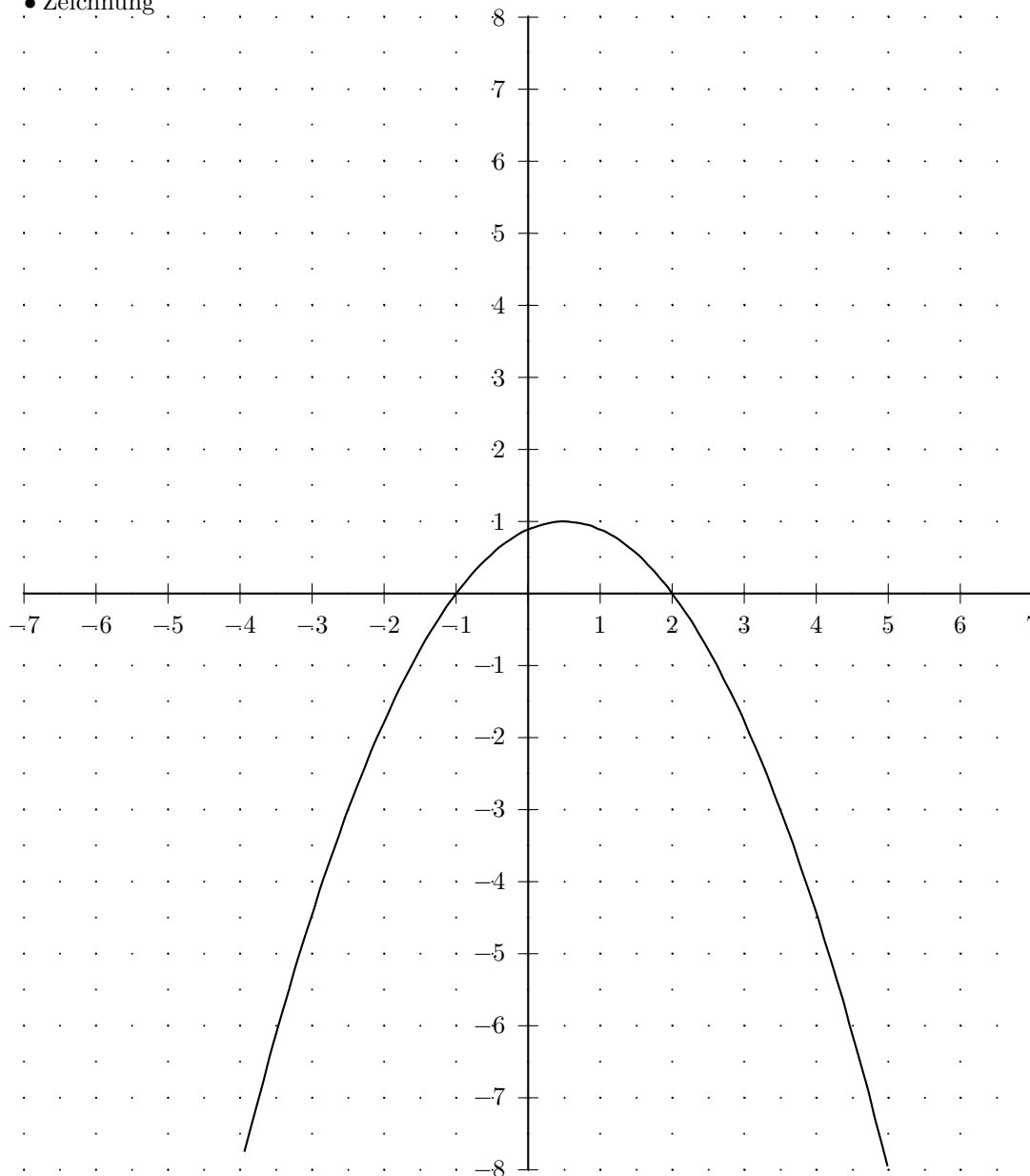
$$x \in]\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-24	$6\frac{2}{3}$	-8	$55\frac{13}{27}$
$-6\frac{1}{2}$	$-20\frac{7}{9}$	$6\frac{2}{9}$	-8	$44\frac{8}{27}$
-6	$-17\frac{7}{9}$	$5\frac{7}{9}$	-8	$34\frac{2}{3}$
$-5\frac{1}{2}$	-15	$5\frac{1}{3}$	-8	$26\frac{13}{27}$
-5	$-12\frac{4}{9}$	4	-8	$19\frac{17}{27}$
$-4\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{9}$	$4\frac{1}{3}$	-8	14
-4	-8	4	-8	$9\frac{13}{27}$
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{9}$	$3\frac{2}{3}$	-8	$5\frac{26}{27}$
-3	$-4\frac{1}{9}$	$3\frac{1}{3}$	-8	$3\frac{1}{3}$
$-2\frac{1}{2}$	-3	$2\frac{2}{3}$	-8	$1\frac{13}{27}$
-2	$-1\frac{7}{9}$	$2\frac{2}{9}$	-8	$\frac{8}{27}$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{9}$	$1\frac{7}{9}$	-8	$-\frac{1}{3}$
-1	0	$1\frac{1}{3}$	-8	$-\frac{14}{27}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	-8	$-\frac{10}{27}$
0	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{9}$	-8	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{9}$	-8	0
$\frac{1}{2}$	1	0	-8	$\frac{13}{27}$
1	$\frac{8}{9}$	$-\frac{4}{9}$	-8	$\frac{26}{27}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{8}{9}$	-8	$1\frac{1}{3}$
2	0	$-1\frac{1}{3}$	-8	$1\frac{13}{27}$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{9}$	$-1\frac{7}{9}$	-8	$1\frac{8}{27}$
3	$-1\frac{7}{9}$	$-2\frac{2}{9}$	-8	$\frac{2}{3}$
$3\frac{1}{2}$	-3	$-2\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{14}{27}$
4	$-4\frac{1}{9}$	$-3\frac{1}{9}$	-8	$-2\frac{10}{27}$
$4\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{9}$	$-3\frac{2}{9}$	-8	-5
5	-8	-4	-8	$-8\frac{14}{27}$
$5\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	-8	$-13\frac{1}{27}$
6	$-12\frac{4}{9}$	$-4\frac{8}{9}$	-8	$-18\frac{2}{3}$
$6\frac{1}{2}$	-15	$-5\frac{1}{3}$	-8	$-25\frac{14}{27}$
7	$-17\frac{7}{9}$	$-5\frac{7}{9}$	-8	$-33\frac{19}{27}$

• Zeichnung



Aufgabe (29)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -2\frac{2}{9}x^2 - 2\frac{2}{9}x + 4\frac{4}{9} = -2\frac{2}{9}(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = -4\frac{4}{9}x - 2\frac{2}{9}$$

$$f''(x) = -4\frac{4}{9}$$

$$F(x) = \int (-2\frac{2}{9}x^2 - 2\frac{2}{9}x + 4\frac{4}{9})dx = -\frac{20}{27}x^3 - 1\frac{1}{9}x^2 + 4\frac{4}{9}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 5[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-2\frac{2}{9} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-2\frac{2}{9} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -2\frac{2}{9} \cdot (-x)^2 - 2\frac{2}{9} \cdot (-x) + 4\frac{4}{9}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -2\frac{2}{9}x^2 - 2\frac{2}{9}x + 4\frac{4}{9} = 0$$

$$-2\frac{2}{9}x^2 - 2\frac{2}{9}x + 4\frac{4}{9} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+2\frac{2}{9} \pm \sqrt{(-2\frac{2}{9})^2 - 4 \cdot (-2\frac{2}{9}) \cdot 4\frac{4}{9}}}{2 \cdot (-2\frac{2}{9})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2\frac{2}{9} \pm \sqrt{44\frac{4}{9}}}{-4\frac{4}{9}}$$

$$x_{1/2} = \frac{2\frac{2}{9} \pm 6\frac{2}{3}}{-4\frac{4}{9}}$$

$$x_1 = \frac{2\frac{2}{9} + 6\frac{2}{3}}{-4\frac{4}{9}} \quad x_2 = \frac{2\frac{2}{9} - 6\frac{2}{3}}{-4\frac{4}{9}}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 1$$

$$x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$x > 1$
$f(x)$	-	0	+	0	-

$x \in]-2; 1[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -2[\cup]1; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -4\frac{4}{9}x - 2\frac{2}{9} = 0$$

$$-4\frac{4}{9}x - 2\frac{2}{9} = 0 \quad / + 2\frac{2}{9}$$

$$-4\frac{4}{9}x = 2\frac{2}{9} \quad / : \left(-4\frac{4}{9}\right)$$

$$x = \frac{2\frac{2}{9}}{-4\frac{4}{9}}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -4\frac{4}{9}$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } \underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}/5\right)}}$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-

$$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

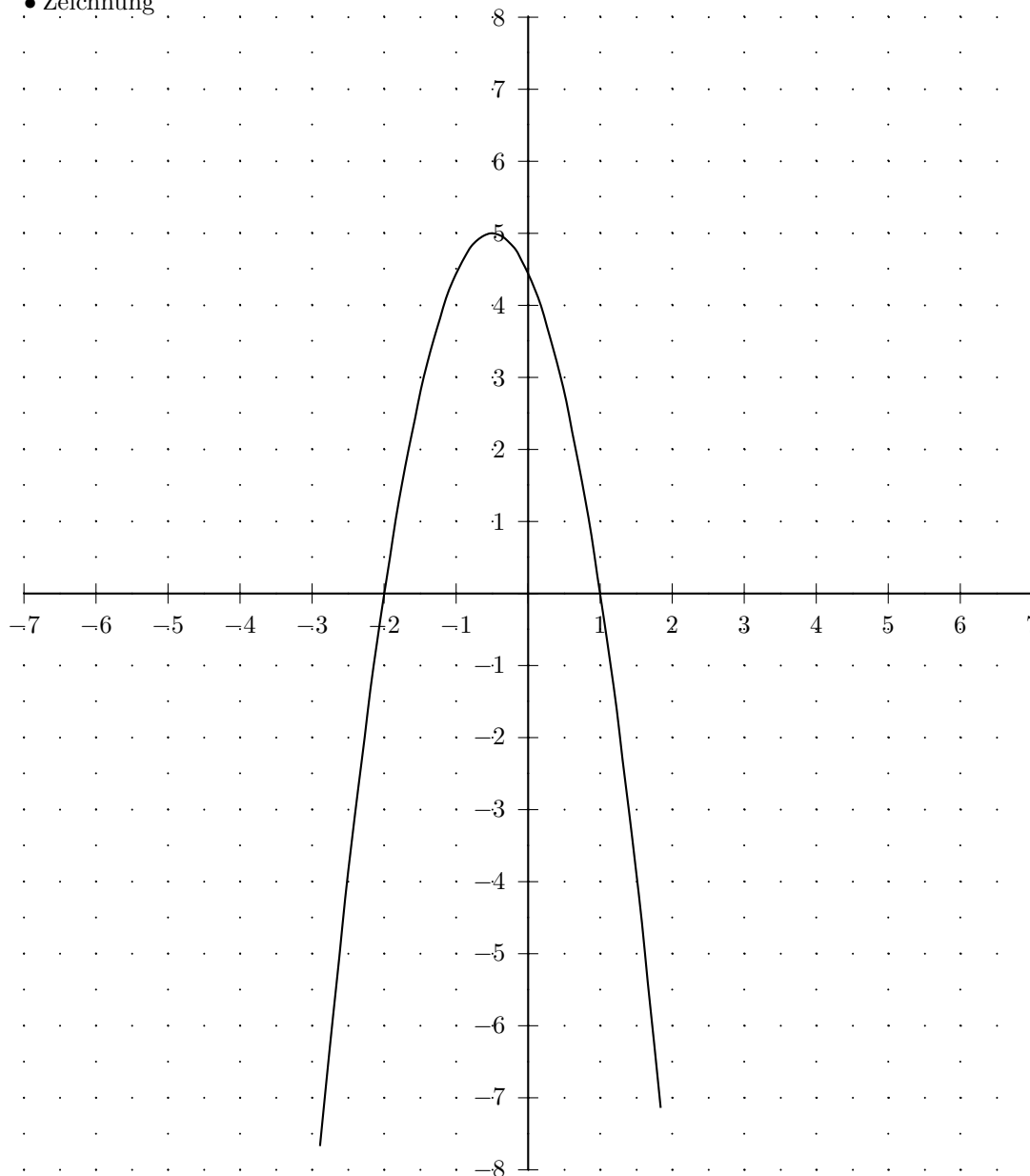
$$x \in]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-88\frac{8}{9}$	$28\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$168\frac{14}{27}$
$-6\frac{1}{2}$	-75	$26\frac{2}{3}$	$-4\frac{4}{9}$	$127\frac{16}{27}$
-6	$-62\frac{2}{9}$	$24\frac{4}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$93\frac{1}{3}$
$-5\frac{1}{2}$	$-50\frac{5}{9}$	$22\frac{2}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$65\frac{5}{27}$
-5	-40	20	$-4\frac{4}{9}$	$42\frac{16}{27}$
$-4\frac{1}{2}$	$-30\frac{5}{9}$	$17\frac{7}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	25
-4	$-22\frac{2}{9}$	$15\frac{5}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$11\frac{23}{27}$
$-3\frac{1}{2}$	-15	$13\frac{1}{3}$	$-4\frac{4}{9}$	$2\frac{16}{27}$
-3	$-8\frac{8}{9}$	$11\frac{1}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-3\frac{1}{3}$
$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{8}{9}$	$8\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-6\frac{13}{27}$
-2	0	$6\frac{2}{3}$	$-4\frac{4}{9}$	$-7\frac{11}{27}$
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{9}$	$4\frac{4}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-6\frac{2}{3}$
-1	$4\frac{4}{9}$	$2\frac{2}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-4\frac{22}{27}$
$-\frac{1}{2}$	5	0	$-4\frac{4}{9}$	$-2\frac{11}{27}$
0	$4\frac{4}{9}$	$-2\frac{2}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$4\frac{4}{9}$	$-2\frac{2}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	0
$\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$1\frac{23}{27}$
1	0	$-6\frac{2}{3}$	$-4\frac{4}{9}$	$2\frac{16}{27}$
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{8}{9}$	$-8\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$1\frac{2}{3}$
2	$-8\frac{8}{9}$	$-11\frac{1}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-1\frac{13}{27}$
$2\frac{1}{2}$	-15	$-13\frac{1}{3}$	$-4\frac{4}{9}$	$-7\frac{11}{27}$
3	$-22\frac{2}{9}$	$-15\frac{5}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-16\frac{5}{3}$
$3\frac{1}{2}$	$-30\frac{5}{9}$	$-17\frac{7}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-29\frac{22}{27}$
4	-40	-20	$-4\frac{4}{9}$	$-47\frac{11}{27}$
$4\frac{1}{2}$	$-50\frac{5}{9}$	$-22\frac{2}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	-70
5	$-62\frac{2}{9}$	$-24\frac{4}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-98\frac{4}{27}$
$5\frac{1}{2}$	-75	$-26\frac{2}{3}$	$-4\frac{4}{9}$	$-132\frac{11}{27}$
6	$-88\frac{8}{9}$	$-28\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-173\frac{1}{3}$
$6\frac{1}{2}$	$-103\frac{8}{9}$	$-31\frac{1}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-221\frac{13}{27}$
7	-120	$-33\frac{1}{3}$	$-4\frac{4}{9}$	$-277\frac{11}{27}$

• Zeichnung



Aufgabe (30)

- Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{7}{9}x^2 + 4\frac{2}{3}x = -\frac{7}{9}x(x - 6)$$

$$f'(x) = -1\frac{5}{9}x + 4\frac{2}{3}$$

$$f''(x) = -1\frac{5}{9}$$

$$F(x) = \int(-\frac{7}{9}x^2 + 4\frac{2}{3}x)dx = -\frac{7}{27}x^3 + 2\frac{1}{3}x^2 + c$$

- Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 7[$

- Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{7}{9} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{7}{9} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

- Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{7}{9} \cdot (-x)^2 + 4\frac{2}{3} \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

- Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{7}{9}x^2 + 4\frac{2}{3}x = 0$$

$$x(-\frac{7}{9}x + 4\frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{7}{9}x + 4\frac{2}{3} = 0$$

$$-\frac{7}{9}x + 4\frac{2}{3} = 0 \quad / -4\frac{2}{3}$$

$$-\frac{7}{9}x = -4\frac{2}{3} \quad / : (-\frac{7}{9})$$

$$x = \frac{-4\frac{2}{3}}{-\frac{7}{9}}$$

$$x = 6$$

$$x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 6; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

- Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	0	$< x < 6$	6	$< x$
$f(x)$	-	0	+	0	-

$x \in]0; 6[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - \infty; 0[\cup]6; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

- Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -1\frac{5}{9}x + 4\frac{2}{3} = 0$$

$$-1\frac{5}{9}x + 4\frac{2}{3} = 0 \quad / -4\frac{2}{3}$$

$$-1\frac{5}{9}x = -4\frac{2}{3} \quad / : (-1\frac{5}{9})$$

$$x = \frac{-4\frac{2}{3}}{-1\frac{5}{9}}$$

$$x = 3$$

$$x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(3) = -1\frac{5}{9}$$

$$f''(3) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (3/7)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 3$	3	$< x$
$f'(x)$	+	0	-

$x \in] - \infty; 3[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

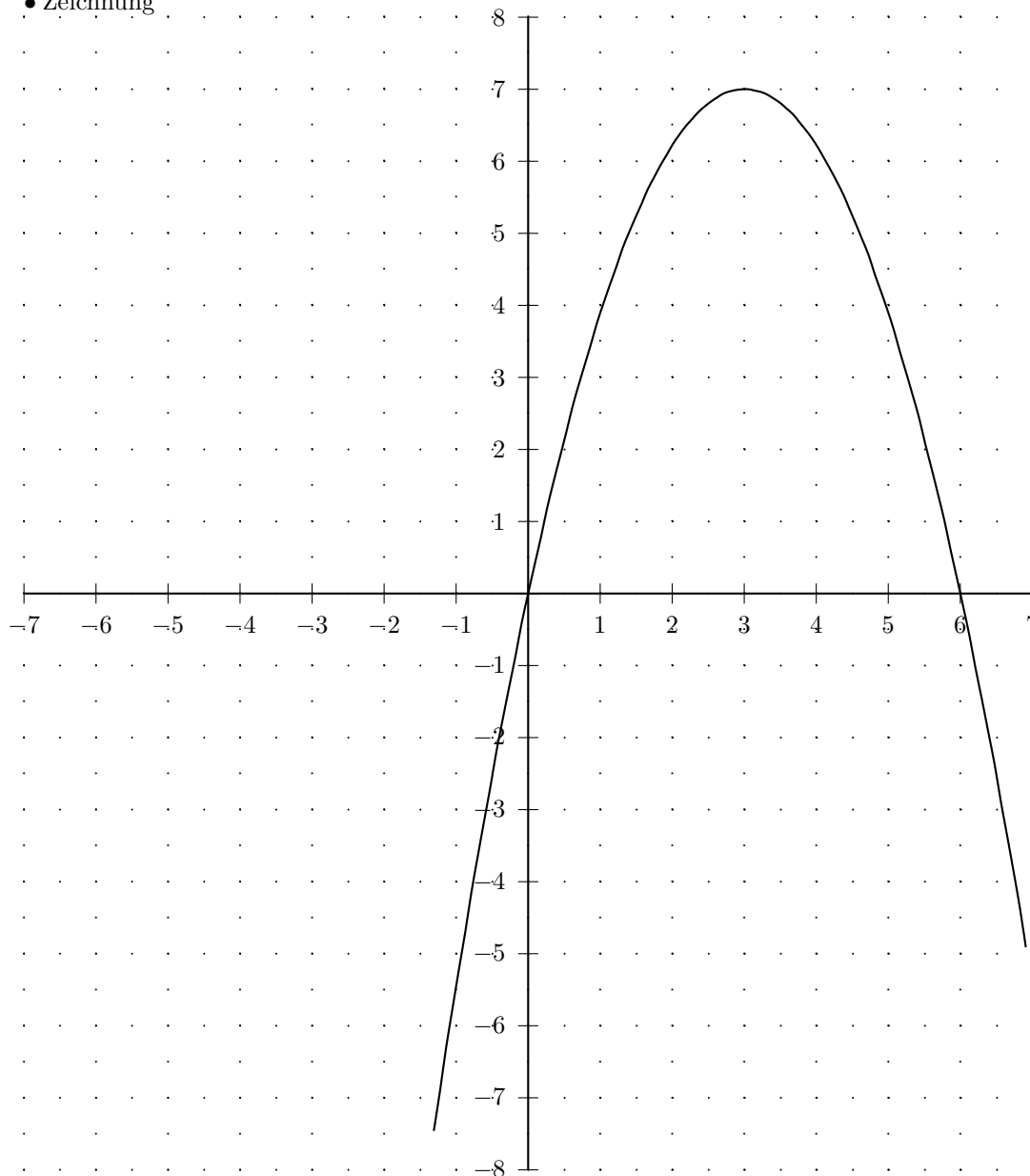
$x \in]3; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-70\frac{7}{9}$	$15\frac{5}{9}$	-1	$203\frac{7}{27}$
$-6\frac{1}{2}$	$-63\frac{7}{36}$	$14\frac{7}{9}$	-1	169,782
-6	-56	14	-1	140
$-5\frac{1}{2}$	$-49\frac{7}{36}$	$13\frac{2}{9}$	-1	113,718
-5	$-42\frac{7}{9}$	$12\frac{4}{9}$	-1	$90\frac{20}{27}$
$-4\frac{1}{2}$	$-36\frac{2}{4}$	$11\frac{2}{3}$	-1	$70\frac{7}{8}$
-4	$-31\frac{1}{9}$	$10\frac{5}{9}$	-1	$53\frac{25}{27}$
$-3\frac{1}{2}$	$-25\frac{31}{36}$	$10\frac{1}{9}$	-1	39,699
-3	-21	$9\frac{1}{3}$	-1	28
$-2\frac{1}{2}$	$-16\frac{19}{36}$	$8\frac{2}{9}$	-1	18,634
-2	$-12\frac{1}{9}$	$7\frac{7}{9}$	-1	$11\frac{11}{27}$
$-1\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	7	-1	$6\frac{1}{8}$
-1	$-5\frac{4}{9}$	$6\frac{2}{9}$	-1	$2\frac{16}{27}$
$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{19}{36}$	$5\frac{4}{9}$	-1	0,616
0	0	$4\frac{2}{3}$	-1	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	$4\frac{2}{3}$	-1	0
$\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{36}$	$3\frac{8}{9}$	-1	0,551
1	$3\frac{8}{9}$	$3\frac{1}{9}$	-1	$2\frac{2}{27}$
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	-1	$4\frac{3}{8}$
2	$6\frac{2}{9}$	$1\frac{7}{9}$	-1	$7\frac{7}{27}$
$2\frac{1}{2}$	$6\frac{29}{36}$	$\frac{7}{9}$	-1	10,532
3	7	0	-1	14
$3\frac{1}{2}$	$6\frac{29}{36}$	$-\frac{7}{9}$	-1	17,468
4	$6\frac{2}{9}$	$-1\frac{2}{9}$	-1	$20\frac{20}{27}$
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{3}$	-1	$23\frac{5}{8}$
5	$3\frac{8}{9}$	$-3\frac{1}{9}$	-1	$25\frac{25}{27}$
$5\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{36}$	$-3\frac{2}{9}$	-1	27,449
6	0	$-4\frac{2}{3}$	-1	28
$6\frac{1}{2}$	$-2\frac{19}{36}$	$-5\frac{4}{9}$	-1	27,384
7	$-5\frac{4}{9}$	$-6\frac{2}{9}$	-1	$25\frac{11}{27}$

• Zeichnung



Aufgabe (31)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{3}{49}x^2 - \frac{6}{49}x - 2\frac{46}{49} = \frac{3}{49}(x+6)(x-8)$$

$$f'(x) = \frac{6}{49}x - \frac{6}{49}$$

$$f''(x) = \frac{6}{49}$$

$$F(x) = \int (\frac{3}{49}x^2 - \frac{6}{49}x - 2\frac{46}{49})dx = \frac{1}{49}x^3 - \frac{3}{49}x^2 - 2\frac{46}{49}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-3), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{3}{49} \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{3}{49} \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{3}{49} \cdot (-x)^2 - \frac{6}{49} \cdot (-x) - 2\frac{46}{49}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{3}{49}x^2 - \frac{6}{49}x - 2\frac{46}{49} = 0$$

$$\frac{3}{49}x^2 - \frac{6}{49}x - 2\frac{46}{49} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{6}{49} \pm \sqrt{(-\frac{6}{49})^2 - 4 \cdot \frac{3}{49} \cdot (-2\frac{46}{49})}}{2 \cdot \frac{3}{49}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{6}{49} \pm \sqrt{\frac{36}{49}}}{\frac{6}{49}}$$

$$x_{1/2} = \frac{\frac{6}{49} \pm \frac{6}{7}}{\frac{6}{49}}$$

$$x_1 = \frac{\frac{6}{49} + \frac{6}{7}}{\frac{6}{49}} \quad x_2 = \frac{\frac{6}{49} - \frac{6}{7}}{\frac{6}{49}}$$

$$x_1 = 8 \quad x_2 = -6$$

$$x_1 = -6; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 8; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-6	$< x <$	8	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -6[\cup]8; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-6; 8[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{6}{49}x - \frac{6}{49} = 0$$

$$\frac{6}{49}x - \frac{6}{49} = 0 \quad / + \frac{6}{49}$$

$$\frac{6}{49}x = \frac{6}{49} \quad / : \frac{6}{49}$$

$$x = \frac{\frac{6}{49}}{\frac{6}{49}}$$

$$x = 1$$

$$x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(1) = \frac{6}{49} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(1/ - 3)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 1$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

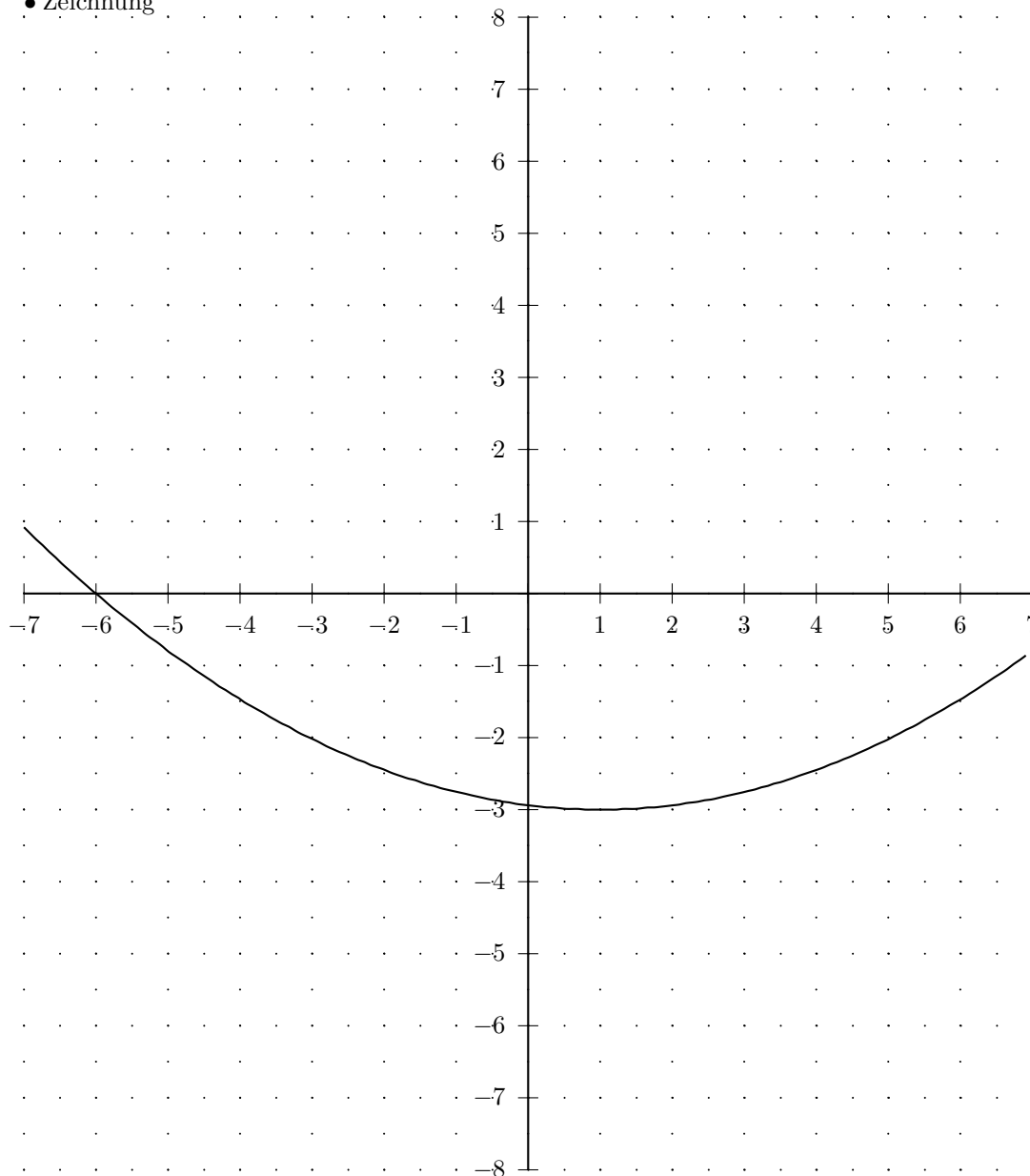
$x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$\frac{45}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$\frac{6}{49}$	$10\frac{4}{7}$
$-6\frac{1}{2}$	0,444	$-\frac{45}{49}$	$\frac{6}{49}$	$10\frac{51}{56}$
-6	0	$-\frac{6}{7}$	$\frac{6}{49}$	$11\frac{1}{49}$
$-5\frac{1}{2}$	-0,413	$-\frac{39}{49}$	$\frac{6}{49}$	10,916
-5	$-\frac{39}{49}$	$-\frac{36}{49}$	$\frac{6}{49}$	$10\frac{30}{49}$
$-4\frac{1}{2}$	-1,148	$-\frac{33}{49}$	$\frac{6}{49}$	$10\frac{1}{8}$
-4	$-\frac{23}{49}$	$-\frac{30}{49}$	$\frac{6}{49}$	$9\frac{23}{49}$
$-3\frac{1}{2}$	-1,76	$-\frac{27}{49}$	$\frac{6}{49}$	$8\frac{37}{56}$
-3	$-\frac{21}{49}$	$-\frac{24}{49}$	$\frac{6}{49}$	$7\frac{5}{7}$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{21}{49}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{6}{49}$	6,645
-2	$-\frac{22}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{6}{49}$	$5\frac{23}{49}$
$-1\frac{1}{2}$	-2,617	$-\frac{15}{49}$	$\frac{6}{49}$	4,202
-1	$-\frac{237}{49}$	$-\frac{12}{49}$	$\frac{6}{49}$	$2\frac{6}{7}$
$-\frac{1}{2}$	-2,862	$-\frac{9}{49}$	$\frac{6}{49}$	1,452
0	$-\frac{246}{49}$	$-\frac{6}{49}$	$\frac{6}{49}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$-\frac{246}{49}$	$-\frac{6}{49}$	$\frac{6}{49}$	0
$\frac{1}{2}$	-2,985	$-\frac{3}{49}$	$\frac{6}{49}$	$-1\frac{27}{56}$
1	-3	0	$\frac{6}{49}$	$-2\frac{48}{49}$
$1\frac{1}{2}$	-2,985	$\frac{3}{49}$	$\frac{6}{49}$	-4,477
2	$-\frac{246}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{6}{49}$	$-5\frac{47}{49}$
$2\frac{1}{2}$	-2,862	$\frac{9}{49}$	$\frac{6}{49}$	$-7\frac{23}{56}$
3	$-\frac{237}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{6}{49}$	$-8\frac{40}{49}$
$3\frac{1}{2}$	-2,617	$\frac{15}{49}$	$\frac{6}{49}$	$-10\frac{9}{56}$
4	$-\frac{222}{49}$	$\frac{18}{49}$	$\frac{6}{49}$	$-11\frac{3}{7}$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{21}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{49}$	-12,605
5	$-\frac{21}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{6}{49}$	$-13\frac{33}{49}$
$5\frac{1}{2}$	-1,76	$\frac{27}{49}$	$\frac{6}{49}$	-14,62
6	$-\frac{123}{49}$	$\frac{30}{49}$	$\frac{6}{49}$	$-15\frac{3}{7}$
$6\frac{1}{2}$	-1,148	$\frac{33}{49}$	$\frac{6}{49}$	-16,084
7	$-\frac{39}{49}$	$\frac{36}{49}$	$\frac{6}{49}$	$-16\frac{4}{7}$

• Zeichnung



Aufgabe (32)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 3\frac{1}{3}x = \frac{5}{9}x(x - 6)$$

$$f'(x) = 1\frac{1}{9}x - 3\frac{1}{3}$$

$$f''(x) = 1\frac{1}{9}$$

$$F(x) = \int (\frac{5}{9}x^2 - 3\frac{1}{3}x) dx = \frac{5}{27}x^3 - 1\frac{2}{3}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-5), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{5}{9} \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{5}{9} \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{5}{9} \cdot (-x)^2 - 3\frac{1}{3} \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 3\frac{1}{3}x = 0$$

$$x(\frac{5}{9}x - 3\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{5}{9}x - 3\frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{5}{9}x - 3\frac{1}{3} = 0 \quad / + 3\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{9}x = 3\frac{1}{3} \quad / : \frac{5}{9}$$

$$x = \frac{3\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}$$

$$x = 6$$

$$x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 6; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 6$	$x > 6$
$f(x)$	+	-	+

$x \in]-\infty; 0[\cup]6; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]0; 6[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 1\frac{1}{9}x - 3\frac{1}{3} = 0$$

$$1\frac{1}{9}x - 3\frac{1}{3} = 0 \quad / + 3\frac{1}{3}$$

$$1\frac{1}{9}x = 3\frac{1}{3} \quad / : 1\frac{1}{9}$$

$$x = \frac{3\frac{1}{3}}{1\frac{1}{9}}$$

$$x = 3$$

$$x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(3) = 1\frac{1}{9} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (3 | -5)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 3$	$x > 3$
$f'(x)$	-	+

$x \in]3; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

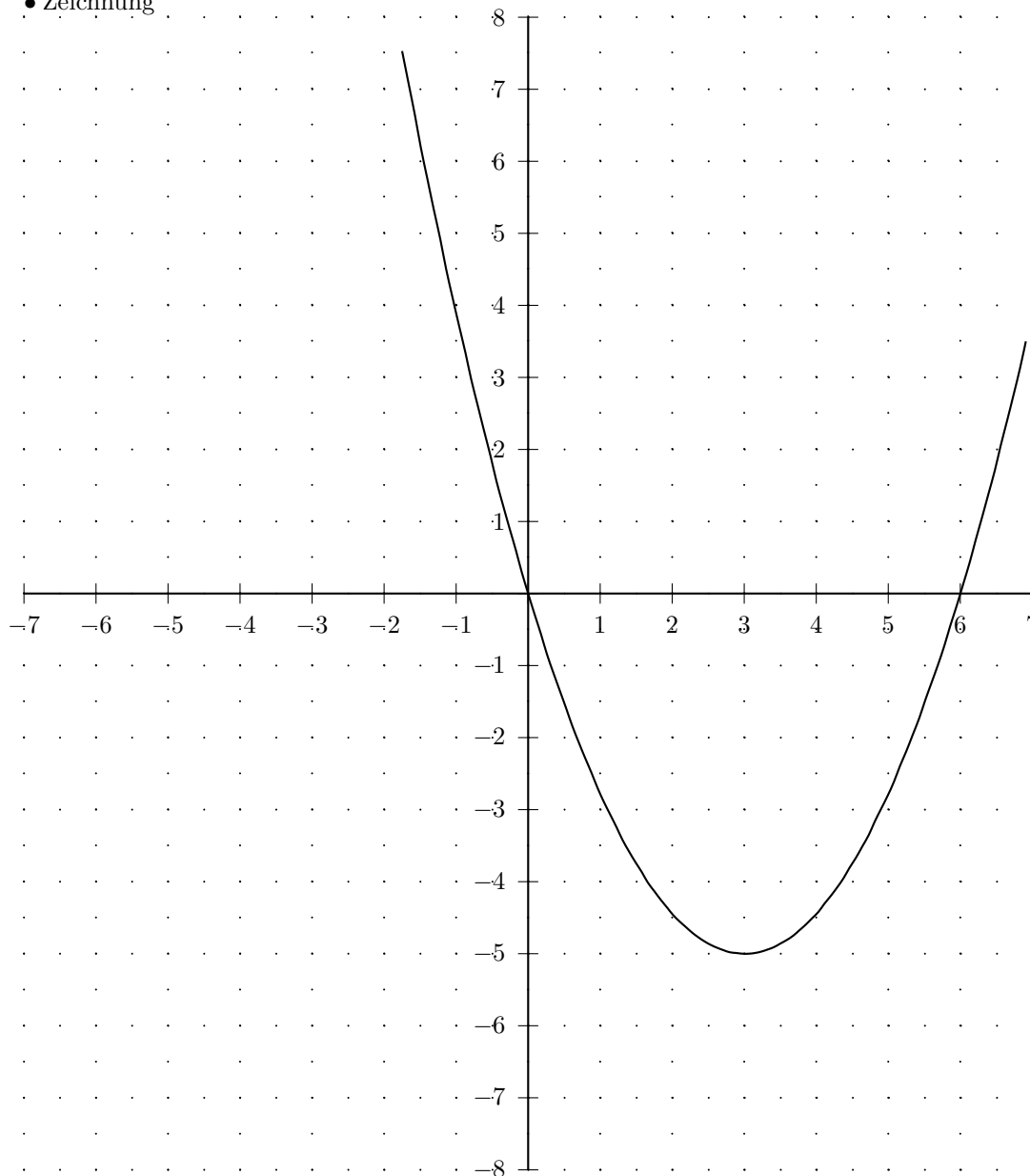
$x \in]-\infty; 3[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$50\frac{5}{9}$	$-11\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-145\frac{5}{27}$
$-6\frac{1}{2}$	$45\frac{5}{36}$	$-10\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-121,273$
-6	40	-10	$1\frac{1}{9}$	-100
$-5\frac{1}{2}$	$35\frac{5}{36}$	$-9\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-81,227$
-5	$30\frac{5}{9}$	$-8\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-64\frac{22}{27}$
$-4\frac{1}{2}$	$26\frac{1}{4}$	$-8\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$	$-50\frac{5}{8}$
-4	$22\frac{2}{9}$	$-7\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-38\frac{14}{27}$
$-3\frac{1}{2}$	$18\frac{17}{36}$	$-7\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-28,356$
-3	15	$-6\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{9}$	-20
$-2\frac{1}{2}$	$11\frac{29}{36}$	$-6\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-13,31$
-2	$8\frac{8}{9}$	$-5\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-8\frac{4}{27}$
$-1\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	-5	$1\frac{1}{9}$	$-4\frac{3}{8}$
-1	$3\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-1\frac{23}{27}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{36}$	$-3\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{9}$	-0,44
0	0	$-3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	$-3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$	0
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{19}{36}$	$-2\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$	-0,394
1	$-2\frac{7}{9}$	$-2\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-1\frac{13}{27}$
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{9}$	$-3\frac{1}{8}$
2	$-4\frac{1}{9}$	$-1\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-5\frac{5}{27}$
$2\frac{1}{2}$	$-4\frac{31}{36}$	$-\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-7,523$
3	-5	0	$1\frac{1}{9}$	-10
$3\frac{1}{2}$	$-4\frac{31}{36}$	$\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-12,477$
4	$-4\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-14\frac{22}{27}$
$4\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{9}$	$-16\frac{7}{8}$
5	$-2\frac{7}{9}$	$2\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-18\frac{14}{27}$
$5\frac{1}{2}$	$-1\frac{19}{36}$	$2\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$	-19,606
6	0	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$	-20
$6\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{36}$	$3\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{9}$	-19,56
7	$3\frac{8}{9}$	$4\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$-18\frac{4}{27}$

• Zeichnung



Aufgabe (33)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 - 10x - 15 = -1\frac{1}{4}(x+6)(x+2)$$

$$f'(x) = -2\frac{1}{2}x - 10$$

$$f''(x) = -2\frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int (-1\frac{1}{4}x^2 - 10x - 15)dx = -\frac{5}{12}x^3 - 5x^2 - 15x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 5[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -1\frac{1}{4} \cdot (-x)^2 - 10 \cdot (-x) - 15$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 - 10x - 15 = 0$$

$$-1\frac{1}{4}x^2 - 10x - 15 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-1\frac{1}{4}) \cdot (-15)}}{2 \cdot (-1\frac{1}{4})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{25}}{-2\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm 5}{-2\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = \frac{10 + 5}{-2\frac{1}{2}} \quad x_2 = \frac{10 - 5}{-2\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = -6 \quad x_2 = -2$$

$$x_1 = -6; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-6	$< x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in] - 6; -2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - \infty; -6[\cup] - 2; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -2\frac{1}{2}x - 10 = 0$$

$$-2\frac{1}{2}x - 10 = 0 \quad / + 10$$

$$-2\frac{1}{2}x = 10 \quad / : \left(-2\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{10}{-2\frac{1}{2}}$$

$$x = -4$$

$$x_3 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-4) = -2\frac{1}{2}$$

$$f''(-4) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-4/5)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-4	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -4[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

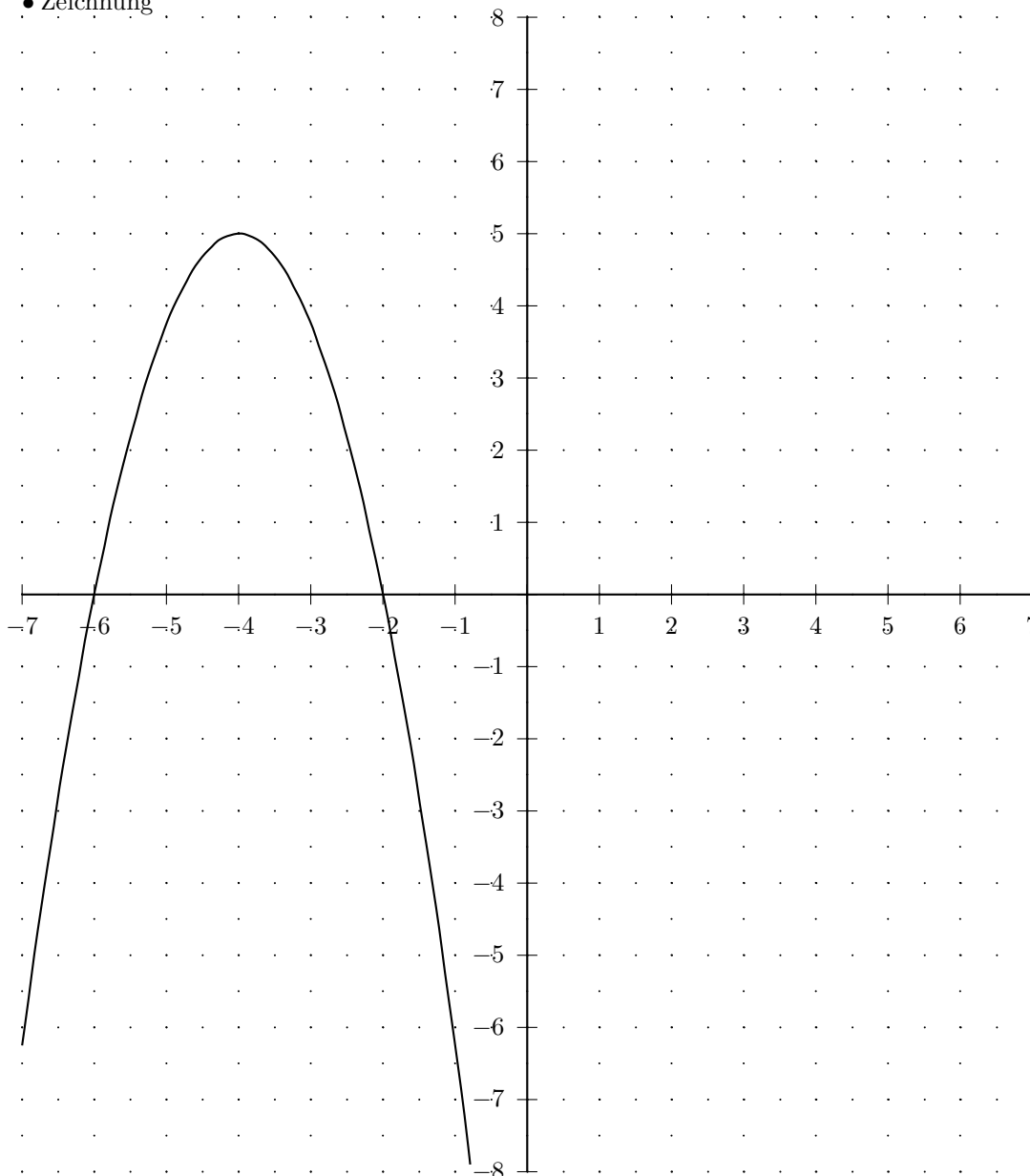
$x \in]-4; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-6\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{12}$
$-6\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{16}$	$6\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{65}{96}$
-6	0	5	$-2\frac{1}{2}$	0
$-5\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{16}$	$3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{55}{96}$
-5	$3\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{12}$
$-4\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	$1\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{32}$
-4	5	0	$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	$-1\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$9\frac{11}{96}$
-3	$3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{16}$	$-3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$12\frac{73}{96}$
-2	0	-5	$-2\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{16}$	$-6\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$12\frac{21}{32}$
-1	$-6\frac{1}{4}$	$-7\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$10\frac{5}{12}$
$-\frac{1}{2}$	$-10\frac{5}{16}$	$-8\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{29}{96}$
0	-15	-10	$-2\frac{1}{2}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-15	-10	$-2\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$-20\frac{5}{16}$	$-11\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-8\frac{77}{96}$
1	$-26\frac{1}{4}$	$-12\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-20\frac{5}{12}$
$1\frac{1}{2}$	$-32\frac{13}{16}$	$-13\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-35\frac{5}{32}$
2	-40	-15	$-2\frac{1}{2}$	$-53\frac{1}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$-47\frac{13}{16}$	$-16\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-75\frac{25}{96}$
3	$-56\frac{1}{4}$	$-17\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-101\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$-65\frac{5}{16}$	$-18\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-131\frac{59}{96}$
4	-75	-20	$-2\frac{1}{2}$	$-166\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$-85\frac{5}{16}$	$-21\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-206\frac{23}{32}$
5	$-96\frac{1}{4}$	$-22\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-252\frac{1}{12}$
$5\frac{1}{2}$	$-107\frac{13}{16}$	$-23\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-303\frac{7}{96}$
6	-120	-25	$-2\frac{1}{2}$	-360
$6\frac{1}{2}$	$-132\frac{13}{16}$	$-26\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-423\frac{17}{96}$
7	$-146\frac{1}{4}$	$-27\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-492\frac{11}{12}$

• Zeichnung



Aufgabe (34)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 4x^2 - 8x = 4x(x - 2)$$

$$f'(x) = 8x - 8$$

$$f''(x) = 8$$

$$F(x) = \int (4x^2 - 8x) dx = 1\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-4), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [4 \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [4 \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 4 \cdot (-x)^2 - 8 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 4x^2 - 8x = 0$$

$$x(4x - 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x - 8 = 0$$

$$4x - 8 = 0 \quad / + 8$$

$$4x = 8 \quad / : 4$$

$$x = \frac{8}{4}$$

$$x = 2$$

$$x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$< x$
$f(x)$	+	-	+

$x \in]-\infty; 0[\cup]2; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]0; 2[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 8x - 8 = 0$$

$$8x - 8 = 0 \quad / + 8$$

$$8x = 8 \quad / : 8$$

$$x = \frac{8}{8}$$

$$x = 1$$

$$x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (1/ - 4)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 1$	$< x$
$f'(x)$	-	+

$x \in]1; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

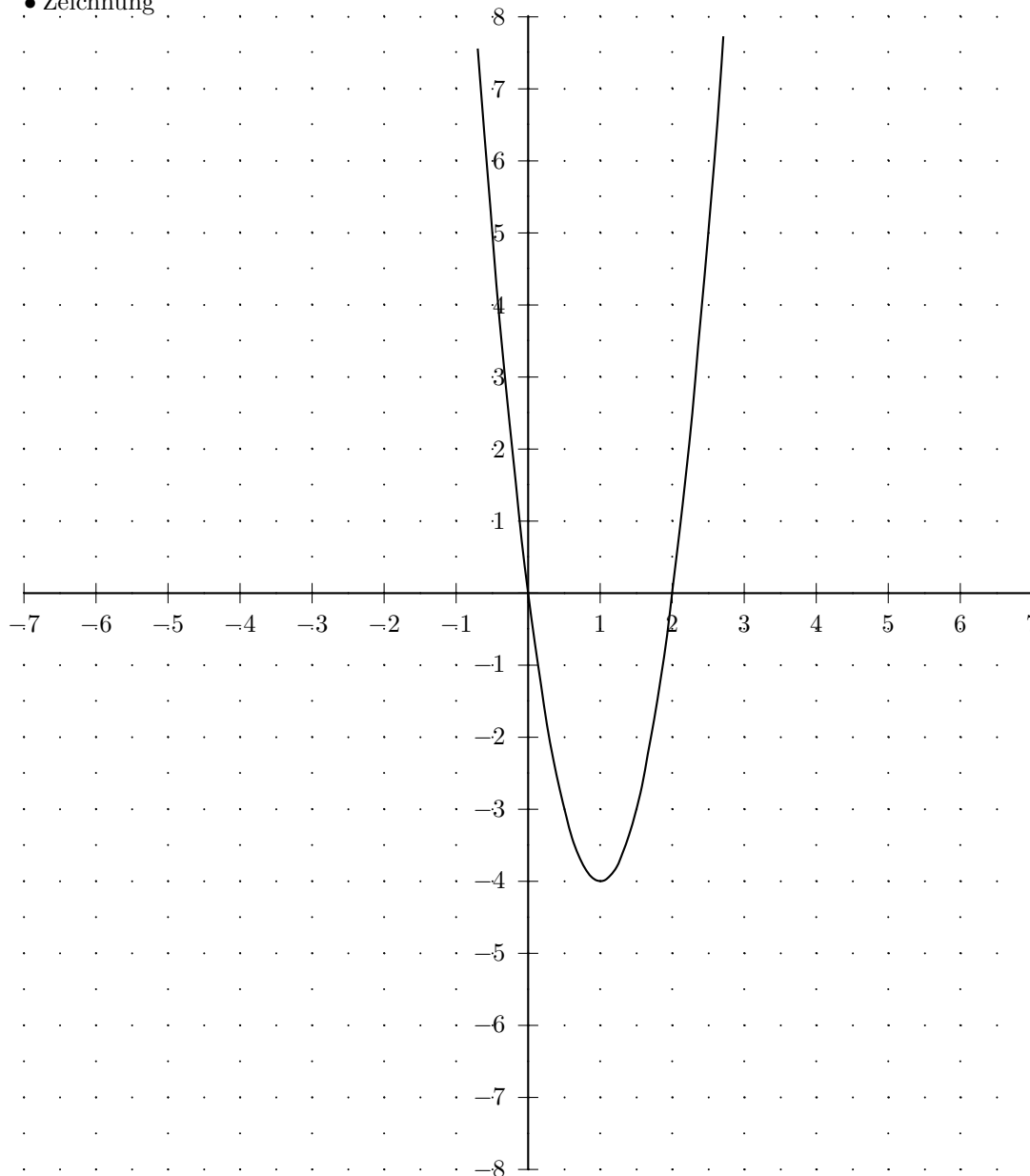
$x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	252	-64	8	$-653\frac{1}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	221	-60	8	$-535\frac{1}{6}$
-6	192	-56	8	-432
$-5\frac{1}{2}$	165	-52	8	$-342\frac{5}{6}$
-5	140	-48	8	$-266\frac{2}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	117	-44	8	$-202\frac{1}{2}$
-4	96	-40	8	$-149\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	77	-36	8	$-106\frac{1}{6}$
-3	60	-32	8	-72
$-2\frac{1}{2}$	45	-28	8	$-45\frac{5}{6}$
-2	32	-24	8	$-26\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	21	-20	8	$-13\frac{1}{2}$
-1	12	-16	8	$-5\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	5	-12	8	$-1\frac{1}{6}$
0	0	-8	8	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-8	8	0
$\frac{1}{2}$	-3	-4	8	$-\frac{5}{6}$
1	-4	0	8	$-2\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	-3	4	8	$-4\frac{1}{2}$
2	0	8	8	$-5\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	5	12	8	$-4\frac{1}{6}$
3	12	16	8	0
$3\frac{1}{2}$	21	20	8	$8\frac{1}{6}$
4	32	24	8	$21\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	45	28	8	$40\frac{1}{2}$
5	60	32	8	$66\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	77	36	8	$100\frac{5}{6}$
6	96	40	8	144
$6\frac{1}{2}$	117	44	8	$197\frac{1}{6}$
7	140	48	8	$261\frac{1}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (35)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{24}{49}x^2 + 2\frac{22}{49}x + 2\frac{46}{49} = -\frac{24}{49}(x+1)(x-6)$$

$$f'(x) = -\frac{48}{49}x + 2\frac{22}{49}$$

$$f''(x) = -\frac{48}{49}$$

$$F(x) = \int \left(-\frac{24}{49}x^2 + 2\frac{22}{49}x + 2\frac{46}{49}\right) dx = -\frac{8}{49}x^3 + 1\frac{11}{49}x^2 + 2\frac{46}{49}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 6[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left[-\frac{24}{49} \cdot \infty^2\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[-\frac{24}{49} \cdot (-\infty)^2\right] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{24}{49} \cdot (-x)^2 + 2\frac{22}{49} \cdot (-x) + 2\frac{46}{49}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{24}{49}x^2 + 2\frac{22}{49}x + 2\frac{46}{49} = 0$$

$$-\frac{24}{49}x^2 + 2\frac{22}{49}x + 2\frac{46}{49} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2\frac{22}{49} \pm \sqrt{2\frac{22}{49}^2 - 4 \cdot \left(-\frac{24}{49}\right) \cdot 2\frac{46}{49}}}{2 \cdot \left(-\frac{24}{49}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2\frac{22}{49} \pm \sqrt{11\frac{37}{49}}}{-\frac{48}{49}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2\frac{22}{49} \pm 3\frac{3}{7}}{-\frac{48}{49}}$$

$$x_1 = \frac{-2\frac{22}{49} + 3\frac{3}{7}}{-\frac{48}{49}} \quad x_2 = \frac{-2\frac{22}{49} - 3\frac{3}{7}}{-\frac{48}{49}}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 6$$

$$x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 6; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	-1	$< x < 6$	6	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1; 6[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -(\cup]6; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{48}{49}x + 2\frac{22}{49} = 0$$

$$-\frac{48}{49}x + 2\frac{22}{49} = 0 \quad / -2\frac{22}{49}$$

$$-\frac{48}{49}x = -2\frac{22}{49} \quad / : \left(-\frac{48}{49}\right)$$

$$x = \frac{-2\frac{22}{49}}{-\frac{48}{49}}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$x_3 = 2\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''\left(2\frac{1}{2}\right) = -\frac{48}{49}$$

$$f''\left(2\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } \underline{\left(2\frac{1}{2}/6\right)}$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$2\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-

$$x \in]-\infty; 2\frac{1}{2}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

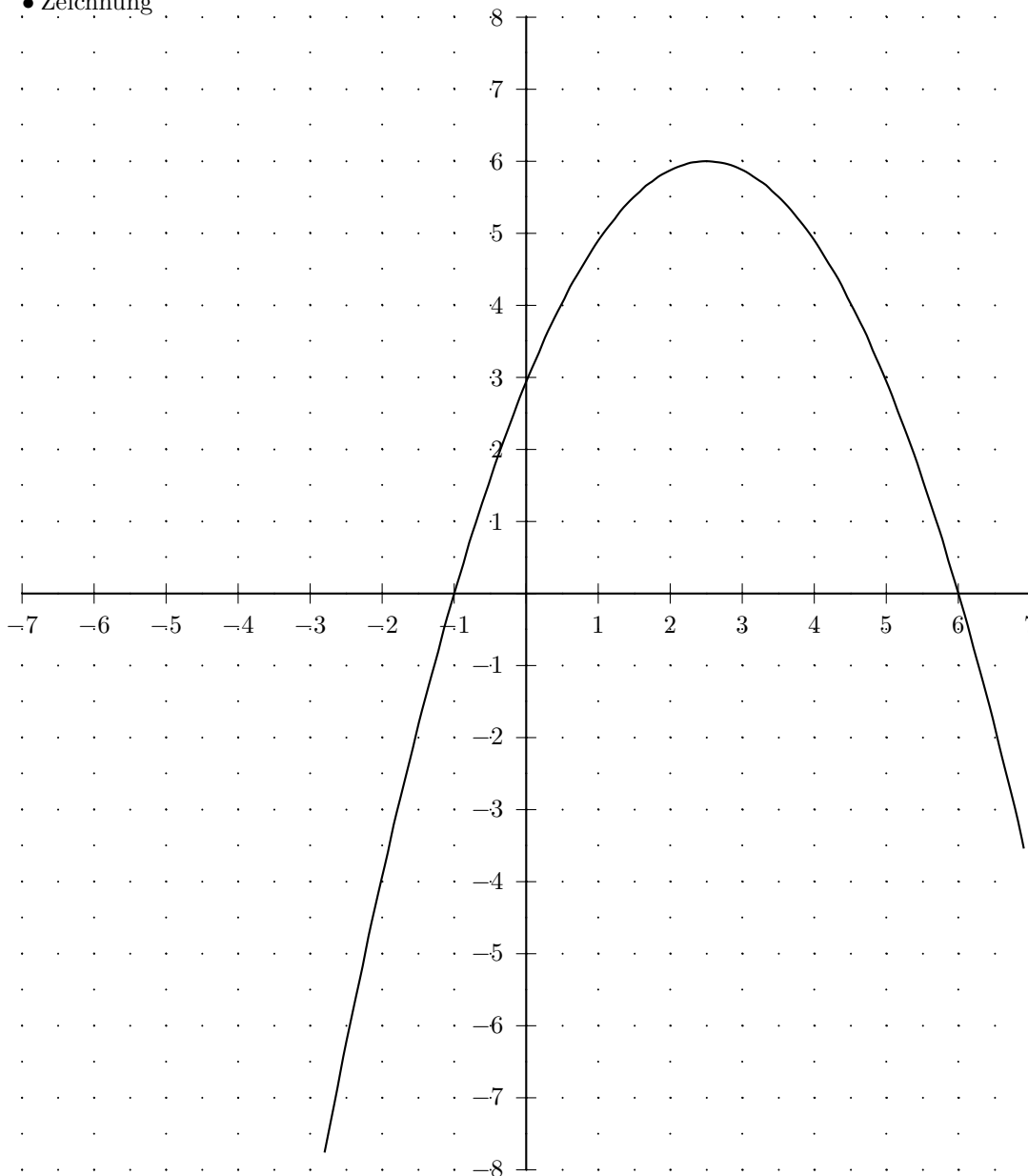
$$x \in]2\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-38\frac{10}{49}$	$9\frac{15}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$95\frac{3}{7}$
$-6\frac{1}{2}$	$-33\frac{33}{49}$	$8\frac{40}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$77\frac{23}{49}$
-6	$-29\frac{19}{49}$	$8\frac{16}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$61\frac{5}{7}$
$-5\frac{1}{2}$	$-25\frac{17}{49}$	$7\frac{41}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$48\frac{2}{49}$
-5	$-21\frac{27}{49}$	$7\frac{17}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$36\frac{16}{49}$
$-4\frac{1}{2}$	-18	$6\frac{6}{7}$	$-\frac{48}{49}$	$26\frac{22}{49}$
-4	$-14\frac{34}{49}$	$6\frac{18}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$18\frac{2}{7}$
$-3\frac{1}{2}$	$-11\frac{31}{49}$	$5\frac{43}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$11\frac{5}{7}$
-3	$-8\frac{40}{49}$	$5\frac{19}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$6\frac{30}{49}$
$-2\frac{1}{2}$	$-6\frac{12}{49}$	$4\frac{44}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$2\frac{6}{7}$
-2	$-3\frac{45}{49}$	$4\frac{20}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$\frac{16}{49}$
$-1\frac{1}{2}$	-1	$3\frac{45}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$-1\frac{5}{49}$
-1	0	$3\frac{7}{7}$	$-\frac{48}{49}$	$-1\frac{27}{49}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{49}$	$2\frac{46}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$-1\frac{1}{7}$
0	$2\frac{46}{49}$	$2\frac{22}{49}$	$-\frac{48}{49}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$2\frac{46}{49}$	$2\frac{22}{49}$	$-\frac{48}{49}$	0
$\frac{1}{2}$	$4\frac{2}{49}$	$1\frac{47}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$1\frac{37}{49}$
1	$4\frac{44}{49}$	$1\frac{23}{49}$	$-\frac{48}{49}$	4
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{25}{49}$	$\frac{48}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$6\frac{30}{49}$
2	$5\frac{43}{49}$	$\frac{24}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$9\frac{23}{49}$
$2\frac{1}{2}$	6	0	$-\frac{48}{49}$	$12\frac{22}{49}$
3	$5\frac{43}{49}$	$-\frac{24}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$15\frac{5}{7}$
$3\frac{1}{2}$	$5\frac{25}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$18\frac{2}{7}$
4	$4\frac{44}{49}$	$-\frac{23}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$20\frac{44}{49}$
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{2}{49}$	$-\frac{47}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$23\frac{1}{7}$
5	$2\frac{46}{49}$	$-\frac{22}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$24\frac{44}{49}$
$5\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{49}$	$-\frac{26}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$26\frac{2}{49}$
6	0	$-\frac{33}{7}$	$-\frac{48}{49}$	$26\frac{22}{49}$
$6\frac{1}{2}$	$-1\frac{41}{49}$	$-\frac{35}{49}$	$-\frac{48}{49}$	26
7	$-3\frac{45}{49}$	$-\frac{420}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$24\frac{4}{7}$

• Zeichnung



Aufgabe (36)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{8}{27}x^2 + 2\frac{2}{3}x = \frac{8}{27}(x+9)x$$

$$f'(x) = \frac{16}{27}x + 2\frac{2}{3}$$

$$f''(x) = \frac{16}{27}$$

$$F(x) = \int (\frac{8}{27}x^2 + 2\frac{2}{3}x)dx = \frac{8}{81}x^3 + 1\frac{1}{3}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-6), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{8}{27} \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{8}{27} \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{8}{27} \cdot (-x)^2 + 2\frac{2}{3} \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{8}{27}x^2 + 2\frac{2}{3}x = 0$$

$$x(\frac{8}{27}x + 2\frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{8}{27}x + 2\frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{8}{27}x + 2\frac{2}{3} = 0 \quad / - 2\frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{27}x = -2\frac{2}{3} \quad / : \frac{8}{27}$$

$$x = \frac{-2\frac{2}{3}}{\frac{8}{27}}$$

$$x = -9$$

$$x_1 = -9; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -9$	-9	$-9 < x < 0$	0	$0 < x$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; -9[\cup]0; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-9; 0[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{16}{27}x + 2\frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{16}{27}x + 2\frac{2}{3} = 0 \quad / - 2\frac{2}{3}$$

$$\frac{16}{27}x = -2\frac{2}{3} \quad / : \frac{16}{27}$$

$$x = \frac{-2\frac{2}{3}}{\frac{16}{27}}$$

$$x = -4\frac{1}{2}$$

$$x_3 = -4\frac{1}{2}; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f''(-4\frac{1}{2}) = \frac{16}{27} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt: } (-4\frac{1}{2} / -6)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2} < x$
$f'(x)$	-	0	+

$x \in]-4\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

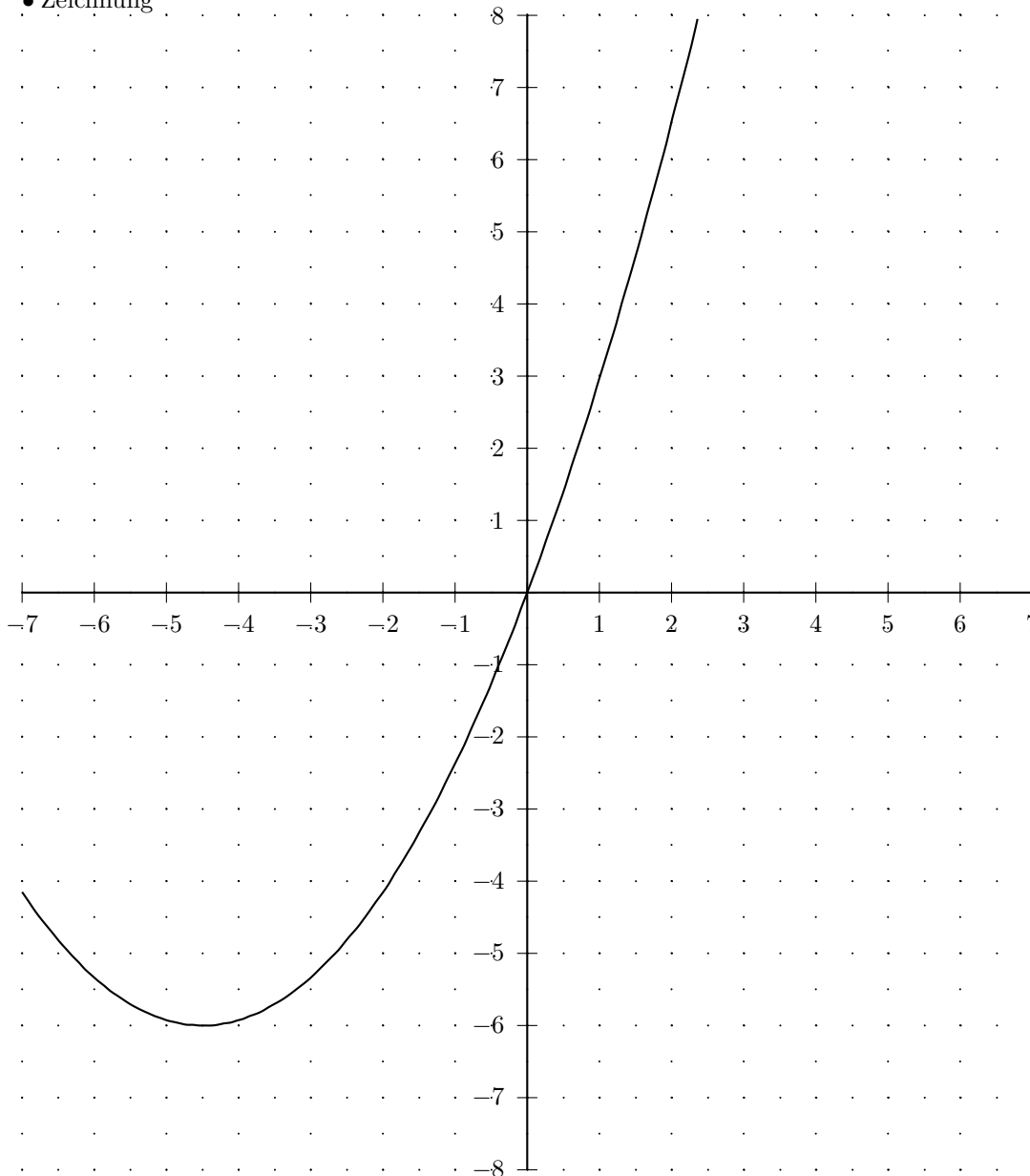
$x \in]-\infty; -4\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-4\frac{4}{27}$	$-1\frac{13}{27}$	$\frac{16}{27}$	$31\frac{37}{81}$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{22}{27}$	$-1\frac{5}{27}$	$\frac{16}{27}$	$29\frac{17}{81}$
-6	$-5\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}$	$26\frac{2}{3}$
$-5\frac{1}{2}$	$-5\frac{19}{27}$	$-\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$23\frac{73}{81}$
-5	$-5\frac{25}{27}$	$-\frac{8}{27}$	$\frac{16}{27}$	$20\frac{80}{81}$
$-4\frac{1}{2}$	-6	0	$\frac{16}{27}$	18
-4	$-5\frac{25}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{27}$	$15\frac{1}{81}$
$-3\frac{1}{2}$	$-5\frac{19}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$12\frac{8}{81}$
-3	$-5\frac{1}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}$	$9\frac{1}{3}$
$-2\frac{1}{2}$	$-4\frac{22}{27}$	$1\frac{5}{27}$	$\frac{16}{27}$	$6\frac{64}{81}$
-2	$-4\frac{4}{27}$	$1\frac{13}{27}$	$\frac{16}{27}$	$4\frac{44}{81}$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{3}$	$1\frac{7}{9}$	$\frac{16}{27}$	$2\frac{2}{3}$
-1	$-2\frac{10}{27}$	$2\frac{2}{27}$	$\frac{16}{27}$	$1\frac{19}{81}$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{27}$	$2\frac{10}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{26}{81}$
0	0	$2\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	$2\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{27}$	$2\frac{26}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{28}{81}$
1	$2\frac{26}{27}$	$3\frac{7}{27}$	$\frac{16}{27}$	$1\frac{35}{81}$
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{2}{3}$	$3\frac{5}{9}$	$\frac{16}{27}$	$3\frac{1}{3}$
2	$6\frac{14}{27}$	$3\frac{23}{27}$	$\frac{16}{27}$	$6\frac{10}{81}$
$2\frac{1}{2}$	$8\frac{14}{27}$	$4\frac{4}{27}$	$\frac{16}{27}$	$9\frac{71}{81}$
3	$10\frac{2}{3}$	$4\frac{4}{9}$	$\frac{16}{27}$	$14\frac{2}{3}$
$3\frac{1}{2}$	$12\frac{26}{27}$	$4\frac{20}{27}$	$\frac{16}{27}$	$20\frac{46}{81}$
4	$15\frac{11}{27}$	$5\frac{1}{27}$	$\frac{16}{27}$	$27\frac{53}{81}$
$4\frac{1}{2}$	18	$5\frac{1}{3}$	$\frac{16}{27}$	36
5	$20\frac{20}{27}$	$5\frac{17}{27}$	$\frac{16}{27}$	$45\frac{55}{81}$
$5\frac{1}{2}$	$23\frac{17}{27}$	$5\frac{25}{27}$	$\frac{16}{27}$	$56\frac{62}{81}$
6	$26\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{9}$	$\frac{16}{27}$	$69\frac{1}{3}$
$6\frac{1}{2}$	$29\frac{23}{27}$	$6\frac{14}{27}$	$\frac{16}{27}$	$83\frac{37}{81}$
7	$33\frac{5}{27}$	$6\frac{22}{27}$	$\frac{16}{27}$	$99\frac{17}{81}$

• Zeichnung



Aufgabe (37)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{20}{81}x^2 + 2\frac{2}{9}x = \frac{20}{81}(x+9)x$$

$$f'(x) = \frac{40}{81}x + 2\frac{2}{9}$$

$$f''(x) = \frac{40}{81}$$

$$F(x) = \int (\frac{20}{81}x^2 + 2\frac{2}{9}x)dx = 0,082x^3 + 1\frac{1}{9}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-5), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{20}{81} \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{20}{81} \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{20}{81} \cdot (-x)^2 + 2\frac{2}{9} \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{20}{81}x^2 + 2\frac{2}{9}x = 0$$

$$x(\frac{20}{81}x + 2\frac{2}{9}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{20}{81}x + 2\frac{2}{9} = 0$$

$$\frac{20}{81}x + 2\frac{2}{9} = 0 \quad / - 2\frac{2}{9}$$

$$\frac{20}{81}x = -2\frac{2}{9} \quad / : \frac{20}{81}$$

$$x = \frac{-2\frac{2}{9}}{\frac{20}{81}}$$

$$x = -\frac{20}{81}$$

$$x = -9$$

$$x_1 = -9; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -9$	-9	$-9 < x < 0$	0	$0 < x$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; -9[\cup]0; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-9; 0[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{40}{81}x + 2\frac{2}{9} = 0$$

$$\frac{40}{81}x + 2\frac{2}{9} = 0 \quad / - 2\frac{2}{9}$$

$$\frac{40}{81}x = -2\frac{2}{9} \quad / : \frac{40}{81}$$

$$x = \frac{-2\frac{2}{9}}{\frac{40}{81}}$$

$$x = -4\frac{1}{2}$$

$$x_3 = -4\frac{1}{2}; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f''(-4\frac{1}{2}) = \frac{40}{81} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt: } (-4\frac{1}{2} / -5)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2} < x$
$f'(x)$	-	0	+

$x \in]-4\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

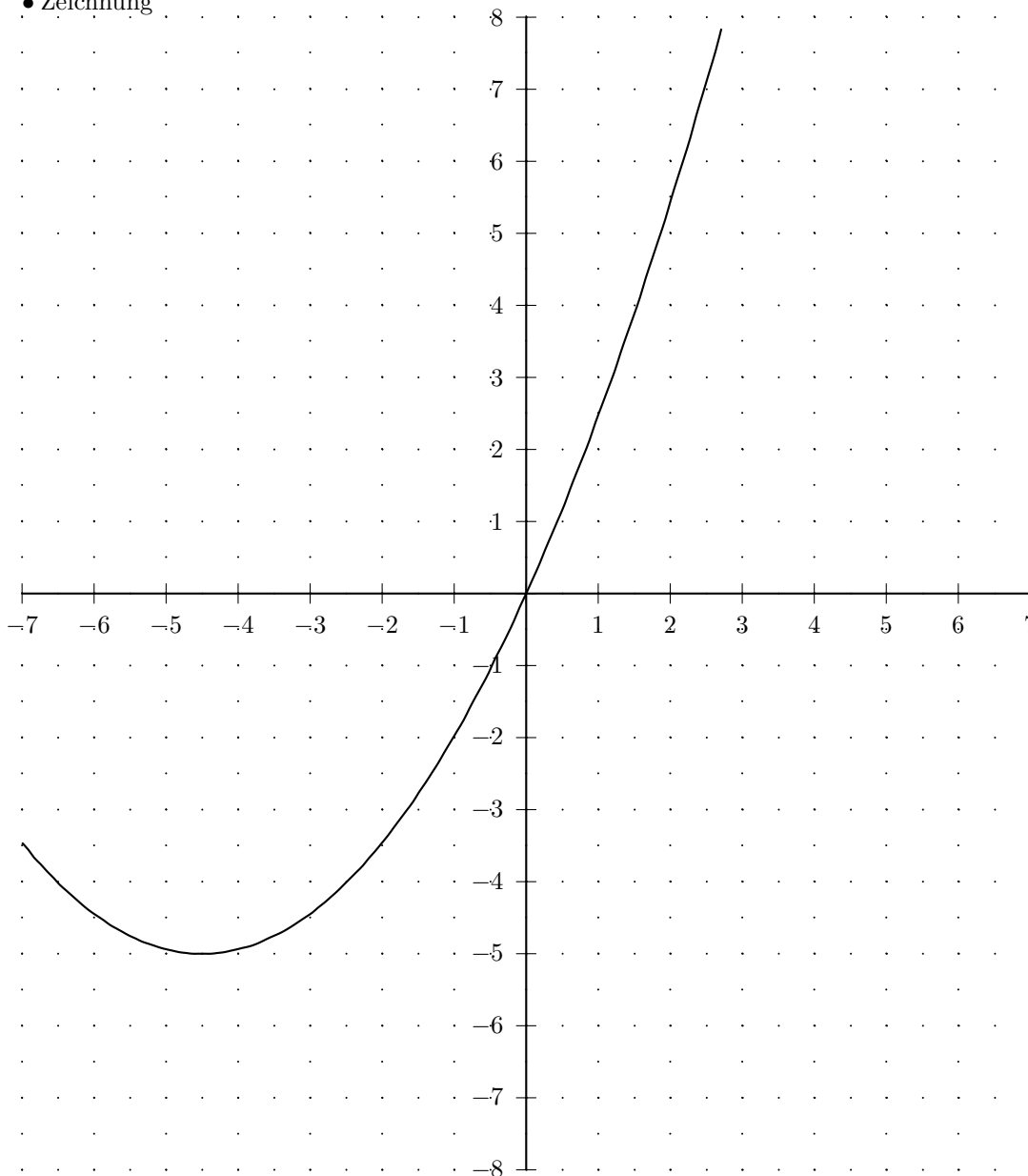
$x \in]-\infty; -4\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-3\frac{37}{81}$	$-1\frac{19}{81}$	$\frac{40}{81}$	26,214
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{81}$	$-\frac{80}{81}$	$\frac{40}{81}$	24,342
-6	$-4\frac{4}{9}$	$-\frac{20}{27}$	$\frac{40}{81}$	$22\frac{2}{9}$
$-5\frac{1}{2}$	$-4\frac{61}{81}$	$-\frac{40}{81}$	$\frac{40}{81}$	19,918
-5	$-4\frac{16}{81}$	$-\frac{20}{81}$	$\frac{40}{81}$	17,49
$-4\frac{1}{2}$	-5	0	$\frac{40}{81}$	15
-4	$-4\frac{76}{81}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{40}{81}$	12,51
$-3\frac{1}{2}$	$-4\frac{61}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{40}{81}$	10,082
-3	$-4\frac{4}{9}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{40}{81}$	$7\frac{7}{9}$
$-2\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{81}$	$\frac{80}{81}$	$\frac{40}{81}$	5,658
-2	$-3\frac{37}{81}$	$1\frac{19}{81}$	$\frac{40}{81}$	3,786
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{9}$	$1\frac{13}{27}$	$\frac{40}{81}$	$2\frac{2}{9}$
-1	$-1\frac{79}{81}$	$1\frac{59}{81}$	$\frac{40}{81}$	1,029
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{4}{81}$	$1\frac{79}{81}$	$\frac{40}{81}$	0,267
0	0	$2\frac{2}{9}$	$\frac{40}{81}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	$2\frac{2}{9}$	$\frac{40}{81}$	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{14}{81}$	$2\frac{38}{81}$	$\frac{40}{81}$	0,288
1	$2\frac{38}{81}$	$2\frac{58}{81}$	$\frac{40}{81}$	1,193
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{8}{9}$	$2\frac{26}{27}$	$\frac{40}{81}$	$2\frac{7}{9}$
2	$5\frac{35}{81}$	$3\frac{17}{81}$	$\frac{40}{81}$	5,103
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{8}{81}$	$3\frac{37}{81}$	$\frac{40}{81}$	8,23
3	$8\frac{8}{9}$	$3\frac{19}{27}$	$\frac{40}{81}$	$12\frac{2}{9}$
$3\frac{1}{2}$	$10\frac{65}{81}$	$3\frac{77}{81}$	$\frac{40}{81}$	17,14
4	$12\frac{68}{81}$	$4\frac{16}{81}$	$\frac{40}{81}$	23,045
$4\frac{1}{2}$	15	$4\frac{4}{9}$	$\frac{40}{81}$	30
5	$17\frac{23}{81}$	$4\frac{56}{81}$	$\frac{40}{81}$	38,066
$5\frac{1}{2}$	$19\frac{56}{81}$	$4\frac{76}{81}$	$\frac{40}{81}$	47,305
6	$22\frac{2}{9}$	$5\frac{5}{27}$	$\frac{40}{81}$	$57\frac{7}{9}$
$6\frac{1}{2}$	$24\frac{71}{81}$	$5\frac{35}{81}$	$\frac{40}{81}$	69,547
7	$27\frac{53}{81}$	$5\frac{55}{81}$	$\frac{40}{81}$	82,675

• Zeichnung



Aufgabe (38)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 1\frac{11}{25}x^2 + 10\frac{2}{25}x + 8\frac{16}{25} = 1\frac{11}{25}(x+6)(x+1)$$

$$f'(x) = 2\frac{22}{25}x + 10\frac{2}{25}$$

$$f''(x) = 2\frac{22}{25}$$

$$F(x) = \int (1\frac{11}{25}x^2 + 10\frac{2}{25}x + 8\frac{16}{25})dx = \frac{12}{25}x^3 + 5\frac{1}{25}x^2 + 8\frac{16}{25}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-9), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1\frac{11}{25} \cdot \infty^2] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1\frac{11}{25} \cdot (-\infty)^2] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1\frac{11}{25} \cdot (-x)^2 + 10\frac{2}{25} \cdot (-x) + 8\frac{16}{25}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 1\frac{11}{25}x^2 + 10\frac{2}{25}x + 8\frac{16}{25} = 0$$

$$1\frac{11}{25}x^2 + 10\frac{2}{25}x + 8\frac{16}{25} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-10\frac{2}{25} \pm \sqrt{10\frac{2}{25}^2 - 4 \cdot 1\frac{11}{25} \cdot 8\frac{16}{25}}}{2 \cdot 1\frac{11}{25}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-10\frac{2}{25} \pm \sqrt{51\frac{21}{25}}}{2\frac{22}{25}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-10\frac{2}{25} \pm 7\frac{1}{5}}{2\frac{22}{25}}$$

$$x_1 = \frac{-10\frac{2}{25} + 7\frac{1}{5}}{2\frac{22}{25}} \quad x_2 = \frac{-10\frac{2}{25} - 7\frac{1}{5}}{2\frac{22}{25}}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -6$$

$$x_1 = -6; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -6$	$-6 < x < -1$	$-1 < x$
$f(x)$	+	-	+

$x \in]-\infty; -6[\cup]-1; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-6; -1[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 2\frac{22}{25}x + 10\frac{2}{25} = 0$$

$$2\frac{22}{25}x + 10\frac{2}{25} = 0 \quad / -10\frac{2}{25}$$

$$2\frac{22}{25}x = -10\frac{2}{25} \quad / : 2\frac{22}{25}$$

$$x = \frac{-10\frac{2}{25}}{2\frac{22}{25}}$$

$$x = -3\frac{1}{2}$$

$$x_3 = -3\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-3\frac{1}{2}) = 2\frac{22}{25} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-3\frac{1}{2} / -9)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-3\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in] -3\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

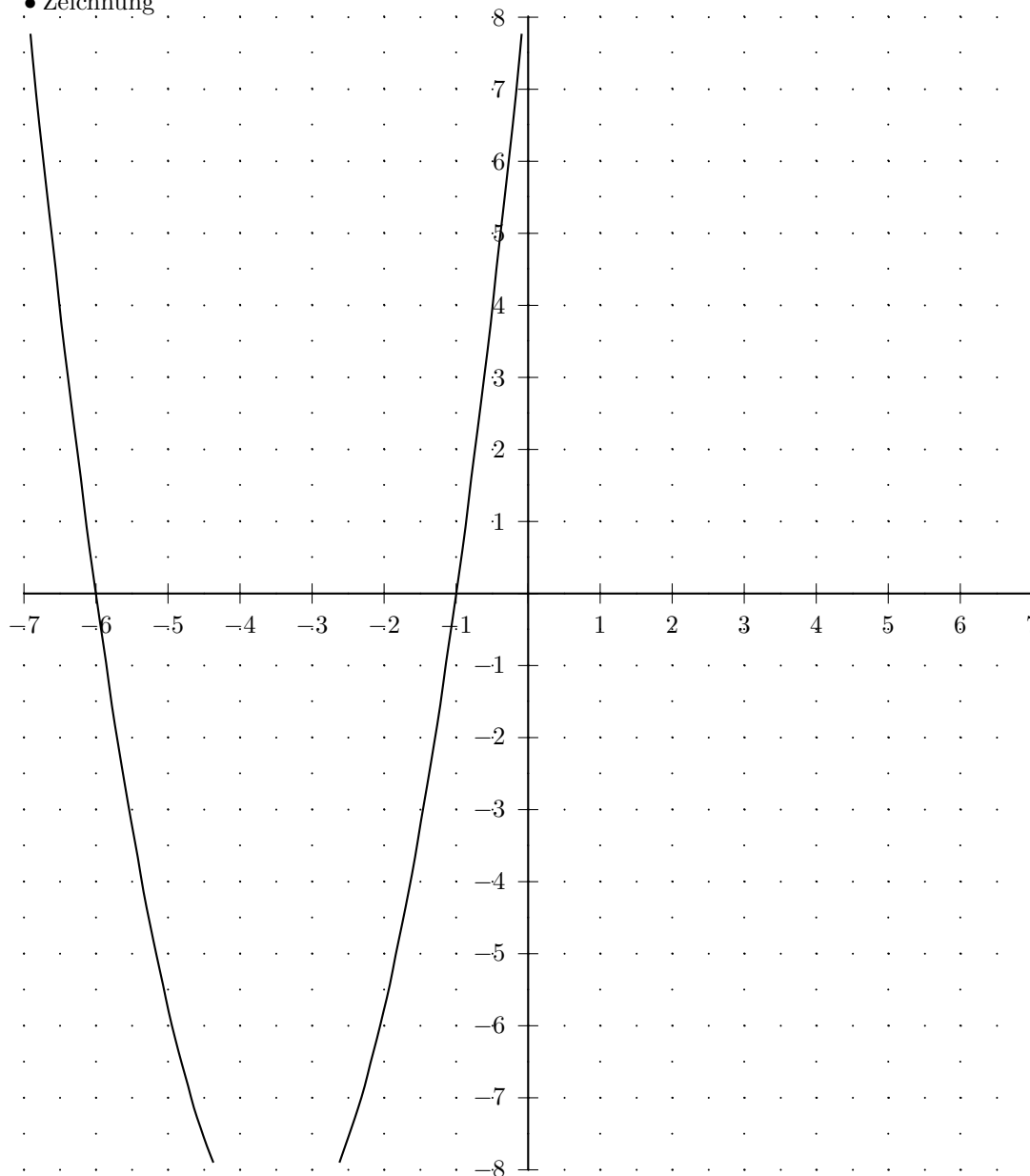
$x \in] -\infty; -3\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$8\frac{16}{25}$	$-10\frac{2}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$21\frac{21}{25}$
$-6\frac{1}{2}$	$3\frac{24}{25}$	$-8\frac{16}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$24\frac{24}{25}$
-6	0	$-7\frac{1}{5}$	$2\frac{22}{25}$	$25\frac{23}{25}$
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{6}{25}$	$-5\frac{19}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$25\frac{2}{25}$
-5	$-5\frac{19}{25}$	$-4\frac{8}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$22\frac{4}{5}$
$-4\frac{1}{2}$	$-7\frac{14}{25}$	$-2\frac{22}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$19\frac{11}{25}$
-4	$-8\frac{16}{25}$	$-1\frac{11}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$15\frac{9}{25}$
$-3\frac{1}{2}$	-9	0	$2\frac{22}{25}$	$10\frac{23}{25}$
-3	$-8\frac{16}{25}$	$1\frac{11}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$6\frac{12}{25}$
$-2\frac{1}{2}$	$-7\frac{14}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$2\frac{2}{5}$
-2	$-5\frac{19}{25}$	$4\frac{8}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$-2\frac{4}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{6}{25}$	$5\frac{19}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$-3\frac{6}{25}$
-1	0	$7\frac{1}{5}$	$2\frac{22}{25}$	$-4\frac{2}{25}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{24}{25}$	$8\frac{16}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$-3\frac{3}{25}$
0	$8\frac{16}{25}$	$10\frac{2}{25}$	$2\frac{22}{25}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$8\frac{16}{25}$	$10\frac{2}{25}$	$2\frac{22}{25}$	0
$\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{25}$	$11\frac{13}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$5\frac{16}{25}$
1	$20\frac{4}{25}$	$12\frac{24}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$14\frac{4}{25}$
$1\frac{1}{2}$	27	$14\frac{2}{5}$	$2\frac{22}{25}$	$25\frac{23}{25}$
2	$34\frac{14}{25}$	$15\frac{21}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$41\frac{7}{25}$
$2\frac{1}{2}$	$42\frac{21}{25}$	$17\frac{7}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$60\frac{2}{25}$
3	$51\frac{21}{25}$	$18\frac{18}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$84\frac{6}{25}$
$3\frac{1}{2}$	$61\frac{14}{25}$	$20\frac{4}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$112\frac{14}{25}$
4	72	$21\frac{3}{5}$	$2\frac{22}{25}$	$145\frac{23}{25}$
$4\frac{1}{2}$	$83\frac{4}{25}$	$23\frac{1}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$184\frac{17}{25}$
5	$95\frac{1}{25}$	$24\frac{12}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$229\frac{1}{5}$
$5\frac{1}{2}$	$107\frac{16}{25}$	$25\frac{23}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$279\frac{21}{25}$
6	$120\frac{24}{25}$	$27\frac{9}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$336\frac{24}{25}$
$6\frac{1}{2}$	135	$28\frac{4}{5}$	$2\frac{22}{25}$	$400\frac{23}{25}$
7	$149\frac{19}{25}$	$30\frac{6}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$472\frac{2}{25}$

• Zeichnung



6 Kubische Funktionen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

6.1 Aufgaben

- (1) $f(x) = -2x^3$
- (2) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2$
- (3) $f(x) = x^3 - 3x^2$
- (4) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 4$
- (5) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x$
- (6) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x$
- (7) $f(x) = -x^3 + 3x + 2$
- (8) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$
- (9) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x$
- (10) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$
- (11) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$
- (12) $f(x) = -\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55}$
- (13) $f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5}$
- (14) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2$
- (15) $f(x) = \frac{7}{2}x^3 + x^2 - x$
- (16) $f(x) = -5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5}$
- (17) $f(x) = -6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2$
- (18) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8$
- (19) $f(x) = -\frac{27}{28}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 5\frac{11}{14}x$
- (20) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
- (21) $f(x) = -5\frac{1}{16}x^3 + 10\frac{1}{8}x^2$
- (22) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4$
- (23) $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$
- (24) $f(x) = 40\frac{1}{2}x^3 + 81x^2 + 40\frac{1}{2}x$
- (25) $f(x) = 54x^3 - 270x^2 + 432x - 216$
- (26) $f(x) = 1\frac{19}{35}x^3 - 10\frac{4}{5}x^2 + 18\frac{18}{35}x$
- (27) $f(x) = -2x^3 + 6x^2$
- (28) $f(x) = -2x^3 + 6x^2$
- (29) $f(x) = 5\frac{2}{5}x^3 + 27x^2 + 32\frac{2}{5}x$
- (30) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{3}x$
- (31) $f(x) = -0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35}$
- (32) $f(x) = -\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28}$
- (33) $f(x) = -13\frac{1}{2}x^3 - 67\frac{1}{2}x^2 - 108x - 54$

6.2 Lösungen

Aufgabe (1)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -2x^3$$

$$f'(x) = -6x^2$$

$$f''(x) = -12x$$

$$f'''(x) = -12$$

$$F(x) = \int (-2x^3) dx = -\frac{1}{2}x^4 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -2 \cdot (-x)^3$$

$$f(-x) = -(-2 \cdot x^3)$$

$$f(-x) = -f(x) \rightarrow \text{Symmetrie zum Ursprung:}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -2x^3 = 0$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_1 = 0; \quad \underline{\text{3-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	0	$< x$
$f(x)$	+	0	-

$$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$$

$$\underline{x \in]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -6x^2 = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{\text{2-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = 0$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Terrassenpunkt:}(0/0)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$< x$
$f'(x)$	-	0	-

$$\underline{x \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = -12x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Wendepunkt:}(0/0)}$$

• Krümmung

	$x < 0$	0	$< x$
$f''(x)$	+	0	-

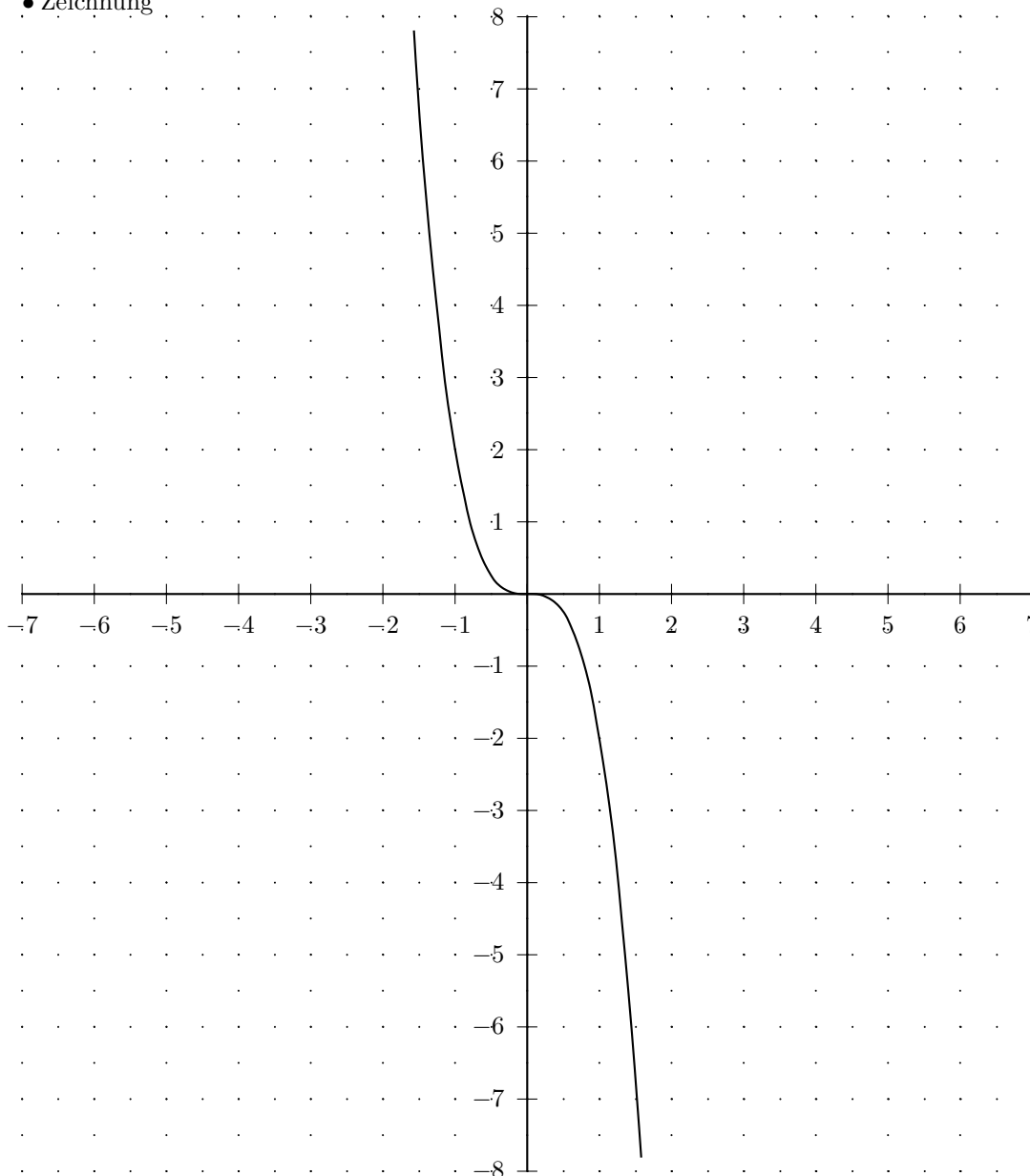
$$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$$

$x \in]0; \infty[$ $f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	686	-294,001	84	$-1200\frac{1}{2}$	0	0	-0,001	0	0
$-6\frac{1}{2}$	$549\frac{1}{4}$	-253,501	78	$-892\frac{17}{32}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-1,501	-6	$-\frac{1}{32}$
-6	432	-216,001	72	-648	1	-2	-6,001	-12	$-\frac{1}{2}$
$-5\frac{1}{2}$	$332\frac{3}{4}$	-181,501	66	$-457\frac{17}{32}$	$1\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$	-13,501	-18	$-2\frac{17}{32}$
-5	250	-150,001	60	$-312\frac{1}{2}$	2	-16	-24,001	-24	-8
$-4\frac{1}{2}$	$182\frac{1}{4}$	-121,501	54	$-205\frac{17}{32}$	$2\frac{1}{2}$	$-31\frac{1}{4}$	-37,501	-30	$-19\frac{17}{32}$
-4	128	-96,001	48	-128	3	-54	-54,001	-36	$-40\frac{1}{2}$
$-3\frac{1}{2}$	$85\frac{3}{4}$	-73,501	42	$-75\frac{1}{32}$	$3\frac{1}{2}$	$-85\frac{3}{4}$	-73,501	-42	$-75\frac{1}{32}$
-3	54	-54,001	36	$-40\frac{1}{2}$	4	-128	-96,001	-48	-128
$-2\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{4}$	-37,501	30	$-19\frac{17}{32}$	$4\frac{1}{2}$	$-182\frac{1}{4}$	-121,501	-54	$-205\frac{1}{32}$
-2	16	-24,001	24	-8	5	-250	-150,001	-60	$-312\frac{1}{2}$
$-1\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	-13,501	18	$-2\frac{17}{32}$	$5\frac{1}{2}$	$-332\frac{3}{4}$	-181,501	-66	$-457\frac{17}{32}$
-1	2	-6,001	12	$-\frac{1}{2}$	6	-432	-216,001	-72	-648
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-1,501	6	$-\frac{1}{32}$	$6\frac{1}{2}$	$-549\frac{1}{4}$	-253,501	-78	$-892\frac{17}{32}$
0	0	-0,001	0	0	7	-686	-294,001	-84	$-1200\frac{1}{2}$

• Zeichnung



Aufgabe (2)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 = -\frac{1}{4}x^2(x - 2\frac{2}{3})$$

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1\frac{1}{3}x = -\frac{3}{4}x(x - 1\frac{7}{9})$$

$$f''(x) = -1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3} = -1\frac{1}{2}(x - \frac{8}{9})$$

$$f'''(x) = -1\frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2)dx = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{2}{9}x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{4} \cdot (-x)^3 + \frac{2}{3} \cdot (-x)^2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 = 0$$

$$x^2(-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0 \quad / -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{4}x = -\frac{2}{3} \quad / : (-\frac{1}{4})$$

$$x = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{4}}$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$$x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 2\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 2\frac{2}{3}$	$< x$
$f(x)$	+	+	-

$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 2\frac{2}{3}[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in]2\frac{2}{3}; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1\frac{1}{3}x = 0$$

$$x(-\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{3} = 0$$

$$-\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{3} = 0 \quad / -1\frac{1}{3}$$

$$-\frac{3}{4}x = -1\frac{1}{3} \quad / : (-\frac{3}{4})$$

$$x = \frac{-1\frac{1}{3}}{-\frac{3}{4}}$$

$$x = 1\frac{7}{9}$$

$$x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 1\frac{7}{9}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(0) = 1\frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: (0/0)}$$

$$f''(1\frac{7}{9}) = -1\frac{1}{3}$$

$$f''\left(1\frac{7}{9}\right) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } \left(1\frac{7}{9}/0, 702\right)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$0 < x < 1\frac{7}{9}$	$x > 1\frac{7}{9}$
$f'(x)$	-	0	+	-

$$x \in]0; 1\frac{7}{9}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; 0[\cup]1\frac{7}{9}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3} = 0$$

$$-1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3} = 0 \quad / -1\frac{1}{2}$$

$$-1\frac{1}{2}x = -1\frac{1}{3} \quad / : \left(-1\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{-1\frac{1}{3}}{-1\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{8}{9}$$

$$x_5 = \frac{8}{9}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''\left(\frac{8}{9}\right) = 0, 351$$

$$f'''\left(\frac{8}{9}\right) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } \left(\frac{8}{9}/0, 351\right)$$

- Krümmung

	$x < \frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$x > \frac{8}{9}$
$f''(x)$	+	0	-

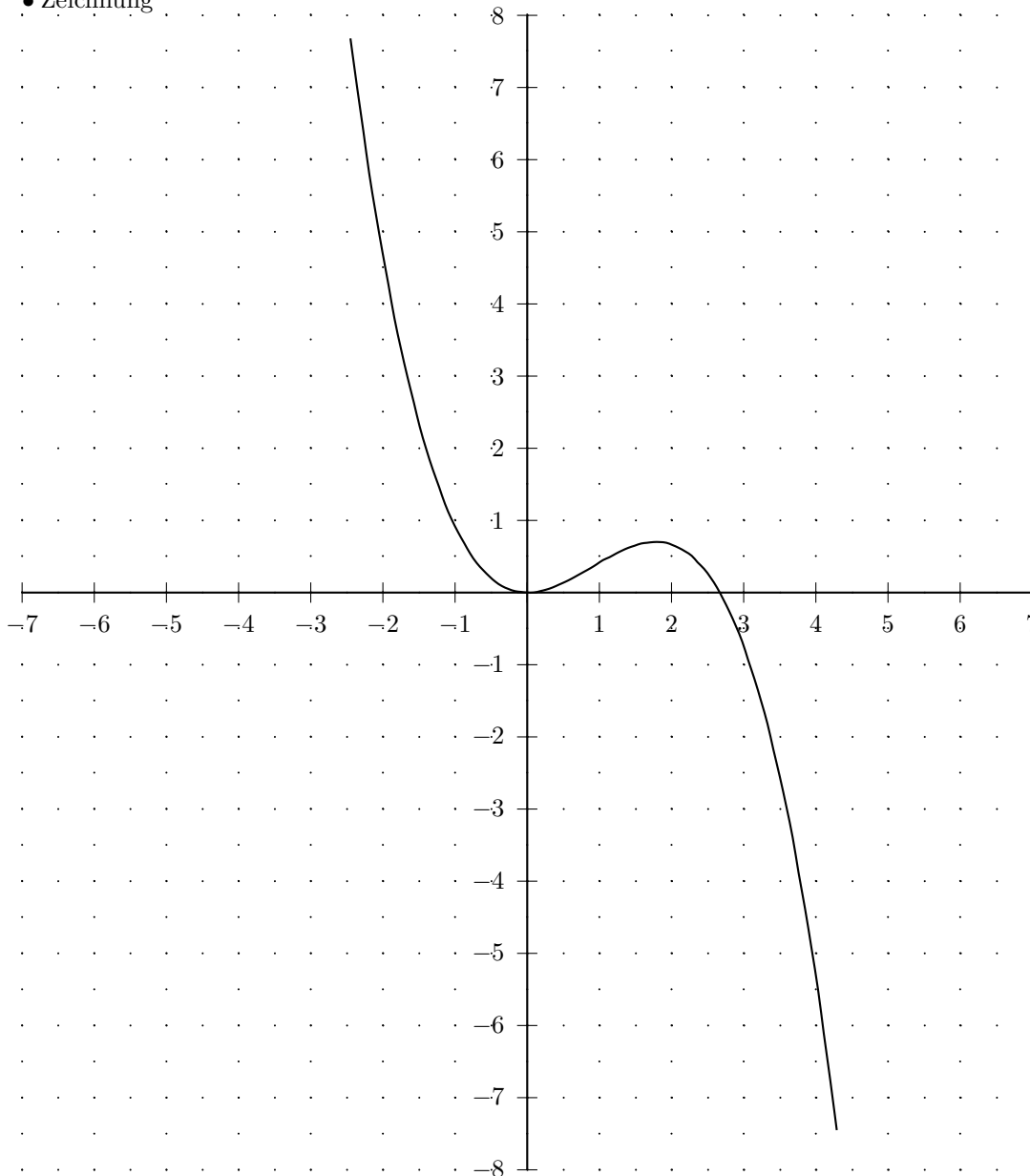
$$x \in]-\infty; \frac{8}{9}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

$$x \in]\frac{8}{9}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$118\frac{5}{12}$	-46,083	$11\frac{5}{6}$	-226,285
$-6\frac{1}{2}$	$96\frac{79}{96}$	-40,354	$11\frac{1}{12}$	-172,594
-6	78	-35	$10\frac{1}{3}$	-129
$-5\frac{1}{2}$	$61\frac{73}{96}$	-30,021	$9\frac{7}{12}$	-94,164
-5	$47\frac{11}{12}$	-25,417	$8\frac{5}{6}$	-66,84
$-4\frac{1}{2}$	$36\frac{9}{32}$	-21,188	$8\frac{1}{12}$	-45,879
-4	$26\frac{3}{4}$	-17,333	$7\frac{1}{3}$	$-30\frac{2}{9}$
$-3\frac{1}{2}$	$18\frac{85}{96}$	-13,854	$6\frac{7}{12}$	-18,907
-3	$12\frac{3}{4}$	-10,75	$5\frac{5}{6}$	$-11\frac{1}{16}$
$-2\frac{1}{2}$	$8\frac{7}{96}$	-8,021	$5\frac{1}{12}$	-5,914
-2	$4\frac{2}{3}$	-5,667	$4\frac{1}{3}$	$-2\frac{7}{9}$
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{32}$	-3,688	$3\frac{7}{12}$	-1,066
-1	$\frac{11}{12}$	-2,083	$2\frac{5}{6}$	-0,285
$-\frac{1}{2}$	$\frac{19}{96}$	-0,854	$2\frac{1}{12}$	-0,032
0	0	0	$1\frac{1}{3}$	0
0	0	0	$1\frac{1}{3}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{96}$	0,479	$\frac{7}{12}$	0,024
1	$\frac{5}{12}$	0,583	$-\frac{1}{6}$	0,16
$1\frac{1}{2}$	$\frac{21}{32}$	0,312	$-\frac{11}{12}$	0,434
2	$\frac{2}{3}$	-0,333	$-1\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{25}{96}$	-1,354	$-2\frac{5}{12}$	1,031
3	$-\frac{3}{4}$	-2,75	$-3\frac{1}{6}$	$\frac{15}{16}$
$3\frac{1}{2}$	$-2\frac{33}{96}$	-4,521	$-3\frac{11}{12}$	0,149
4	$-5\frac{1}{3}$	-6,667	$-4\frac{2}{3}$	$-1\frac{7}{9}$
$4\frac{1}{2}$	$-9\frac{9}{32}$	-9,188	$-5\frac{5}{12}$	-5,379
5	$-14\frac{7}{12}$	-12,083	$-6\frac{1}{6}$	-11,285
$5\frac{1}{2}$	$-21\frac{41}{96}$	-15,354	$-6\frac{11}{12}$	-20,219
6	-30	-19	$-7\frac{2}{3}$	-33
$6\frac{1}{2}$	$-40\frac{47}{96}$	-23,021	$-8\frac{5}{12}$	-50,539
7	$-53\frac{1}{12}$	-27,417	$-9\frac{1}{6}$	-73,84

• Zeichnung



Aufgabe (3)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$f'''(x) = 6$$

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^3 - 3 \cdot (-x)^2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x - 3 = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad / + 3$$

$$x = 3$$

$$x_1 = 0; \quad \underline{\text{2-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 3; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	0	$0 < x < 3$	3	$x > 3$
$f(x)$	-	0	-	0	+

$x \in]3; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 3[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

$$x(3x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 3x - 6 = 0$$

$$3x - 6 = 0 \quad / + 6$$

$$3x = 6 \quad / : 3$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$x_4 = 2; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = -6$$

$$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt: (0/0)}}$$

$$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt: (2/-4)}}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; 0[\cup]2; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]0; 2[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 6x - 6 = 0$$

$$6x - 6 = 0 \quad / + 6$$

$$6x = 6 \quad / : 6$$

$$x = \frac{6}{6}$$

$$x = 1$$

$x_5 = 1$; 1-fache Nullstelle

$$f'''(1) = -2$$

$$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(1 | -2)$

• Krümmung

	$x <$	1	$< x$
$f''(x)$	-	0	+

$x \in]1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

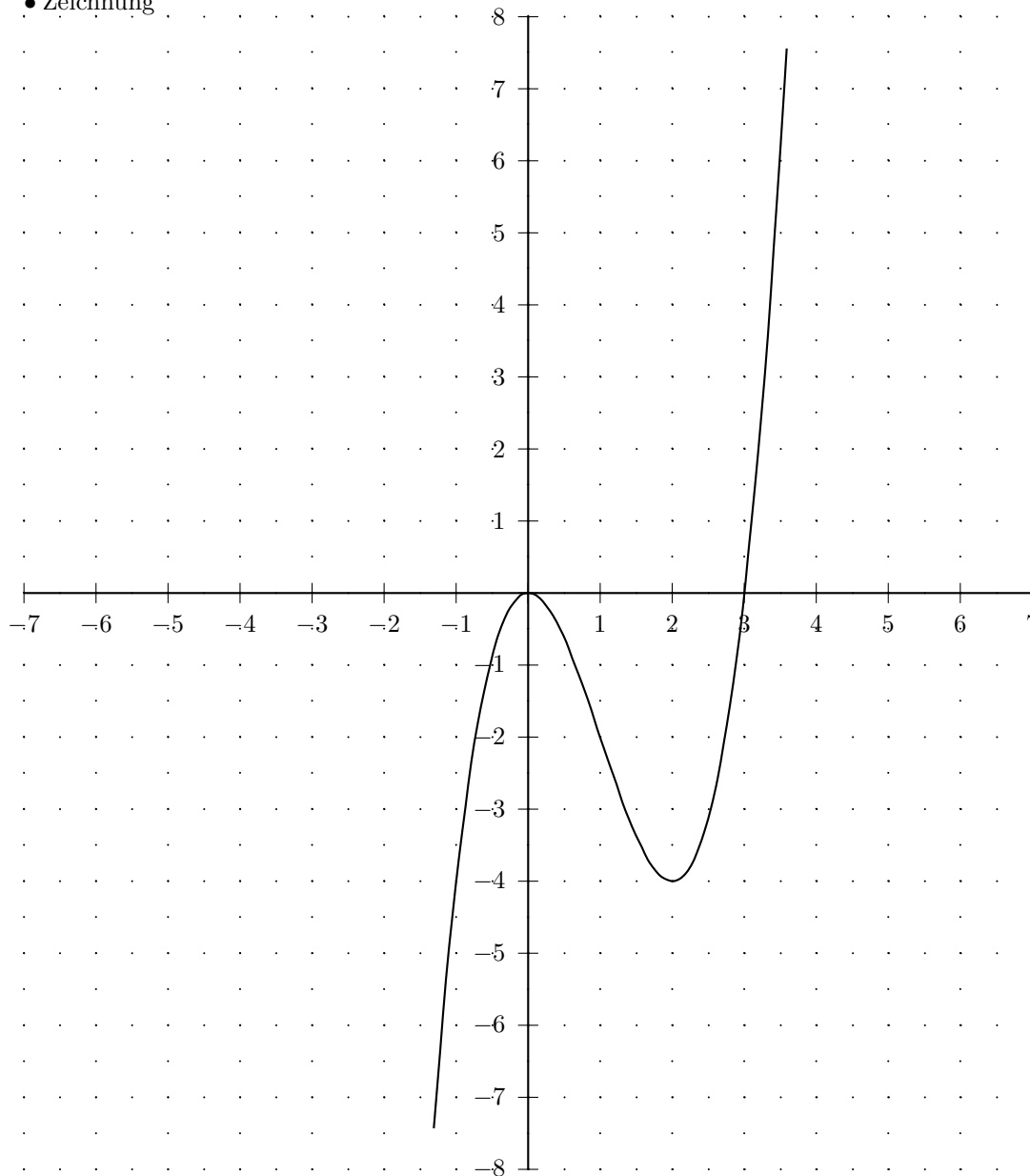
$x \in]-\infty; 1[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-490	189	-48	$943\frac{1}{4}$
$-6\frac{1}{2}$	$-401\frac{3}{8}$	165,75	-45	$720\frac{57}{64}$
-6	-324	144	-42	540
$-5\frac{1}{2}$	$-257\frac{1}{8}$	123,75	-39	$395\frac{9}{64}$
-5	-200	105	-36	$281\frac{1}{4}$
$-4\frac{1}{2}$	$-151\frac{7}{8}$	87,75	-33	$193\frac{41}{64}$
-4	-112	72	-30	128
$-3\frac{1}{2}$	$-79\frac{5}{8}$	57,75	-27	$80\frac{25}{64}$
-3	-54	45	-24	$47\frac{1}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$-34\frac{3}{8}$	33,75	-21	$25\frac{25}{64}$
-2	-20	24	-18	12
$-1\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	15,75	-15	$4\frac{41}{64}$
-1	-4	9	-12	$1\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	3,75	-9	$\frac{9}{64}$
0	0	0	-6	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	-6	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	-2,25	-3	$-\frac{7}{64}$
1	-2	-3	0	$-\frac{3}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{8}$	-2,25	3	$-2\frac{7}{64}$
2	-4	0	6	-4
$2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	3,75	9	$-5\frac{55}{64}$
3	0	9	12	$-6\frac{3}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{8}$	15,75	15	$-5\frac{23}{64}$
4	16	24	18	0
$4\frac{1}{2}$	$30\frac{3}{8}$	33,75	21	$11\frac{25}{64}$
5	50	45	24	$31\frac{1}{4}$
$5\frac{1}{2}$	$75\frac{5}{8}$	57,75	27	$62\frac{25}{64}$
6	108	72	30	108
$6\frac{1}{2}$	$147\frac{7}{8}$	87,75	33	$171\frac{41}{64}$
7	196	105	36	$257\frac{1}{4}$

• Zeichnung



Aufgabe (4)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 4 = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 4)(x + 2)$$

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2$$

$$f''(x) = 3x$$

$$f'''(x) = 3$$

$$F(x) = \int (\frac{1}{2}x^3 + 4)dx = \frac{1}{8}x^4 + 4x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 4$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 4 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^3 + 4 = 0 \quad \frac{1}{2}x^3 + 4 = 0 \quad / -4$$

$$\frac{1}{2}x^3 = -4 \quad / : \frac{1}{2}$$

$$x^3 = \frac{-4}{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{-8}$$

$$x = -2$$

Polynomdivision: (-2)

$$\begin{array}{r} (\frac{1}{2}x^3 \quad \quad \quad +4) : (x+2) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2 \\ -(\frac{1}{2}x^3 \quad +x^2) \\ \hline \quad \quad -x^2 \quad \quad +4 \\ \quad \quad -(-x^2 \quad -2x) \\ \hline \quad \quad \quad \quad 2x \quad +4 \\ \quad \quad \quad \quad -(2x \quad +4) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{-3}}{1}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$$x_1 = -2; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$$x \in] -2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in] -\infty; -2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{2\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = 4$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow$$

Terrassenpunkt: $(0/4)$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 3x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(0) = 4$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(0/4)$

- Krümmung

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

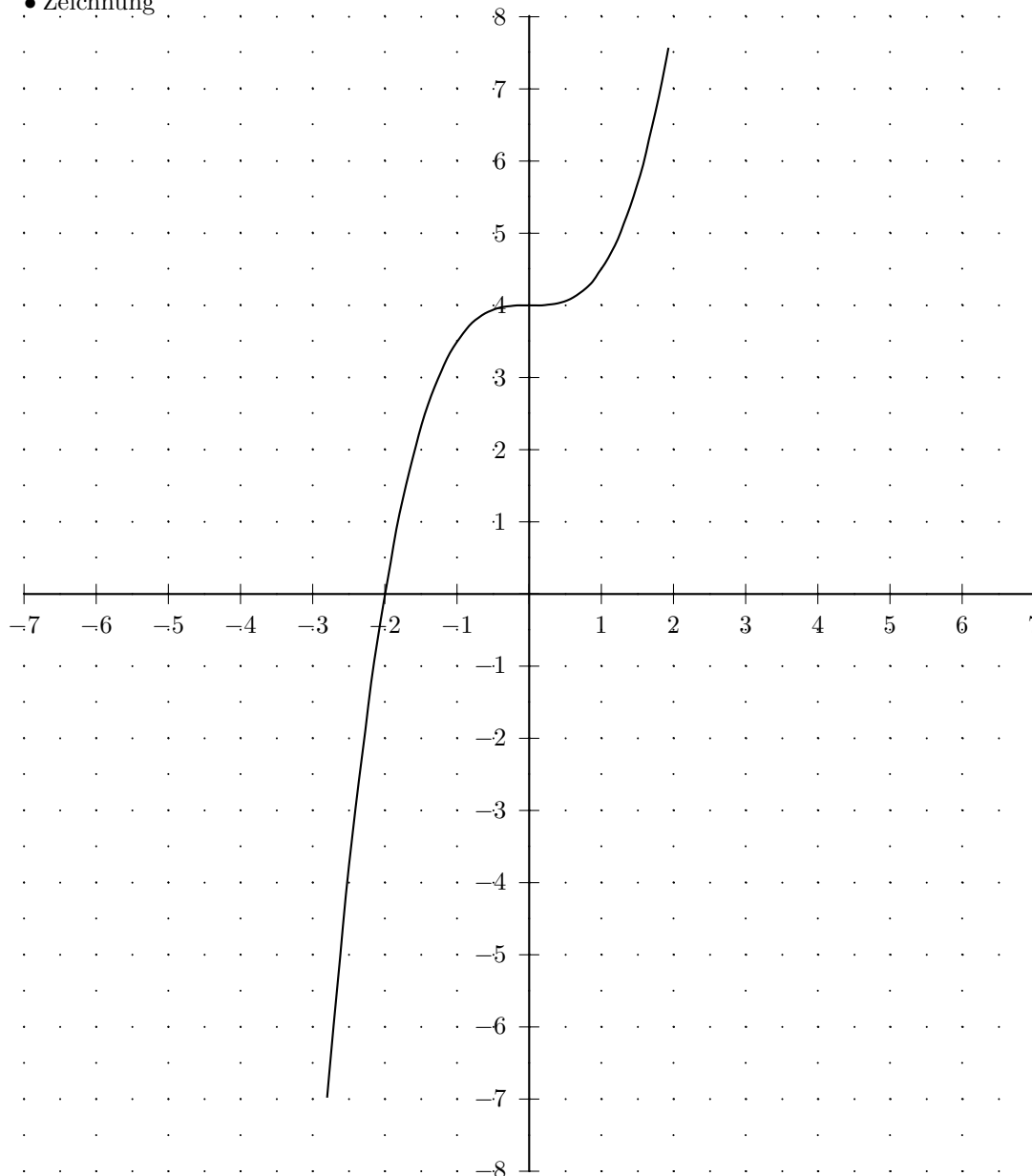
$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-167\frac{1}{2}$	73,5	-21	$272\frac{1}{8}$
$-6\frac{1}{2}$	$-133\frac{5}{16}$	63,375	$-19\frac{1}{2}$	197,133
-6	-104	54	-18	138
$-5\frac{1}{2}$	$-79\frac{3}{16}$	45,375	$-16\frac{1}{2}$	92,383
-5	$-58\frac{1}{2}$	37,5	-15	$58\frac{1}{8}$
$-4\frac{1}{2}$	$-41\frac{9}{16}$	30,375	$-13\frac{1}{2}$	33,258
-4	-28	24	-12	16
$-3\frac{1}{2}$	$-17\frac{7}{16}$	18,375	$-10\frac{1}{2}$	4,758
-3	$-9\frac{1}{2}$	13,5	-9	$-1\frac{7}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{13}{16}$	9,375	$-7\frac{1}{2}$	-5,117
-2	0	6	-6	-6
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{16}$	3,375	$-4\frac{1}{2}$	-5,367
-1	$3\frac{1}{2}$	1,5	-3	$-3\frac{7}{8}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{15}{16}$	0,375	$-1\frac{1}{2}$	-1,992
0	4	0	0	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	4	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{16}$	0,375	$1\frac{1}{2}$	2,008
1	$4\frac{1}{2}$	1,5	3	$4\frac{1}{8}$
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{16}$	3,375	$4\frac{1}{2}$	6,633
2	8	6	6	10
$2\frac{1}{2}$	$11\frac{13}{16}$	9,375	$7\frac{1}{2}$	14,883
3	$17\frac{1}{2}$	13,5	9	$22\frac{1}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$25\frac{7}{16}$	18,375	$10\frac{1}{2}$	32,758
4	36	24	12	48
$4\frac{1}{2}$	$49\frac{9}{16}$	30,375	$13\frac{1}{2}$	69,258
5	$66\frac{1}{2}$	37,5	15	$98\frac{1}{8}$
$5\frac{1}{2}$	$87\frac{3}{16}$	45,375	$16\frac{1}{2}$	136,383
6	112	54	18	186
$6\frac{1}{2}$	$141\frac{5}{16}$	63,375	$19\frac{1}{2}$	249,133
7	$175\frac{1}{2}$	73,5	21	$328\frac{1}{8}$

• Zeichnung



Aufgabe (5)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x = -\frac{1}{6}(x + 3,464)x(x - 3,464)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2 = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 2)$$

$$f''(x) = -x = -x$$

$$f'''(x) = -1$$

$$F(x) = \int \left(-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right) dx = -\frac{1}{24}x^4 + x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left[-\frac{1}{6} \cdot \infty^3\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[-\frac{1}{6} \cdot (-\infty)^3\right] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{6} \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)$$

$$f(-x) = -\left(-\frac{1}{6} \cdot x^3 + 2 \cdot x\right)$$

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x = 0$$

$$x\left(-\frac{1}{6}x^2 + 2\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{6}x^2 + 2 = 0$$

$$-\frac{1}{6}x^2 + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-\frac{1}{6}x^2 = -2 \quad / : \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$x^2 = \frac{-2}{-\frac{1}{6}}$$

$$x = \pm\sqrt{12}$$

$$x_1 = 3,464 \quad x_2 = -3,464$$

$$x_1 = -3,464; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_3 = 3,464; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,464$	$< x <$	0	$< x <$	$3,464$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3,464[\cup]0; 3,464[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-3,464; 0[\cup]3,464; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2 \quad / : \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

$$x_4 = -2; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_5 = 2; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(-2) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt: } (-2 / -2\frac{2}{3})}$$

$$f''(2) = -2$$

$$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt: } (2 / 2\frac{2}{3})}$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

$x \in]-2; 2[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_6 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt:(0/0)

- Krümmung

	$x < 0$	0	$x > 0$
$f''(x)$	+	0	-

$x \in]-\infty; 0[$ $f''(x) > 0$ linksgekrümmt

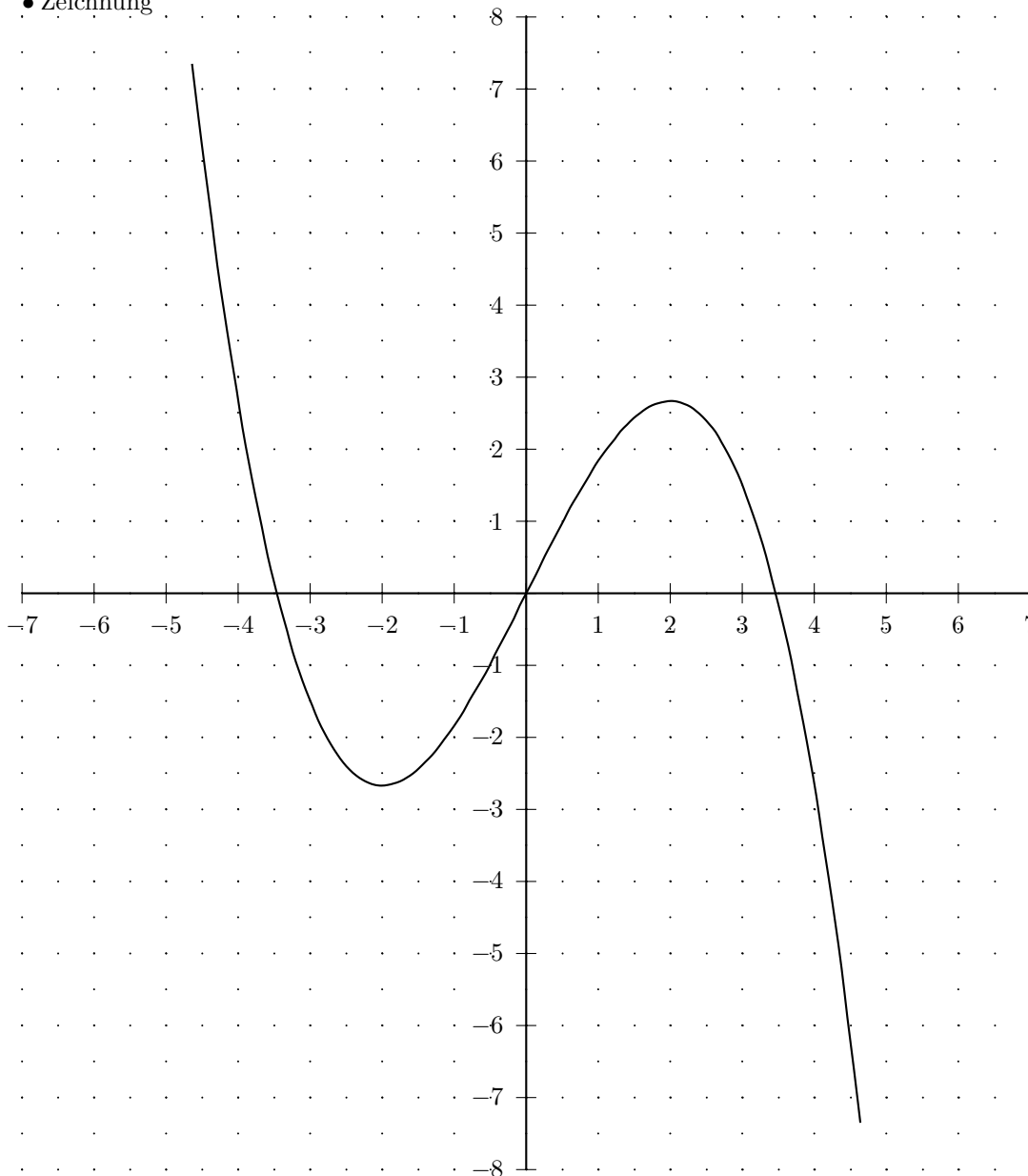
$x \in]0; \infty[$ $f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$43\frac{1}{6}$	-22,5	7	$-51\frac{1}{24}$
$-6\frac{1}{2}$	$32\frac{37}{48}$	-19,125	$6\frac{1}{2}$	-32,128
-6	24	-16	6	-18
$-5\frac{1}{2}$	$16\frac{35}{48}$	-13,125	$5\frac{1}{2}$	-7,878
-5	$10\frac{5}{6}$	-10,5	5	$-1\frac{1}{24}$
$-4\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{16}$	-8,125	$4\frac{1}{2}$	3,164
-4	$2\frac{2}{3}$	-6	4	$5\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{7}{48}$	-4,125	$3\frac{1}{2}$	5,997
-3	$-1\frac{1}{2}$	-2,5	3	$5\frac{5}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{19}{48}$	-1,125	$2\frac{1}{2}$	4,622
-2	$-2\frac{2}{3}$	0	2	$3\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{16}$	0,875	$1\frac{1}{2}$	2,039
-1	$-1\frac{5}{6}$	1,5	1	$\frac{23}{24}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{47}{48}$	1,875	$\frac{1}{2}$	0,247
0	0	2	0	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	2	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{47}{48}$	1,875	$-\frac{1}{2}$	0,247
1	$1\frac{5}{6}$	1,5	-1	$\frac{23}{24}$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{16}$	0,875	$-1\frac{1}{2}$	2,039
2	$2\frac{2}{3}$	0	-2	$3\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{19}{48}$	-1,125	$-2\frac{1}{2}$	4,622
3	$1\frac{1}{2}$	-2,5	-3	$5\frac{5}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{48}$	-4,125	$-3\frac{1}{2}$	5,997
4	$-2\frac{2}{3}$	-6	-4	$5\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	-8,125	$-4\frac{1}{2}$	3,164
5	$-10\frac{5}{6}$	-10,5	-5	$-1\frac{1}{24}$
$5\frac{1}{2}$	$-16\frac{35}{48}$	-13,125	$-5\frac{1}{2}$	-7,878
6	-24	-16	-6	-18
$6\frac{1}{2}$	$-32\frac{37}{48}$	-19,125	$-6\frac{1}{2}$	-32,128
7	$-43\frac{1}{6}$	-22,5	-7	$-51\frac{1}{24}$

• Zeichnung



Aufgabe (6)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 10)x$$

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 5 = 1\frac{1}{2}(x - 1,184)(x - 2,816)$$

$$f''(x) = 3x - 6 = 3(x - 2)$$

$$f'''(x) = 3$$

$$F(x) = \int (\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x) dx = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 - 3 \cdot (-x)^2 + 5 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x = 0$$

$$x(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-1}}{1}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$x_1 = 0$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	0	$< x$
$f(x)$	-	0	+

$x \in]0; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 5}}{2 \cdot 1\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{6}}{3}$$

$$x_{1/2} = \frac{6 \pm 2,449}{3}$$

$$x_1 = \frac{6 + 2,449}{3} \quad x_2 = \frac{6 - 2,449}{3}$$

$$x_1 = 2,816 \quad x_2 = 1,184$$

$x_2 = 1,184$; 1-fache Nullstelle

$x_3 = 2,816$; 1-fache Nullstelle

$$f''(1,184) = -2,449$$

$f''(1,184) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt: $(1,184/2,544)$

$f''(2,816) = 2,449 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt: $(2,816/1,456)$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	1,184	$< x <$	2,816	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; 1,184[\cup]2,816; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

$x \in]1,184; 2,816[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 3x - 6 = 0$$

$$3x - 6 = 0 \quad / +6$$

$$3x = 6 \quad / :3$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

$x_4 = 2$; 1-fache Nullstelle

$$f'''(2) = 2$$

$$f'''(2) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt:(2/2)

- Krümmung

	$x <$	2	$< x$
$f''(x)$	-	0	+

$x \in]2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

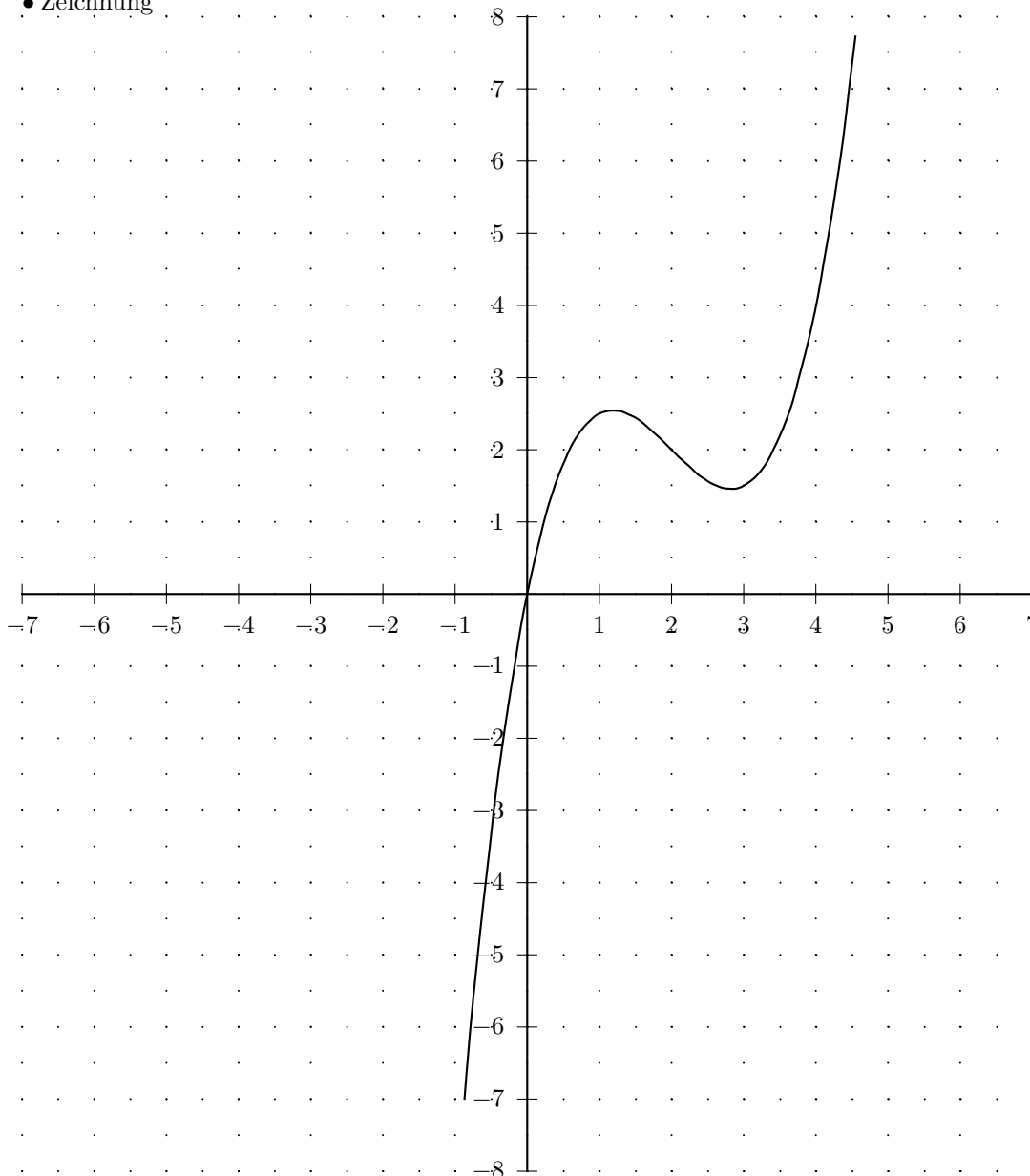
$x \in]-\infty; 2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-353\frac{1}{2}$	120,5	-27	$765\frac{5}{8}$
$-6\frac{1}{2}$	$-296\frac{9}{16}$	107,375	$-25\frac{1}{2}$	603,383
-6	-246	95	-24	468
$-5\frac{1}{2}$	$-201\frac{7}{16}$	83,375	$-22\frac{1}{2}$	356,383
-5	$-162\frac{1}{2}$	72,5	-21	$265\frac{5}{8}$
$-4\frac{1}{2}$	$-128\frac{13}{16}$	62,375	$-19\frac{1}{2}$	193,008
-4	-100	53	-18	136
$-3\frac{1}{2}$	$-75\frac{11}{16}$	44,375	$-16\frac{1}{2}$	92,258
-3	$-55\frac{1}{2}$	36,5	-15	$59\frac{5}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	$-39\frac{1}{16}$	29,375	$-13\frac{1}{2}$	36,133
-2	-26	23	-12	20
$-1\frac{1}{2}$	$-15\frac{15}{16}$	17,375	$-10\frac{1}{2}$	9,633
-1	$-8\frac{1}{2}$	12,5	-9	$3\frac{3}{8}$
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{5}{16}$	8,375	$-7\frac{1}{2}$	0,758
0	0	5	-6	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	5	-6	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{13}{16}$	2,375	$-4\frac{1}{2}$	0,508
1	$2\frac{1}{2}$	0,5	-3	$1\frac{5}{8}$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{16}$	-0,625	$-1\frac{1}{2}$	2,883
2	2	-1	0	4
$2\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	-0,625	$1\frac{1}{2}$	4,883
3	$1\frac{1}{2}$	0,5	3	$5\frac{5}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{16}$	2,375	$4\frac{1}{2}$	6,508
4	4	5	6	8
$4\frac{1}{2}$	$7\frac{5}{16}$	8,375	$7\frac{1}{2}$	10,758
5	$12\frac{1}{2}$	12,5	9	$15\frac{5}{8}$
$5\frac{1}{2}$	$19\frac{15}{16}$	17,375	$10\frac{1}{2}$	23,633
6	30	23	12	36
$6\frac{1}{2}$	$43\frac{1}{16}$	29,375	$13\frac{1}{2}$	54,133
7	$59\frac{1}{2}$	36,5	15	$79\frac{5}{8}$

• Zeichnung



$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$x_3 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(-1/0)$$

$$f''(1) = -6$$

$$f''(1) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(1/4)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

$$x \in]-1; 1[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; -1[\cup]1; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -6x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(0) = 2$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(0/2)$$

- Krümmung

	$x < 0$	0	$x > 0$
$f''(x)$	+	0	-

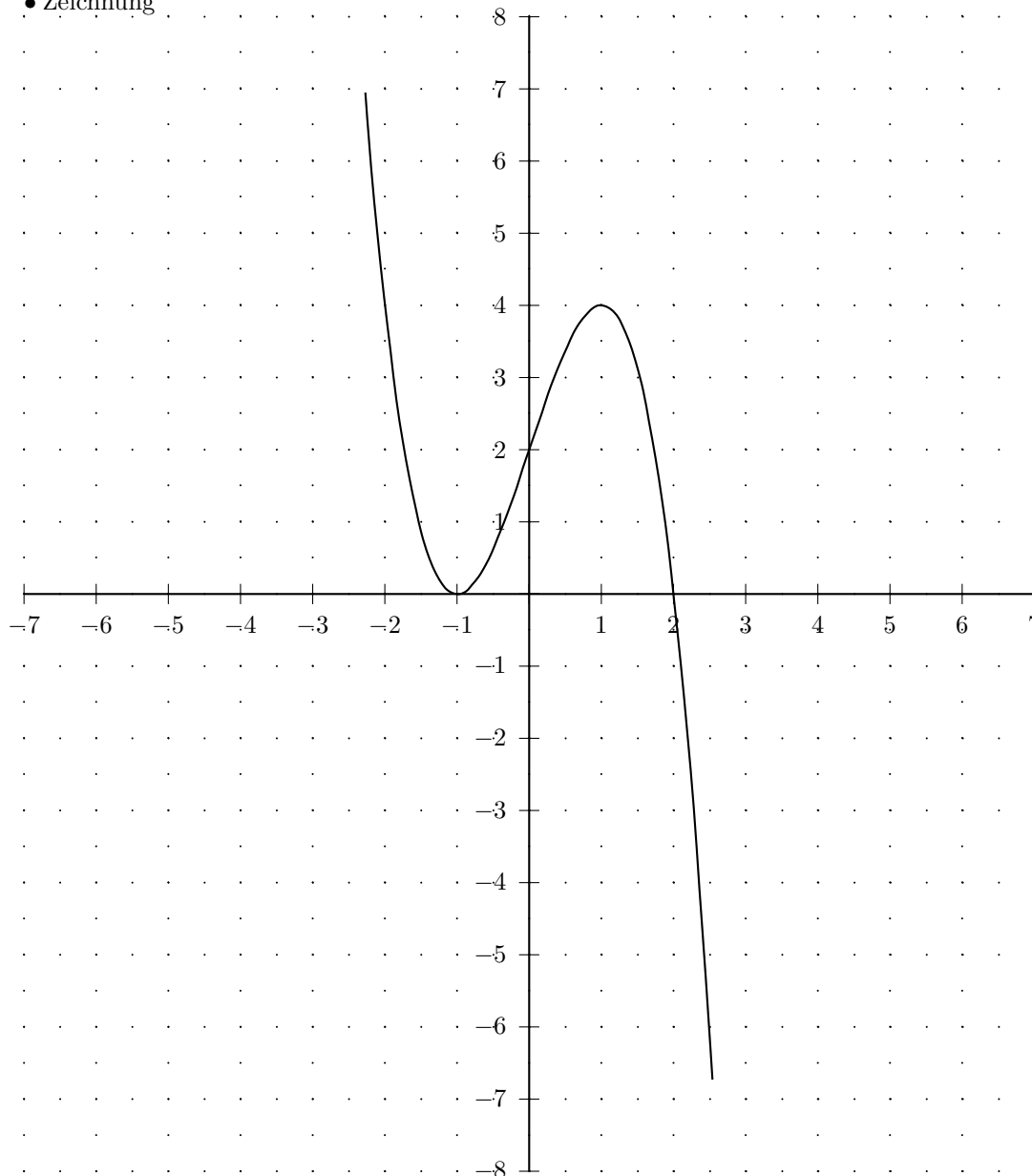
$$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

$$x \in]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	324	-144	42	$-540\frac{3}{4}$	0	2	3	0	0
$-6\frac{1}{2}$	$257\frac{1}{8}$	-123,75	39	$-395\frac{57}{64}$	$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$	2,25	-3	$1\frac{23}{64}$
-6	200	-105	36	-282	1	4	0	-6	$3\frac{1}{4}$
$-5\frac{1}{2}$	$151\frac{7}{8}$	-87,75	33	$-194\frac{25}{64}$	$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{8}$	-3,75	-9	$5\frac{7}{64}$
-5	112	-72	30	$-128\frac{3}{4}$	2	0	-9	-12	6
$-4\frac{1}{2}$	$79\frac{5}{8}$	-57,75	27	$-81\frac{9}{64}$	$2\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{8}$	-15,75	-15	$4\frac{39}{64}$
-4	54	-45	24	-48	3	-16	-24	-18	$-\frac{3}{4}$
$-3\frac{1}{2}$	$34\frac{3}{8}$	-33,75	21	$-26\frac{9}{64}$	$3\frac{1}{2}$	$-30\frac{3}{8}$	-33,75	-21	$-12\frac{9}{64}$
-3	20	-24	18	$-12\frac{3}{4}$	4	-50	-45	-24	-32
$-2\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{8}$	-15,75	15	$-5\frac{25}{64}$	$4\frac{1}{2}$	$-75\frac{5}{8}$	-57,75	-27	$-63\frac{9}{64}$
-2	4	-9	12	-2	5	-108	-72	-30	$-108\frac{3}{4}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	-3,75	9	$-\frac{57}{64}$	$5\frac{1}{2}$	$-147\frac{7}{8}$	-87,75	-33	$-172\frac{25}{64}$
-1	0	0	6	$-\frac{3}{4}$	6	-196	-105	-36	-258
$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	2,25	3	$-\frac{41}{64}$	$6\frac{1}{2}$	$-253\frac{1}{8}$	-123,75	-39	$-369\frac{57}{64}$
0	2	3	0	0	7	-320	-144	-42	$-512\frac{3}{4}$

• Zeichnung



Aufgabe (8)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4 = -(x+1)(x-2)^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$$f''(x) = -6x + 6 = -6(x-1)$$

$$f'''(x) = -6$$

$$F(x) = \int (-x^3 + 3x^2 - 4) dx = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -1 \cdot (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 - 4$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{r} (-x^3 + 3x^2 - 4) : (x+1) = -x^2 + 4x - 4 \\ \underline{-(-x^3 - x^2)} \\ 4x^2 - 4 \\ \underline{-(4x^2 + 4x)} \\ -4x - 4 \\ \underline{-(-4x - 4)} \\ 0 \end{array}$$

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 0}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 0}{-2} \quad x_2 = \frac{-4 - 0}{-2}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2$$

$$x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 2; \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 2$	2	$x > 2$
$f(x)$	+	0	-	0	-

$x \in]-\infty; -1[\cup]2; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-1; 2[\cup]2; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$$

$$x(-3x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -3x + 6 = 0$$

$$-3x + 6 = 0 \quad / -6$$

$$-3x = -6 \quad / : (-3)$$

$$x = \frac{-6}{-3}$$

$$x = 2$$

$$x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(0/-4)$$

$$f''(2) = -6$$

$$f''(2) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(2/0)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	0	+	-

$$x \in]0; 2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; 0[\cup]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -6x + 6 = 0$$

$$-6x + 6 = 0 \quad / -6$$

$$-6x = -6 \quad / : (-6)$$

$$x = \frac{-6}{-6}$$

$$x = 1$$

$$x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(1) = -2$$

$$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(1/-2)$$

- Krümmung

	$x < 1$	1	$x > 1$
$f''(x)$	+	0	-

$$x \in]-\infty; 1[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

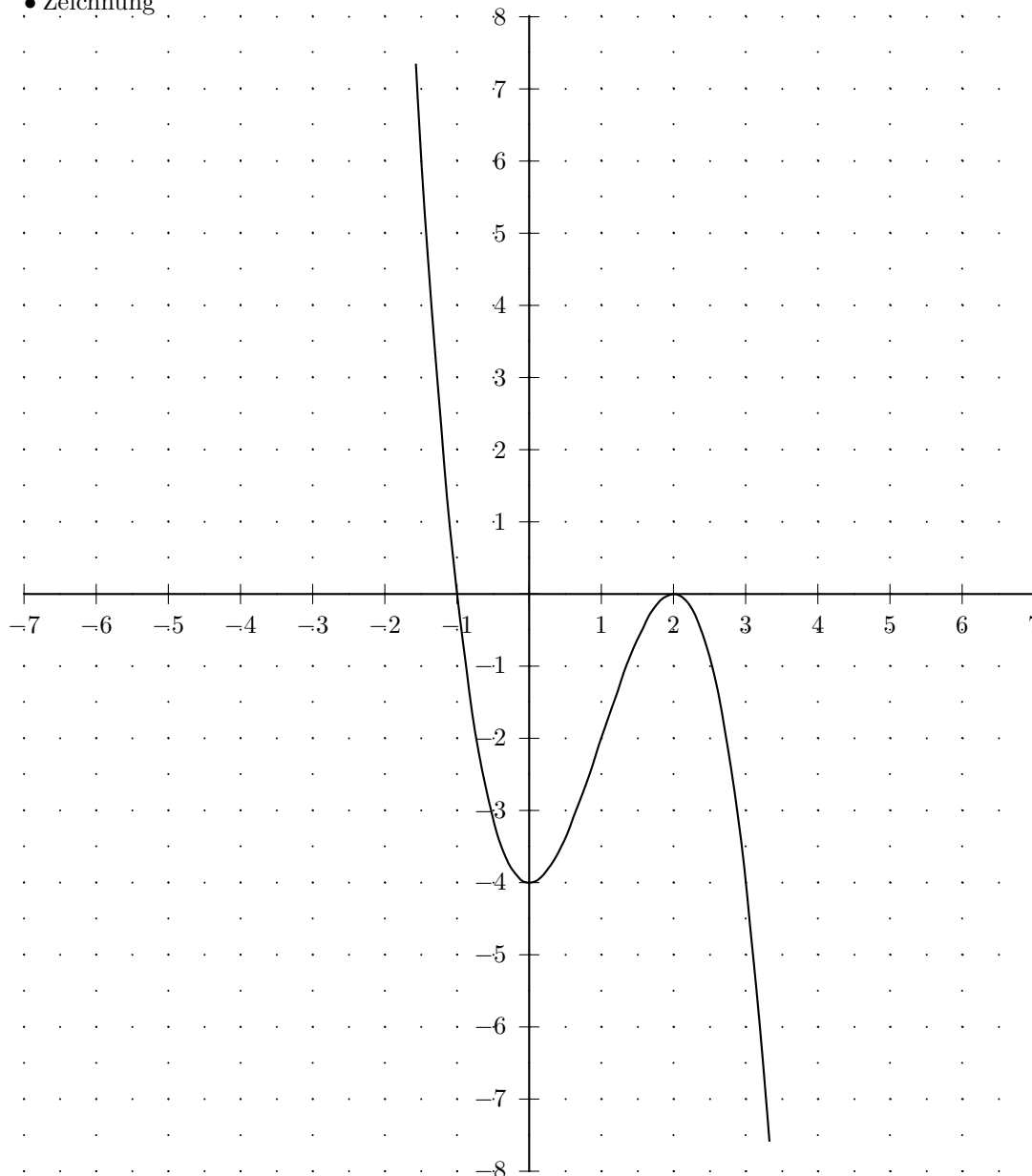
$$x \in]1; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	486	-189	48	$-915\frac{1}{4}$
$-6\frac{1}{2}$	$397\frac{3}{8}$	-165,75	45	$-694\frac{57}{64}$
-6	320	-144	42	-516
$-5\frac{1}{2}$	$253\frac{1}{8}$	-123,75	39	$-373\frac{9}{64}$
-5	196	-105	36	$-261\frac{1}{4}$
$-4\frac{1}{2}$	$147\frac{7}{8}$	-87,75	33	$-175\frac{41}{64}$
-4	108	-72	30	-112
$-3\frac{1}{2}$	$75\frac{5}{8}$	-57,75	27	$-66\frac{25}{64}$
-3	50	-45	24	$-35\frac{1}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$30\frac{3}{8}$	-33,75	21	$-15\frac{25}{64}$
-2	16	-24	18	-4
$-1\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{8}$	-15,75	15	$1\frac{23}{64}$
-1	0	-9	12	$2\frac{3}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	-3,75	9	$1\frac{55}{64}$
0	-4	0	6	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-4	0	6	0
$\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{8}$	2,25	3	$-1\frac{57}{64}$
1	-2	3	0	$-3\frac{1}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	2,25	-3	$-3\frac{57}{64}$
2	0	0	-6	-4
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	-3,75	-9	$-4\frac{9}{64}$
3	-4	-9	-12	$-5\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	-15,75	-15	$-8\frac{41}{64}$
4	-20	-24	-18	-16
$4\frac{1}{2}$	$-34\frac{3}{8}$	-33,75	-21	$-29\frac{25}{64}$
5	-54	-45	-24	$-51\frac{1}{4}$
$5\frac{1}{2}$	$-79\frac{5}{8}$	-57,75	-27	$-84\frac{25}{64}$
6	-112	-72	-30	-132
$6\frac{1}{2}$	$-151\frac{7}{8}$	-87,75	-33	$-197\frac{41}{64}$
7	-200	-105	-36	$-285\frac{1}{4}$

• Zeichnung



Aufgabe (9)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x = 4(x+2)x(x - \frac{3}{4})$$

$$f'(x) = 12x^2 + 10x - 6 = 12(x+1,237)(x-0,404)$$

$$f''(x) = 24x + 10 = 24(x + \frac{5}{12})$$

$$f'''(x) = 24$$

$$F(x) = \int (4x^3 + 5x^2 - 6x) dx = x^4 + 1\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [4 \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [4 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 4 \cdot (-x)^3 + 5 \cdot (-x)^2 - 6 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x = 0$$

$$x(4x^2 + 5x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 4}$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8}$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm 11}{8}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 11}{8} \quad x_2 = \frac{-5 - 11}{8}$$

$$x_1 = \frac{3}{4} \quad x_2 = -2$$

$$x_1 = -2; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = \frac{3}{4}; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	$\frac{3}{4}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x \in] -2; 0[\cup] \frac{3}{4}; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in] -\infty; -2[\cup] 0; \frac{3}{4}[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 12x^2 + 10x - 6 = 0$$

$$12x^2 + 10x - 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-6)}}{2 \cdot 12}$$

$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{388}}{24}$$

$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm 19,698}{24}$$

$$x_1 = \frac{-10 + 19,698}{24} \quad x_2 = \frac{-10 - 19,698}{24}$$

$$x_1 = 0,404 \quad x_2 = -1,237$$

$$x_4 = -1,237; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 0,404; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-1,237) = -19,698$$

$$f''(-1,237) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1,237/7, 502)$$

$$f''(0,404) = 19,698 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (0,404/ -1,344)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,237$	$< x <$	$0,404$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; -1,237[\cup]0,404; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-1,237; 0,404[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 24x + 10 = 0$$

$$24x + 10 = 0 \quad / -10$$

$$24x = -10 \quad / :24$$

$$x = \frac{-10}{24}$$

$$x = -\frac{10}{24}$$

$$x_6 = -\frac{5}{12}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-\frac{5}{12}) = 3,079$$

$$f'''(-\frac{5}{12}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-\frac{5}{12}/3,079)$$

- Krümmung

	$x <$	$-\frac{5}{12}$	$< x$
$f''(x)$	-	0	+

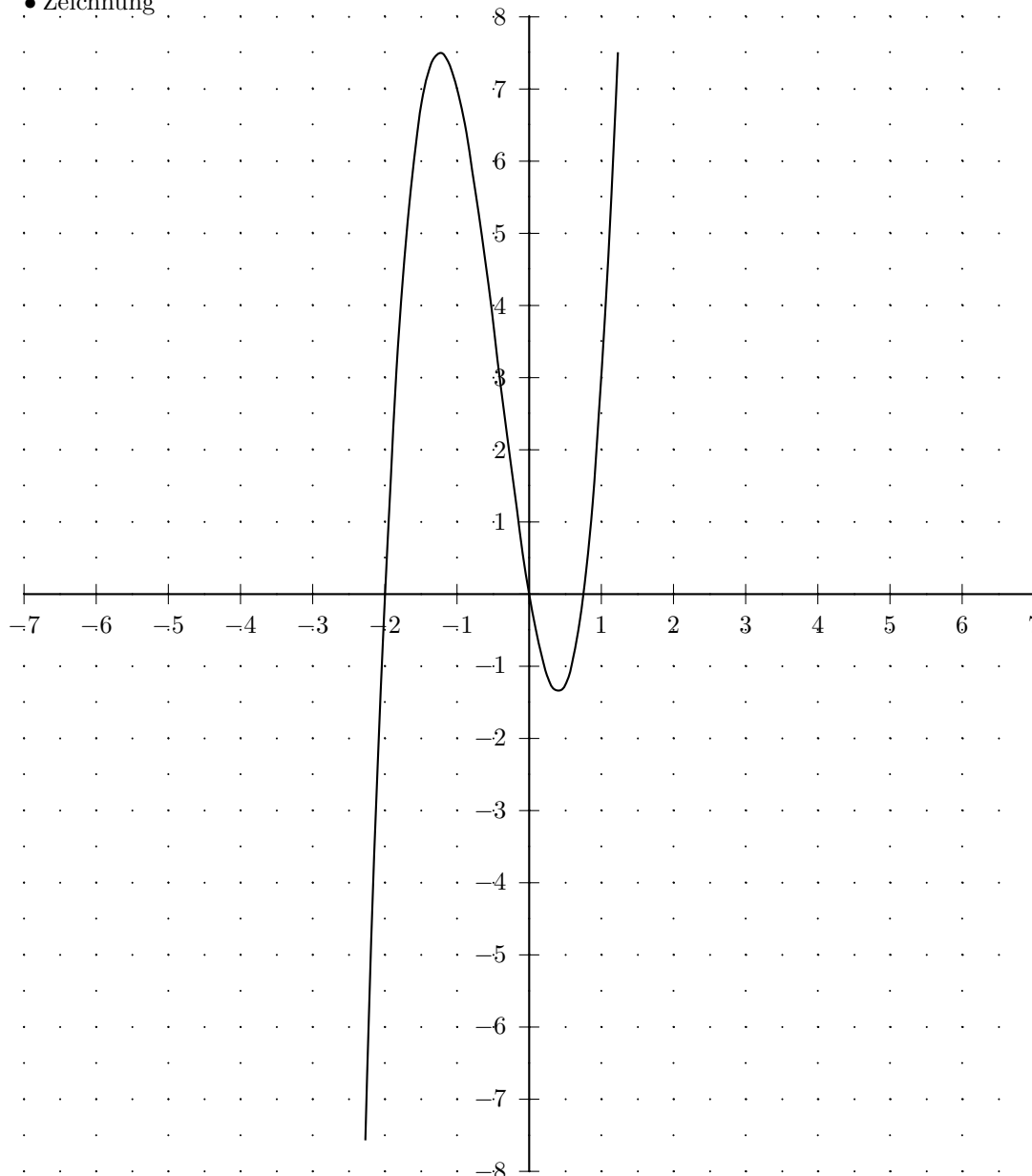
$$x \in]-\frac{5}{12}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

$$x \in]-\infty; -\frac{5}{12}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-1085	512,001	-158	$1682\frac{1}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$-848\frac{1}{4}$	436,001	-146	$1200\frac{29}{48}$
-6	-648	366,001	-134	828
$-5\frac{1}{2}$	$-481\frac{1}{4}$	302,001	-122	$547\frac{1}{48}$
-5	-345	244,001	-110	$341\frac{1}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$-236\frac{1}{4}$	192,001	-98	$197\frac{7}{16}$
-4	-152	146,001	-86	$101\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-89\frac{1}{4}$	106,001	-74	$41\frac{41}{48}$
-3	-45	72,001	-62	9
$-2\frac{1}{2}$	$-16\frac{1}{4}$	44,001	-50	$-5\frac{35}{48}$
-2	0	22,001	-38	$-9\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	6,001	-26	$-7\frac{5}{16}$
-1	7	-3,999	-14	$-3\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	-7,999	-2	$-\frac{43}{48}$
0	0	-5,999	10	0
0	0	-5,999	10	0
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	2,001	22	$-\frac{23}{48}$
1	3	16,001	34	$-\frac{1}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	36,001	46	$3\frac{15}{16}$
2	40	62,001	58	$17\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$78\frac{3}{4}$	94,001	70	$46\frac{17}{48}$
3	135	132,001	82	99
$3\frac{1}{2}$	$211\frac{3}{4}$	176,001	94	$184\frac{37}{48}$
4	312	226,001	106	$314\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$438\frac{3}{4}$	282,001	118	$501\frac{3}{16}$
5	595	344,001	130	$758\frac{1}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$783\frac{3}{4}$	412,001	142	$1101\frac{29}{48}$
6	1008	486,001	154	1548
$6\frac{1}{2}$	$1270\frac{3}{4}$	566,001	166	$2116\frac{1}{48}$
7	1575	652,001	178	$2825\frac{2}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (10)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = -\frac{1}{2}(x+2)^2(x-3)$$

$$f'(x) = -1\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = -1\frac{1}{2}(x+2)(x-1\frac{1}{3})$$

$$f''(x) = -3x - 1 = -3(x + \frac{1}{3})$$

$$f'''(x) = -3$$

$$F(x) = \int (-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6)dx = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + 6x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot (-x)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-x)^2 + 4 \cdot (-x) + 6$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -2

$$\begin{array}{r} (-\frac{1}{2}x^3 \quad -\frac{1}{2}x^2 \quad +4x \quad +6) : (x+2) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \\ -(-\frac{1}{2}x^3 \quad -x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x^2 \quad +4x \quad +6 \\ -(\frac{1}{2}x^2 \quad +x) \\ \hline 3x \quad +6 \\ -(3x \quad +6) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 3}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}}}{-1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}}{-1}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}}{-1} \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}}{-1}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 3$$

$$x_1 = -2; \quad \underline{2\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 3; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$$x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 3[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in]3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -1\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$$

$$-1\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1\frac{1}{2}) \cdot 4}}{2 \cdot (-1\frac{1}{2})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{25}}{-3}$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm 5}{-3}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{-3} \quad x_2 = \frac{1-5}{-3}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 1\frac{1}{3}$$

$$x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-2) = 5 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-2/0)$$

$$f''(1\frac{1}{3}) = -5$$

$$f''(1\frac{1}{3}) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (1\frac{1}{3}/9\frac{7}{27})$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$x > 1\frac{1}{3}$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

$$x \in]-2; 1\frac{1}{3}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; -2[\cup]1\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -3x - 1 = 0$$

$$-3x - 1 = 0 \quad / +1$$

$$-3x = 1 \quad / : (-3)$$

$$x = \frac{1}{-3}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$x_5 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-\frac{1}{3}) = 4\frac{17}{27}$$

$$f'''(-\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-\frac{1}{3}/4\frac{17}{27})$$

- Krümmung

	$x < -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$x > -\frac{1}{3}$
$f''(x)$	+	0	-

$$x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

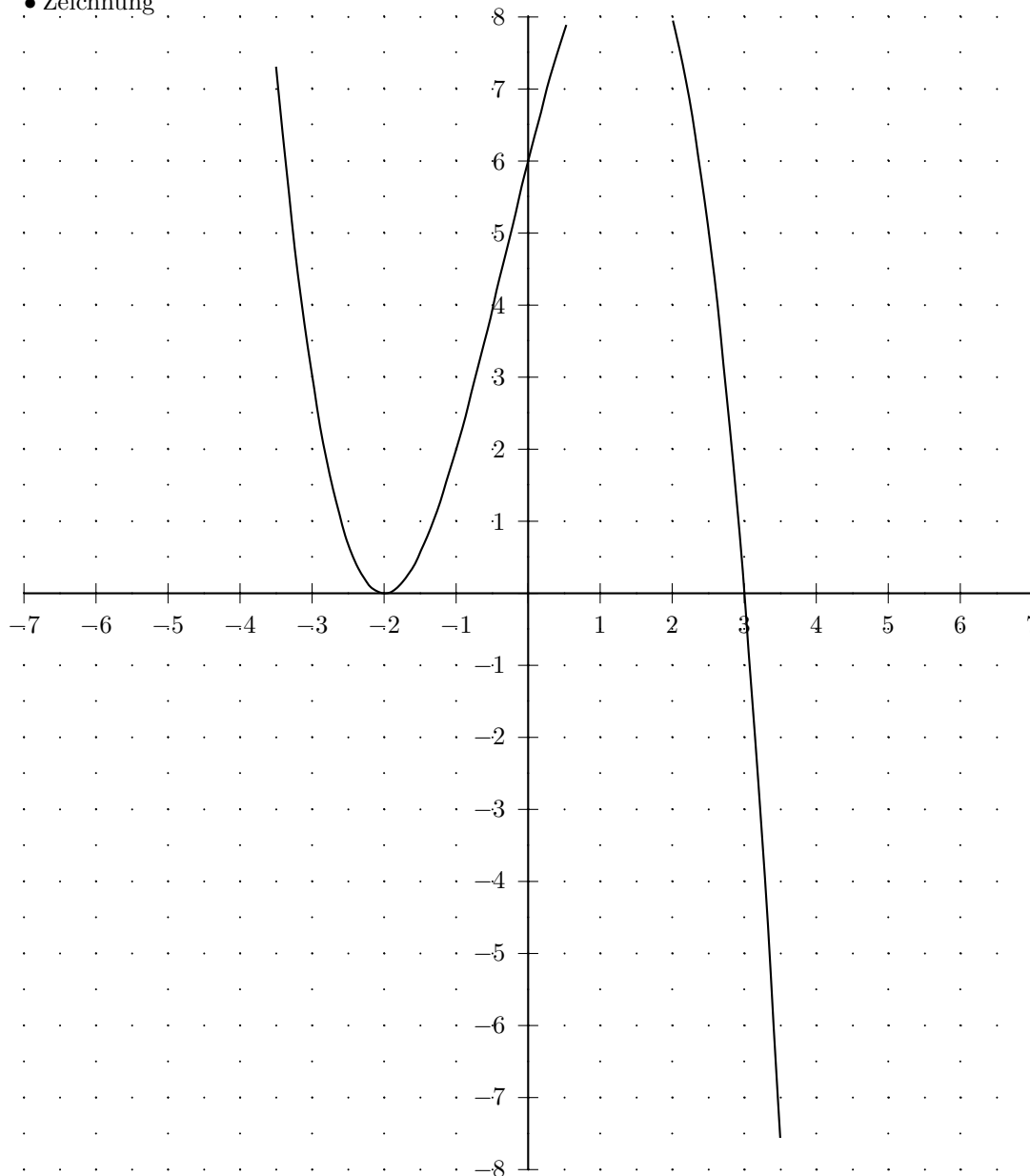
$$x \in]-\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	125	-62,5	20	$-186\frac{23}{24}$
$-6\frac{1}{2}$	$96\frac{3}{16}$	-52,875	$18\frac{1}{2}$	-131,862
-6	72	-44	17	-90
$-5\frac{1}{2}$	$52\frac{1}{16}$	-35,875	$15\frac{1}{2}$	-59,154
-5	36	-28,5	14	$-37\frac{7}{24}$
$-4\frac{1}{2}$	$23\frac{7}{16}$	-21,875	$12\frac{1}{2}$	-22,57
-4	14	-16	11	$-13\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$7\frac{5}{16}$	-10,875	$9\frac{1}{2}$	-8,112
-3	3	-6,5	8	$-5\frac{5}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$	-2,875	$6\frac{1}{2}$	-4,779
-2	0	0	5	$-4\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	2,125	$3\frac{1}{2}$	-4,57
-1	2	3,5	2	$-3\frac{23}{24}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{15}{16}$	4,125	$\frac{1}{2}$	-2,487
0	6	4	-1	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	6	4	-1	0
$\frac{1}{2}$	$7\frac{13}{16}$	3,125	$-2\frac{1}{2}$	3,471
1	9	1,5	-4	$7\frac{17}{24}$
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{16}$	-0,875	$-5\frac{1}{2}$	12,305
2	8	-4	-7	$16\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{16}$	-7,875	$-8\frac{1}{2}$	20,013
3	0	-12,5	-10	$21\frac{3}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$-7\frac{9}{16}$	-17,875	$-11\frac{1}{2}$	19,596
4	-18	-24	-13	$13\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$-31\frac{11}{16}$	-30,875	$-14\frac{1}{2}$	1,055
5	-49	-38,5	-16	$-18\frac{23}{24}$
$5\frac{1}{2}$	$-70\frac{5}{16}$	-46,875	$-17\frac{1}{2}$	-48,612
6	-96	-56	-19	-90
$6\frac{1}{2}$	$-126\frac{7}{16}$	-65,875	$-20\frac{1}{2}$	-145,404
7	-162	-76,5	-22	$-217\frac{7}{24}$

• Zeichnung



Aufgabe (11)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 3(x-0,451)(x-2,215)$$

$$f''(x) = 6x - 8 = 6(x - 1\frac{1}{3})$$

$$f'''(x) = 6$$

$$F(x) = \int (x^3 - 4x^2 + 3x) dx = \frac{1}{4}x^4 - 1\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^3 - 4 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$1x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4}}{4 \pm \frac{2}{2}}$$

$$x_1 = \frac{4 + \frac{2}{2}}{2} \quad x_2 = \frac{4 - \frac{2}{2}}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

$$x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$	
$f(x)$	-	0	+	0	+

$x \in]0; 1[\cup]3; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[\cup]1; 3[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$3x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$$

$$x_{1/2} = \frac{+8 \pm \sqrt{28}}{8 \pm 5,292}$$

$$x_1 = \frac{8 + 5,292}{6} \quad x_2 = \frac{8 - 5,292}{6}$$

$$x_1 = 2,215 \quad x_2 = 0,451$$

$$x_4 = 0,451; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 2, 215; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(0, 451) = -5, 292$$

$$f''(0, 451) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(0, 451/0, 631)$$

$$f''(2, 215) = 5, 292 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(2, 215/- 2, 113)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$0, 451$	$< x <$	$2, 215$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x \in]-\infty; 0, 451[\cup]2, 215; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]0, 451; 2, 215[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 6x - 8 = 0$$

$$6x - 8 = 0 \quad / + 8$$

$$6x = 8 \quad / : 6$$

$$x = \frac{8}{6}$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

$$x_6 = 1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(1\frac{1}{3}) = -\frac{20}{27}$$

$$f'''(1\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(1\frac{1}{3}/ - \frac{20}{27})$$

- Krümmung

	$x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

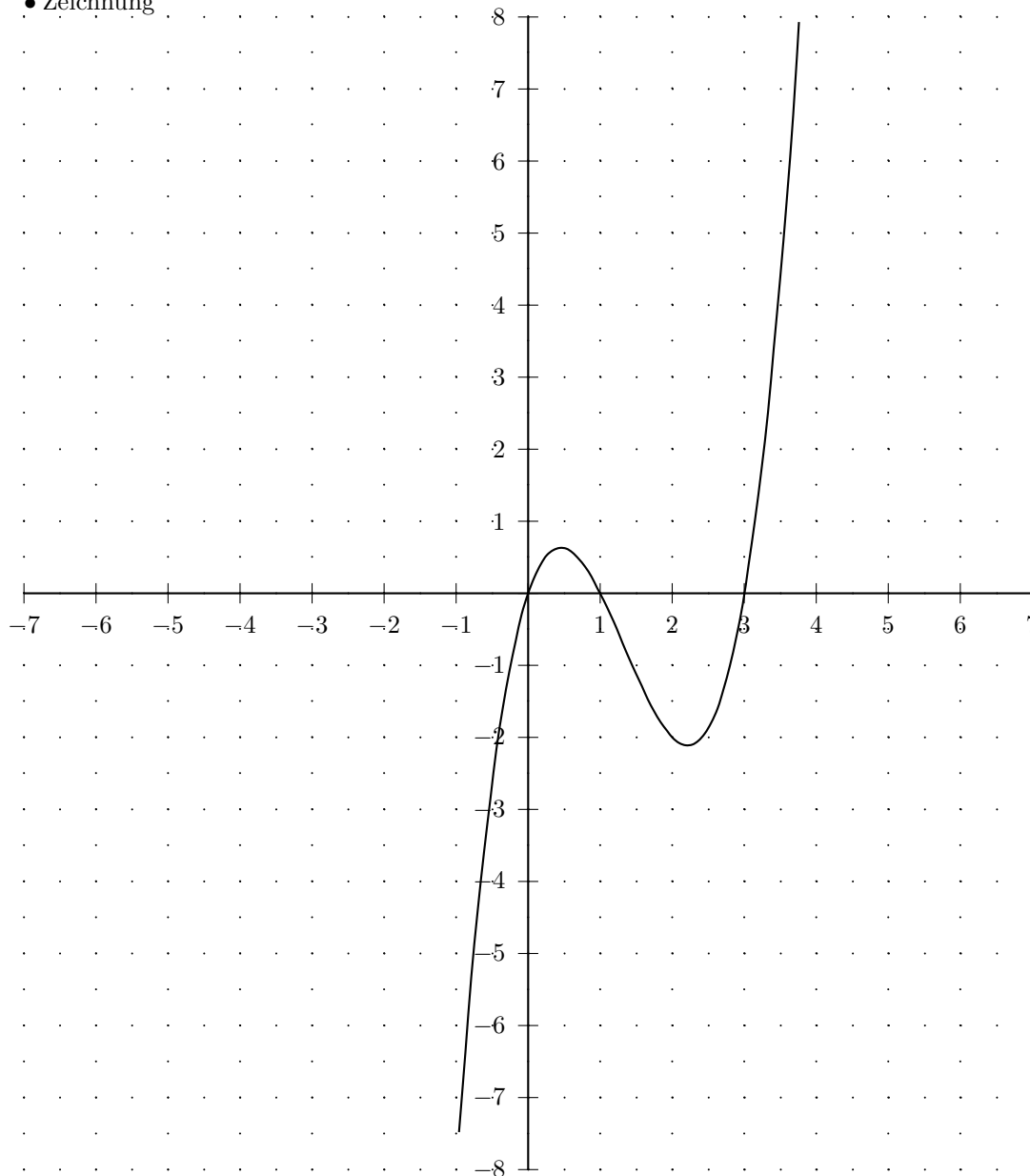
$$x \in]1\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

$$x \in]-\infty; 1\frac{1}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-560	206	-50	$1131\frac{1}{12}$
$-6\frac{1}{2}$	$-463\frac{1}{8}$	181,75	-47	875,807
-6	-378	159	-44	666
$-5\frac{1}{2}$	$-303\frac{7}{8}$	137,75	-41	495,974
-5	-240	118	-38	$360\frac{5}{12}$
$-4\frac{1}{2}$	$-185\frac{5}{8}$	99,75	-35	$254\frac{25}{64}$
-4	-140	83	-32	$173\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-102\frac{3}{8}$	67,75	-29	113,057
-3	-72	54	-26	$69\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$-48\frac{1}{8}$	41,75	-23	39,974
-2	-30	31	-20	$20\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-16\frac{7}{8}$	21,75	-17	$9\frac{9}{64}$
-1	-8	14	-14	$3\frac{1}{12}$
$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{5}{8}$	7,75	-11	0,557
0	0	3	-8	0
0	0	3	-8	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	-0,25	-5	0,224
1	0	-2	-2	$\frac{5}{12}$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{8}$	-2,25	1	$\frac{9}{64}$
2	-2	-1	4	$-\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{8}$	1,75	7	-1,693
3	0	6	10	$-2\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{8}$	11,75	13	-1,276
4	12	19	16	$2\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$23\frac{5}{8}$	27,75	19	$11\frac{25}{64}$
5	40	38	22	$27\frac{1}{12}$
$5\frac{1}{2}$	$61\frac{7}{8}$	49,75	25	52,307
6	90	63	28	90
$6\frac{1}{2}$	$125\frac{1}{8}$	77,75	31	143,474
7	168	94	34	$216\frac{5}{12}$

• Zeichnung



Aufgabe (12)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55} = -\frac{27}{55}(x+4)(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = -1\frac{26}{55}x^2 - 1\frac{53}{55}x + 5\frac{2}{5} = -1\frac{26}{55}(x+2,694)(x-1,361)$$

$$f''(x) = -2\frac{52}{55}x - 1\frac{53}{55} = -2\frac{52}{55}(x + \frac{2}{3})$$

$$f'''(x) = -2\frac{52}{55}$$

$$F(x) = \int (-\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55})dx = -0,123x^4 - \frac{18}{55}x^3 + 2\frac{7}{10}x^2 + 5\frac{49}{55}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{27}{55} \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{27}{55} \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{27}{55} \cdot (-x)^3 - \frac{54}{55} \cdot (-x)^2 + 5\frac{2}{5} \cdot (-x) + 5\frac{49}{55}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55} = 0$$

$$-\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55} = 0$$

Numerische Suche:

$$x_1 = -4; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -1; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 3; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichen-tabelle:

	$x <$	-4	$< x <$	-1	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x \in]-\infty; -4[\cup]-1; 3[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in]-4; -1[\cup]3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -1\frac{26}{55}x^2 - 1\frac{53}{55}x + 5\frac{2}{5} = 0$$

$$-1\frac{26}{55}x^2 - 1\frac{53}{55}x + 5\frac{2}{5} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{53}{55} \pm \sqrt{(-1\frac{53}{55})^2 - 4 \cdot (-1\frac{26}{55}) \cdot 5\frac{2}{5}}}{2 \cdot (-1\frac{26}{55})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{53}{55} \pm \sqrt{35,667}}{-2\frac{52}{55}}$$

$$x_{1/2} = \frac{1\frac{53}{55} \pm 5,972}{-2\frac{52}{55}}$$

$$x_1 = \frac{1\frac{53}{55} + 5,972}{-2\frac{52}{55}} \quad x_2 = \frac{1\frac{53}{55} - 5,972}{-2\frac{52}{55}}$$

$$x_1 = -2,694 \quad x_2 = 1,361$$

$$x_4 = -2,694; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 1,361; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f''(-2,694) = 5,972 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-2,694 / -6,184)$$

$$f''(1,361) = -5,972$$

$$f''(1,361) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (1,361 / 10,184)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,694$	$< x <$	$1,361$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-2,694; 1,361[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -2,694[\cup]1,361; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$$f''(x) = -2\frac{52}{55}x - 1\frac{53}{55} = 0$$

$$-2\frac{52}{55}x - 1\frac{53}{55} = 0 \quad / + 1\frac{53}{55}$$

$$-2\frac{52}{55}x = 1\frac{53}{55} \quad / : \left(-2\frac{52}{55}\right)$$

$$x = \frac{1\frac{53}{55}}{-2\frac{52}{55}}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$x_6 = -\frac{2}{3}; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-\frac{2}{3}) = 2$$

$$f'''(-\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-\frac{2}{3}/2)$$

• Krümmung

	$x <$	$-\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -\frac{2}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

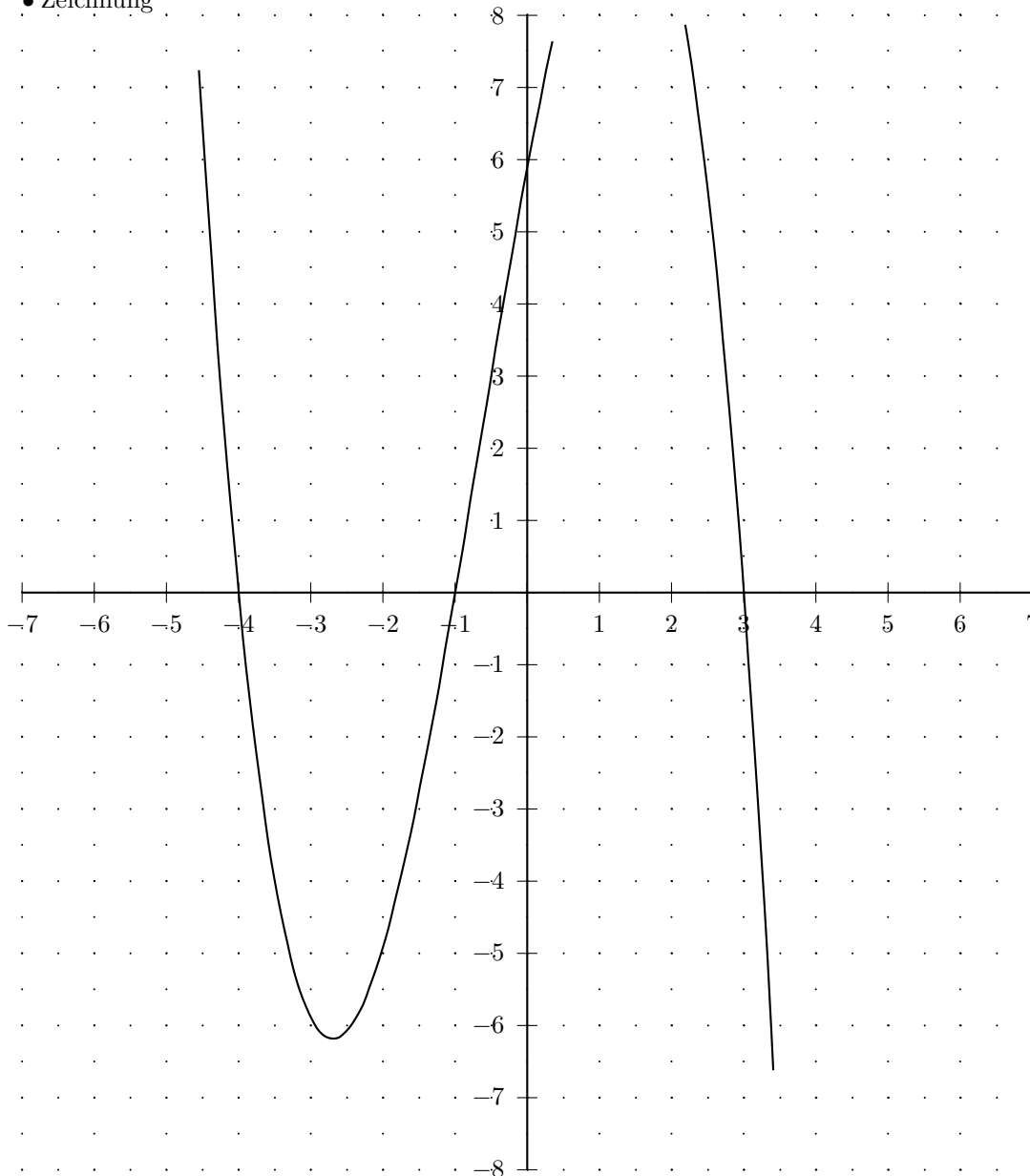
$x \in]-\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$88\frac{4}{11}$	-53,018	$18\frac{36}{55}$	$-91\frac{7}{20}$
$-6\frac{1}{2}$	$64\frac{1}{8}$	-44,059	$17\frac{2}{11}$	-53,414
-6	$44\frac{2}{11}$	-35,837	$15\frac{39}{55}$	$-26\frac{28}{55}$
$-5\frac{1}{2}$	28,166	-28,35	$14\frac{13}{55}$	$-8\frac{37}{64}$
-5	$15\frac{39}{55}$	-21,6	$12\frac{42}{55}$	$2\frac{1}{4}$
$-4\frac{1}{2}$	$6\frac{39}{88}$	-15,587	$11\frac{16}{55}$	7,663
-4	0	-10,309	$9\frac{9}{11}$	$9\frac{9}{55}$
$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{87}{88}$	-5,768	$8\frac{19}{55}$	8,072
-3	$-5\frac{49}{55}$	-1,964	$6\frac{48}{55}$	$5\frac{23}{44}$
$-2\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{40}$	1,104	$5\frac{2}{5}$	2,467
-2	$-4\frac{10}{11}$	3,436	$3\frac{51}{55}$	$-\frac{18}{55}$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{67}{88}$	5,032	$2\frac{9}{11}$	-2,278
-1	0	5,891	$\frac{54}{55}$	-2,986
$-\frac{1}{2}$	3,007	6,013	$-\frac{27}{55}$	-2,237
0	$5\frac{49}{55}$	5,4	$-1\frac{53}{55}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$5\frac{49}{55}$	5,4	$-1\frac{53}{55}$	0
$\frac{1}{2}$	$8\frac{25}{88}$	4,05	$-3\frac{24}{55}$	3,572
1	$9\frac{9}{11}$	1,963	$-4\frac{10}{11}$	8,141
$1\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{8}$	-0,859	$-6\frac{21}{55}$	13,186
2	$8\frac{46}{55}$	-4,418	$-7\frac{47}{55}$	18
$2\frac{1}{2}$	5,584	-8,714	$-9\frac{18}{55}$	21,695
3	0	-13,746	$-10\frac{4}{5}$	23,195
$3\frac{1}{2}$	$-8\frac{25}{88}$	-19,514	$-12\frac{3}{11}$	21,245
4	$-19\frac{7}{11}$	-26,018	$-13\frac{41}{55}$	$14\frac{2}{5}$
$4\frac{1}{2}$	$-34\frac{17}{40}$	-33,259	$-15\frac{12}{55}$	1,036
5	$-53\frac{1}{55}$	-41,237	$-16\frac{38}{55}$	$-20\frac{29}{44}$
$5\frac{1}{2}$	$-75\frac{69}{88}$	-49,95	$-18\frac{9}{55}$	-52,678
6	$-103\frac{1}{11}$	-59,4	$-19\frac{7}{11}$	$-97\frac{1}{5}$
$6\frac{1}{2}$	$-135\frac{27}{88}$	-69,587	$-21\frac{6}{55}$	-156,587
7	$-172\frac{4}{5}$	-80,509	$-22\frac{32}{55}$	$-233\frac{17}{44}$

• Zeichnung



Aufgabe (13)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5} = \frac{1}{10}(x+4)(x+3)(x-4)$$

$$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{5}x - 1\frac{3}{5} = \frac{3}{10}(x+3,517)(x-1,517)$$

$$f''(x) = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}(x+1)$$

$$f'''(x) = \frac{3}{5}$$

$$F(x) = \int (\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5})dx = \frac{1}{40}x^4 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{4}{5}x^2 - 4\frac{4}{5}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{10} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{10} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{10} \cdot (-x)^3 + \frac{3}{10} \cdot (-x)^2 - 1\frac{3}{5} \cdot (-x) - 4\frac{4}{5}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5} = 0$$

$$\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5} = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -3

$$\begin{array}{r} (\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5}) : (x+3) = \frac{1}{10}x^2 - 0x - 1\frac{3}{5} \\ -(\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2) \\ \hline -0x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5} \\ -(-0x^2 - 0x) \\ \hline -1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5} \\ -(-1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5}) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{10}x^2 - 0x - 1\frac{3}{5} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot (-1\frac{3}{5})}}{2 \cdot \frac{1}{10}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+0 \pm \sqrt{\frac{16}{25}}}{\frac{1}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{0 \pm \frac{4}{5}}{\frac{1}{5}}$$

$$x_1 = \frac{0 + \frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} \quad x_2 = \frac{0 - \frac{4}{5}}{\frac{1}{5}}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

$x_1 = -4$; 1-fache Nullstelle
 $x_2 = -3$; 1-fache Nullstelle
 $x_3 = 4$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x < -4$	-4	$-4 < x < -3$	-3	$-3 < x < 4$	4	$x > 4$
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$x \in]-4; -3[\cup]4; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -4[\cup]-3; 4[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{5}x - 1\frac{3}{5} = 0$$

$$\frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{5}x - 1\frac{3}{5} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{3^2}{5} - 4 \cdot \frac{3}{10} \cdot (-1\frac{3}{5})}}{2 \cdot \frac{3}{10}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{3}{5} \pm \sqrt{2\frac{7}{25}}}{\frac{3}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{3}{5} \pm 1,51}{\frac{3}{5}}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{3}{5} + 1,51}{\frac{3}{5}} \quad x_2 = \frac{-\frac{3}{5} - 1,51}{\frac{3}{5}}$$

$$x_1 = 1,517 \quad x_2 = -3,517$$

$$x_4 = -3,517; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 1,517; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-3,517) = -1,51$$

$$f''(-3,517) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(-3,517/0,188)$$

$$f''(1,517) = 1,51 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(1,517/-6,188)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-3,517$	$< x <$	$1,517$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; -3,517[\cup]1,517; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-3,517; 1,517[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5} = 0$$

$$\frac{3}{5}x + \frac{3}{5} = 0 \quad / -\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5}x = -\frac{3}{5} \quad / : \frac{3}{5}$$

$$x = -\frac{3}{5}$$

$$x = -1$$

$$x_6 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-1) = -3$$

$$f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(-1/-3)$$

- Krümmung

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	-	0	+

$$x \in]-1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

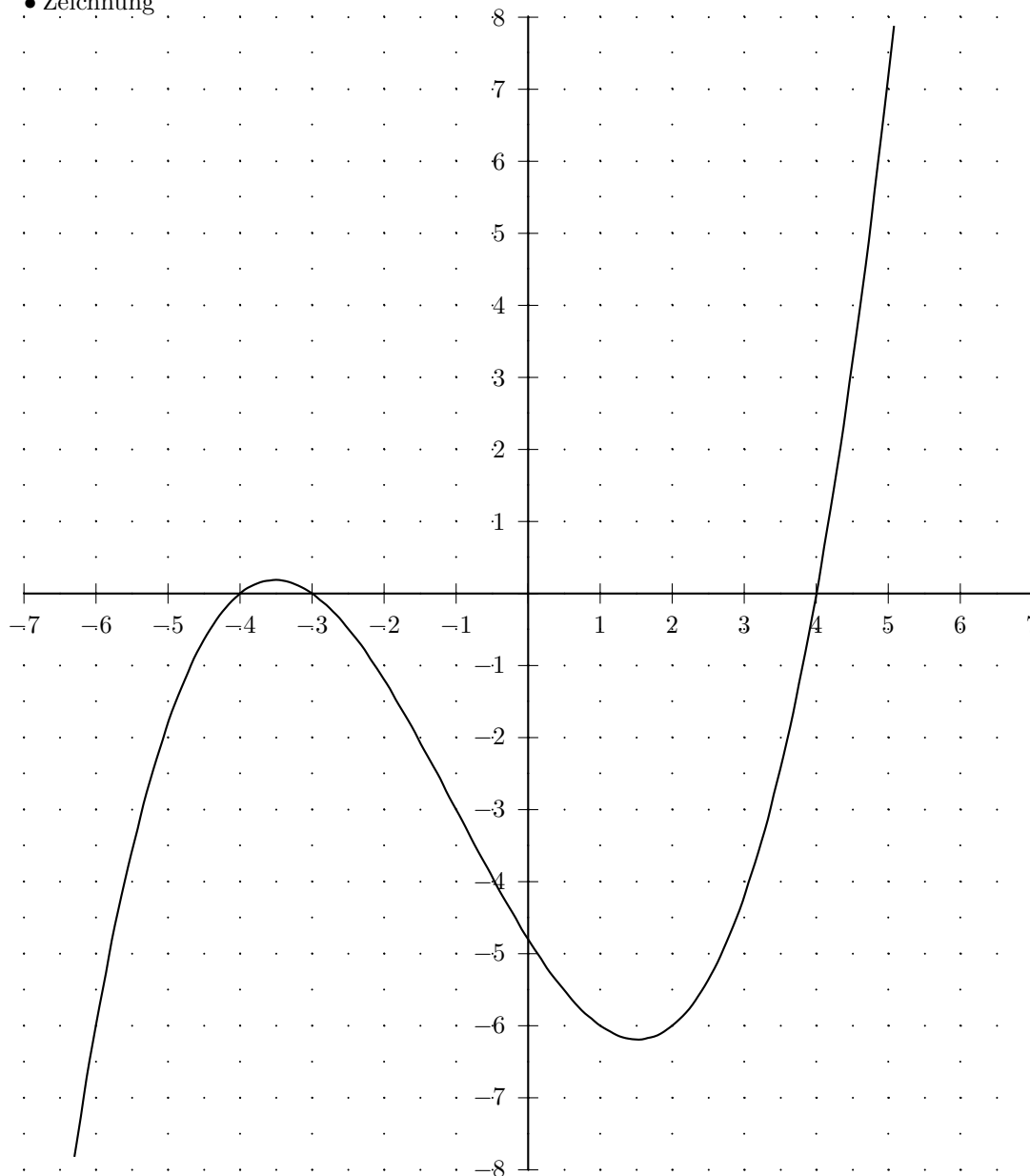
$$x \in]-\infty; -(\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-13\frac{1}{5}$	8,9	$-3\frac{3}{5}$	$20\frac{1}{8}$
$-6\frac{1}{2}$	$-9\frac{3}{16}$	7,175	$-3\frac{3}{10}$	14,564
-6	-6	5,6	-3	$10\frac{4}{5}$
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{9}{16}$	4,175	$-2\frac{7}{10}$	8,439
-5	$-1\frac{4}{5}$	2,9	$-2\frac{2}{5}$	$7\frac{1}{8}$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{51}{80}$	1,775	$-2\frac{1}{10}$	6,539
-4	0	0,8	$-1\frac{4}{5}$	$6\frac{2}{5}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	-0,025	$-1\frac{1}{2}$	6,464
-3	0	-0,7	$-1\frac{1}{5}$	$6\frac{21}{40}$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{39}{80}$	-1,225	$-\frac{9}{10}$	6,414
-2	$-1\frac{1}{5}$	-1,6	$-\frac{3}{5}$	6
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{16}$	-1,825	$-\frac{1}{10}$	5,189
-1	-3	-1,9	0	$3\frac{37}{40}$
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{15}{16}$	-1,825	$\frac{3}{10}$	2,189
0	$-4\frac{4}{5}$	-1,6	$\frac{3}{5}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$-4\frac{4}{5}$	-1,6	$\frac{3}{5}$	0
$\frac{1}{2}$	$-5\frac{41}{80}$	-1,225	$\frac{9}{10}$	-2,586
1	-6	-0,7	$1\frac{1}{5}$	$-5\frac{19}{40}$
$1\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	-0,025	$1\frac{1}{2}$	-8,536
2	-6	0,8	$1\frac{4}{5}$	$-11\frac{3}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$-5\frac{29}{80}$	1,775	$2\frac{1}{10}$	-14,461
3	$-4\frac{1}{5}$	2,9	$2\frac{2}{5}$	$-16\frac{7}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{16}$	4,175	$2\frac{7}{10}$	-18,561
4	0	5,6	3	$-19\frac{1}{5}$
$4\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{16}$	7,175	$3\frac{3}{10}$	-18,436
5	$7\frac{1}{5}$	8,9	$3\frac{2}{5}$	$-15\frac{7}{8}$
$5\frac{1}{2}$	$12\frac{9}{80}$	10,775	$3\frac{9}{10}$	-11,086
6	18	12,8	$4\frac{1}{5}$	$-3\frac{3}{5}$
$6\frac{1}{2}$	$24\frac{15}{16}$	14,975	$4\frac{1}{2}$	7,089
7	33	17,3	$4\frac{4}{5}$	$21\frac{21}{40}$

• Zeichnung



Aufgabe (14)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-4)$$

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}(x+0,12)(x-2,786)$$

$$f''(x) = 3x - 4 = 3(x - 1\frac{1}{3})$$

$$f'''(x) = 3$$

$$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2)dx = \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-x) + 2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten:1

$$\begin{array}{r} (\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2) : (x - 1) = \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x - 2 \\ -(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2) \\ \hline -1\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \\ -(-1\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x) \\ \hline -2x + 2 \\ -(-2x + 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{1}{2} \pm \sqrt{(-1\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}}}{1}$$

$$x_{1/2} = \frac{1\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}}{1}$$

$$x_1 = \frac{1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}}{1} \quad x_2 = \frac{1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}}{1}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -1$$

$x_1 = -1$; 1-fache Nullstelle

$x_2 = 1$; 1-fache Nullstelle

$x_3 = 4$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	-1	$< x < 1$	1	$< x < 4$	4	$< x$
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$x \in]-1; 1[\cup]4; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -(\cup]1; 4[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{1}{2} = 0$$

$$1\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}}{2 \cdot 1\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{19}}{4 \pm 4,359}$$

$$x_1 = \frac{4 + 4,359}{3} \quad x_2 = \frac{4 - 4,359}{3}$$

$$x_1 = 2,786 \quad x_2 = -0,12$$

$$x_4 = -0,12; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 2,786; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-0,12) = -4,359$$

$$f''(-0,12) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-0,12/2, 03)$$

$$f''(2,786) = 4,359 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (2,786/ -4,104)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -0,12$	$-0,12$	$-0,12 < x < 2,786$	$2,786$	$x > 2,786$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; -0,12[\cup]2,786; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-0,12; 2,786[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 3x - 4 = 0$$

$$3x - 4 = 0 \quad / +4$$

$$3x = 4 \quad / :3$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

$$x_6 = 1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(1\frac{1}{3}) = -1\frac{1}{27}$$

$$f'''(1\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (1\frac{1}{3}/ -1\frac{1}{27})$$

- Krümmung

	$x < 1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$x > 1\frac{1}{3}$
$f''(x)$	-	0	+

$$x \in]1\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

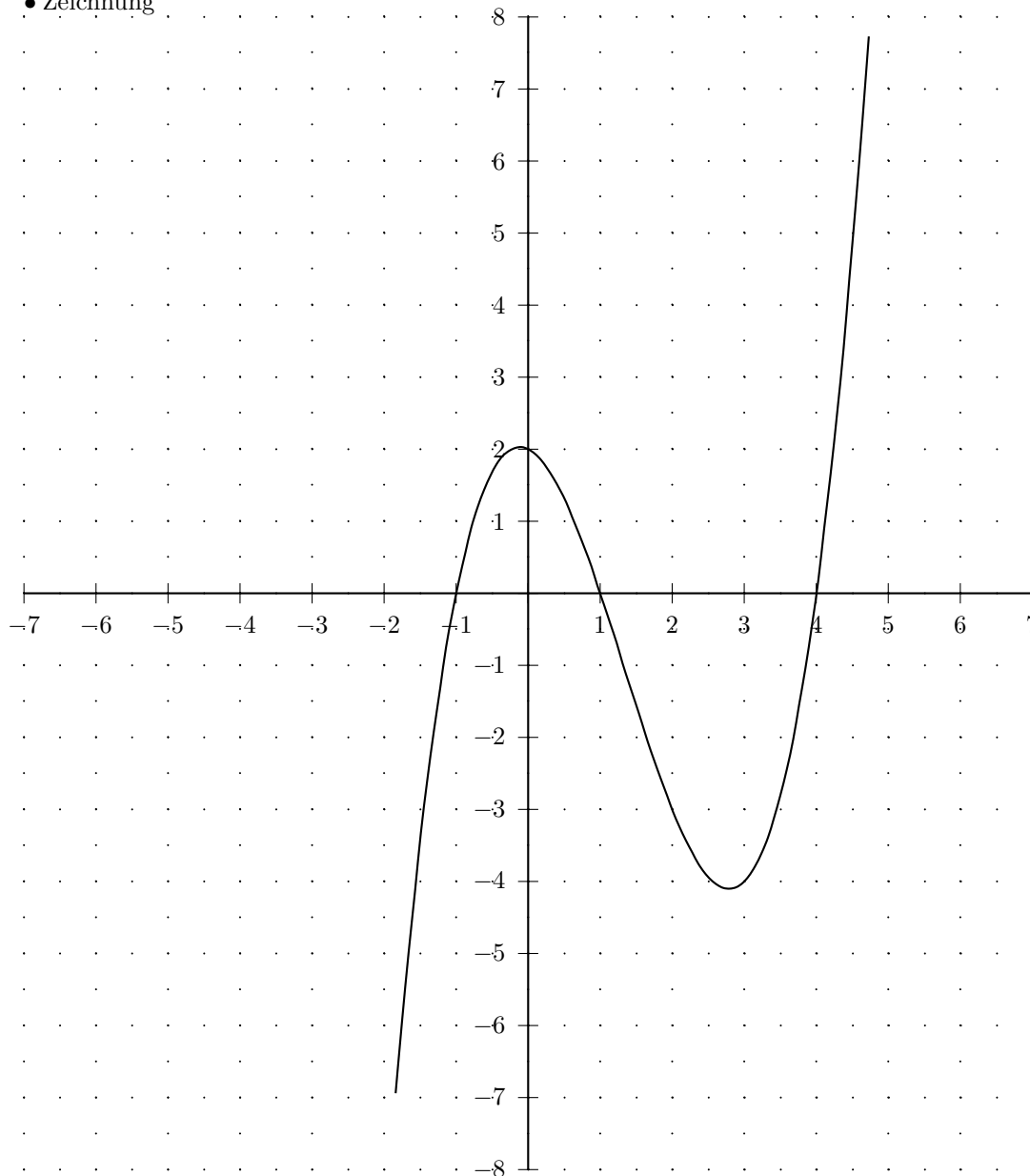
$$x \in]-\infty; 1\frac{1}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-264	101	-25	$502\frac{13}{24}$
$-6\frac{1}{2}$	$-216\frac{9}{16}$	88,875	$-23\frac{1}{2}$	382,654
-6	-175	77,5	-22	285
$-5\frac{1}{2}$	$-138\frac{15}{16}$	66,875	$-20\frac{1}{2}$	206,737
-5	-108	57	-19	$145\frac{5}{24}$
$-4\frac{1}{2}$	$-81\frac{13}{16}$	47,875	$-17\frac{1}{2}$	97,945
-4	-60	39,5	-16	$62\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-42\frac{3}{16}$	31,875	$-14\frac{1}{2}$	37,279
-3	-28	25	-13	$19\frac{7}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	$-17\frac{1}{16}$	18,875	$-11\frac{1}{2}$	8,737
-2	-9	13,5	-10	$2\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{7}{16}$	8,875	$-8\frac{1}{2}$	-0,68
-1	0	5	-7	$-1\frac{11}{24}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{16}$	1,875	$-5\frac{1}{2}$	-0,971
0	2	-0,5	-4	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	2	-0,5	-4	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{16}$	-2,125	$-2\frac{1}{2}$	0,862
1	0	-3	-1	$1\frac{5}{24}$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{9}{16}$	-3,125	$\frac{1}{2}$	0,82
2	-3	-2,5	2	$-\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$-3\frac{15}{16}$	-1,125	$3\frac{1}{2}$	-2,096
3	-4	1	5	$-4\frac{1}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{16}$	3,875	$6\frac{1}{2}$	-5,888
4	0	7,5	8	$-6\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{13}{16}$	11,875	$9\frac{1}{2}$	-5,555
5	12	17	11	$-1\frac{11}{24}$
$5\frac{1}{2}$	$21\frac{15}{16}$	22,875	$12\frac{1}{2}$	6,904
6	35	29,5	14	21
$6\frac{1}{2}$	$51\frac{9}{16}$	36,875	$15\frac{1}{2}$	42,487
7	72	45	17	$73\frac{5}{24}$

• Zeichnung



Aufgabe (15)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x = \frac{1}{2}(x + 2,732)x(x - 0,732)$$

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = 1\frac{1}{2}(x + 1,721)(x - 0,387)$$

$$f''(x) = 3x + 2 = 3(x + \frac{2}{3})$$

$$f'''(x) = 3$$

$$F(x) = \int (\frac{1}{2}x^3 + x^2 - x)dx = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 1 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x = 0$$

$$x(\frac{1}{2}x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 1,732}{1}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 1,732}{1} \quad x_2 = \frac{-1 - 1,732}{1}$$

$$x_1 = 0,732 \quad x_2 = -2,732$$

$$x_1 = -2,732; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 0,732; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2,732$	$< x <$	0	$< x <$	$0,732$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-2,732; 0[\cup]0,732; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -2,732[\cup]0; 0,732[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$1\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot (-1)}}{2 \cdot 1\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 3,162}{3}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 3,162}{3} \quad x_2 = \frac{-2 - 3,162}{3}$$

$$x_1 = 0,387 \quad x_2 = -1,721$$

$$x_4 = -1,721; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 0,387; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-1,721) = -3,162$$

$$f''(-1,721) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1,721/2, 134)$$

$$f''(0,387) = 3,162 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (0,387/ -0,208)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,721$	$< x <$	$0,387$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in] -\infty; -1,721[\cup]0,387; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in] -1,721; 0,387[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 3x + 2 = 0$$

$$3x + 2 = 0 \quad / -2$$

$$3x = -2 \quad / :3$$

$$x = \frac{-2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$x_6 = -\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-\frac{2}{3}) = \frac{26}{27}$$

$$f'''(-\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-\frac{2}{3}, \frac{26}{27})$$

- Krümmung

	$x <$	$-\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	-	0	+

$$x \in] -\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

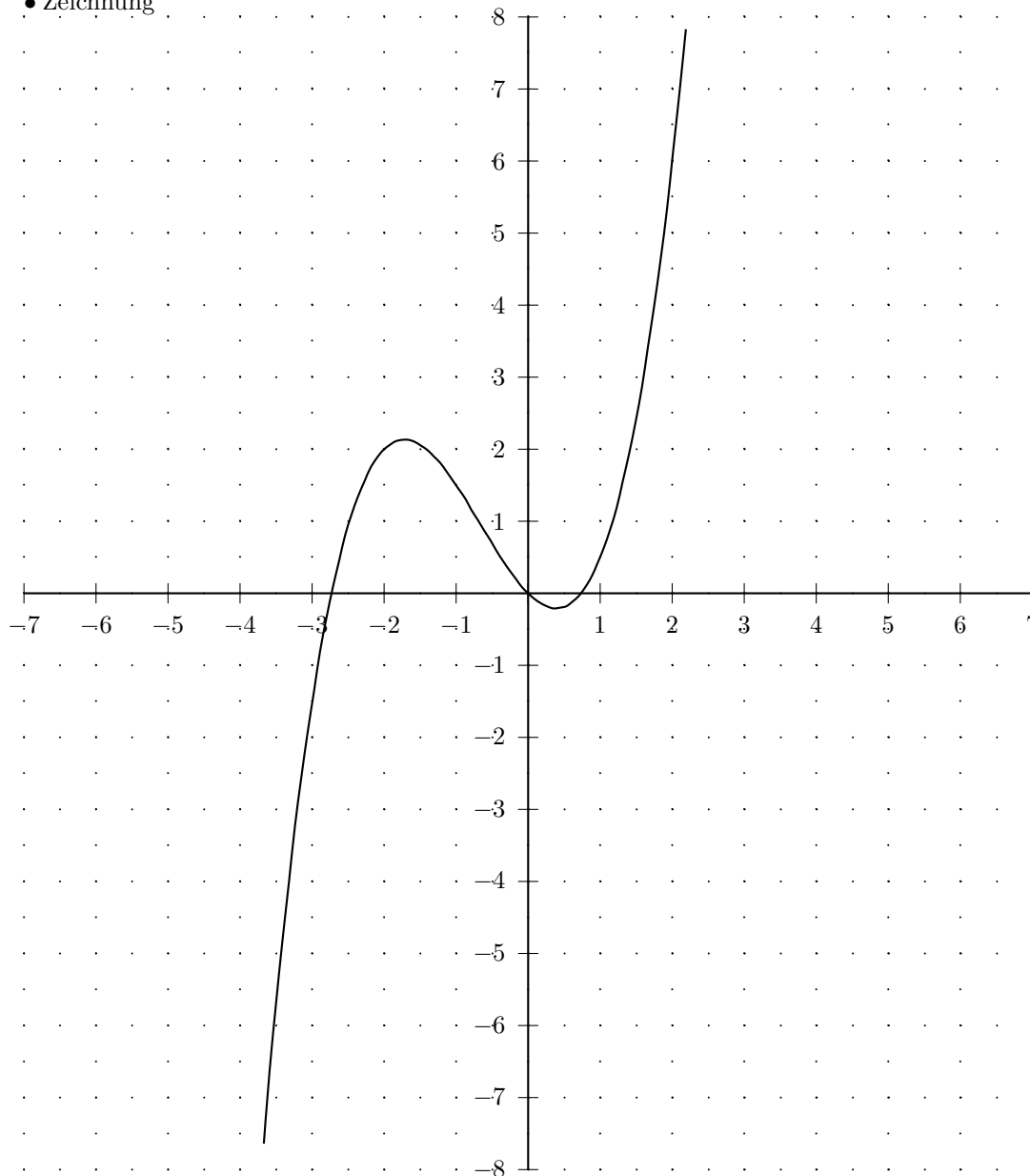
$$x \in] -\infty; -\frac{2}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-115\frac{1}{2}$	58,5	-19	$161\frac{7}{24}$
$-6\frac{1}{2}$	$-88\frac{9}{16}$	49,375	$-17\frac{1}{2}$	110,466
-6	-66	41	-16	72
$-5\frac{1}{2}$	$-47\frac{7}{16}$	33,375	$-14\frac{1}{2}$	43,799
-5	$-32\frac{5}{8}$	26,5	-13	$23\frac{23}{24}$
$-4\frac{1}{2}$	$-20\frac{13}{16}$	20,375	$-11\frac{1}{2}$	10,758
-4	-12	15	-10	$2\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-5\frac{11}{16}$	10,375	$-8\frac{1}{2}$	-1,659
-3	$-1\frac{1}{2}$	6,5	-7	$-3\frac{3}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{13}{16}$	3,375	$-5\frac{1}{2}$	-3,451
-2	2	1	-4	$-2\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{16}$	-0,625	$-2\frac{1}{2}$	-1,617
-1	$1\frac{1}{2}$	-1,5	-1	$-\frac{17}{24}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$	-1,625	$\frac{1}{2}$	-0,159
0	0	-1	2	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-1	2	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{16}$	0,375	$3\frac{1}{2}$	-0,076
1	$\frac{1}{2}$	2,5	5	$-\frac{1}{24}$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{16}$	5,375	$6\frac{1}{2}$	0,633
2	6	9	8	$2\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$11\frac{9}{16}$	13,375	$9\frac{1}{2}$	6,966
3	$19\frac{1}{2}$	18,5	11	$14\frac{5}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$30\frac{3}{16}$	24,375	$12\frac{1}{2}$	26,924
4	44	31	14	$45\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$61\frac{5}{16}$	38,375	$15\frac{1}{2}$	71,508
5	$82\frac{1}{2}$	46,5	17	$107\frac{7}{24}$
$5\frac{1}{2}$	$107\frac{15}{16}$	55,375	$18\frac{1}{2}$	154,716
6	138	65	20	216
$6\frac{1}{2}$	$173\frac{1}{16}$	75,375	$21\frac{1}{2}$	293,549
7	$213\frac{1}{2}$	86,5	23	$389\frac{23}{24}$

• Zeichnung



Aufgabe (16)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5} = -5\frac{2}{5}(x+4)(x+2)(x+1)$$

$$f'(x) = -16\frac{1}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 75\frac{3}{5} = -16\frac{1}{5}(x+3,215)(x+1,451)$$

$$f''(x) = -32\frac{2}{5}x - 75\frac{3}{5} = -32\frac{2}{5}(x+2\frac{1}{3})$$

$$f'''(x) = -32\frac{2}{5}$$

$$F(x) = \int (-5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5})dx = -1\frac{7}{20}x^4 - 12\frac{3}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 43\frac{1}{5}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-5\frac{2}{5} \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-5\frac{2}{5} \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -5\frac{2}{5} \cdot (-x)^3 - 37\frac{4}{5} \cdot (-x)^2 - 75\frac{3}{5} \cdot (-x) - 43\frac{1}{5}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5} = 0$$

$$-5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5} = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -2

$$\begin{array}{r} (-5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5}) : (x+2) = -5\frac{2}{5}x^2 - 27x - 21\frac{3}{5} \\ -(-5\frac{2}{5}x^3 - 10\frac{4}{5}x^2) \\ \hline -27x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5} \\ -(-27x^2 - 54x) \\ \hline -21\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5} \\ -(-21\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5}) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$-5\frac{2}{5}x^2 - 27x - 21\frac{3}{5} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+27 \pm \sqrt{(-27)^2 - 4 \cdot (-5\frac{2}{5}) \cdot (-21\frac{3}{5})}}{2 \cdot (-5\frac{2}{5})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+27 \pm \sqrt{262\frac{11}{25}}}{-10\frac{4}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{27 \pm 16\frac{1}{5}}{-10\frac{4}{5}}$$

$$x_1 = \frac{27 + 16\frac{1}{5}}{-10\frac{4}{5}} \quad x_2 = \frac{27 - 16\frac{1}{5}}{-10\frac{4}{5}}$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = -1$$

$$x_1 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -4$	$-4 < x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x$
$f(x)$	+	0	-	0

$x \in]-\infty; -4[\cup]-2; -1[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-4; -2[\cup]-1; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -16\frac{1}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 75\frac{3}{5} = 0$$

$$-16\frac{1}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 75\frac{3}{5} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+75\frac{3}{5} \pm \sqrt{(-75\frac{3}{5})^2 - 4 \cdot (-16\frac{1}{5}) \cdot (-75\frac{3}{5})}}{2 \cdot (-16\frac{1}{5})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+75\frac{3}{5} \pm \sqrt{816\frac{12}{25}}}{-32\frac{2}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{75\frac{3}{5} \pm 28,574}{-32\frac{2}{5}}$$

$$x_1 = \frac{75\frac{3}{5} + 28,574}{-32\frac{2}{5}} \quad x_2 = \frac{75\frac{3}{5} - 28,574}{-32\frac{2}{5}}$$

$$x_1 = -3,215 \quad x_2 = -1,451$$

$$x_4 = -3,215; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = -1,451; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-3,215) = 28,574 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-3,215 / -11,408)$$

$$f''(-1,451) = -28,574$$

$$f''(-1,451) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1,451 / 3,408)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -3,215$	$-3,215 < x < -1,451$	$x < -1,451$	$x > -1,451$
$f'(x)$	-	0	+	0

$$x \in] -3,215; -1,451[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in] -\infty; -3,215[\cup] -1,451; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -32\frac{2}{5}x - 75\frac{3}{5} = 0$$

$$-32\frac{2}{5}x - 75\frac{3}{5} = 0 \quad / + 75\frac{3}{5}$$

$$-32\frac{2}{5}x = 75\frac{3}{5} \quad / : \left(-32\frac{2}{5}\right)$$

$$x = \frac{75\frac{3}{5}}{-32\frac{2}{5}}$$

$$x = -2\frac{1}{3}$$

$$x_6 = -2\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-2\frac{1}{3}) = -4$$

$$f'''(-2\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-2\frac{1}{3} / -4)$$

- Krümmung

	$x < -2\frac{1}{3}$	$x > -2\frac{1}{3}$
$f''(x)$	+	-

$$x \in] -\infty; -2\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

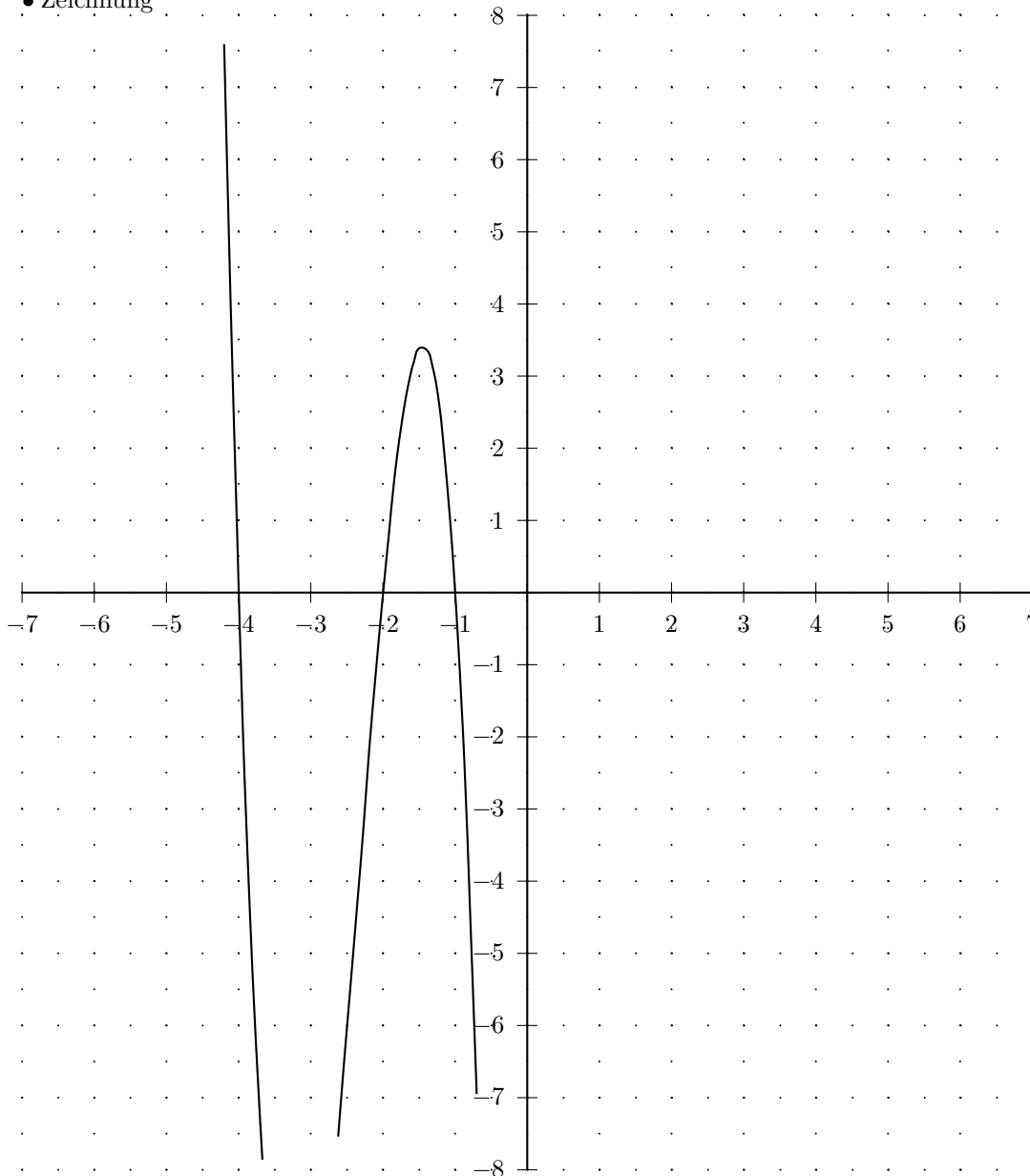
$$x \in] -2\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	486	-340,202	$151\frac{1}{5}$	$-469\frac{7}{20}$
$-6\frac{1}{2}$	$334\frac{1}{8}$	-268,652	135	-265,809
-6	216	-205,202	$118\frac{4}{5}$	$-129\frac{3}{5}$
$-5\frac{1}{2}$	$127\frac{23}{40}$	-149,852	$102\frac{3}{5}$	$-44\frac{55}{64}$
-5	$64\frac{7}{5}$	-102,602	$86\frac{2}{5}$	$2\frac{1}{4}$
$-4\frac{1}{2}$	$23\frac{3}{8}$	-63,452	$70\frac{1}{5}$	23,541
-4	0	-32,402	54	$28\frac{4}{5}$
$-3\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	-9,452	$37\frac{4}{5}$	25,791
-3	$-10\frac{1}{5}$	5,398	$21\frac{2}{5}$	$20\frac{1}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{40}$	12,148	$5\frac{2}{5}$	$15\frac{37}{64}$
-2	0	10,798	$-10\frac{4}{5}$	$14\frac{2}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$	1,348	-27	15,441
-1	0	-16,202	$-43\frac{1}{5}$	$16\frac{13}{20}$
$-\frac{1}{2}$	$-14\frac{7}{40}$	-41,852	$-59\frac{2}{5}$	$13\frac{41}{64}$
0	$-43\frac{1}{5}$	-75,602	$-75\frac{3}{5}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$-43\frac{1}{5}$	-75,602	$-75\frac{3}{5}$	0
$\frac{1}{2}$	$-91\frac{1}{8}$	-117,452	$-91\frac{4}{5}$	-32,709
1	-162	-167,402	-108	$-94\frac{19}{20}$
$1\frac{1}{2}$	$-259\frac{7}{8}$	-225,452	$-124\frac{1}{5}$	-199,209
2	-388	-291,602	-140	-360
$2\frac{1}{2}$	$-552\frac{33}{40}$	-365,852	$-156\frac{3}{5}$	$-593\frac{55}{64}$
3	-756	-448,202	$-172\frac{1}{5}$	$-919\frac{7}{20}$
$3\frac{1}{2}$	$-1002\frac{3}{8}$	-538,652	-189	-1357,059
4	-1296	-637,202	$-205\frac{1}{5}$	$-1929\frac{3}{5}$
$4\frac{1}{2}$	$-1640\frac{37}{40}$	-743,852	-221	$-2661\frac{39}{64}$
5	-2041	-858,602	-237	$-3579\frac{3}{4}$
$5\frac{1}{2}$	$-2500\frac{7}{8}$	-981,452	$-253\frac{4}{5}$	-4712,709
6	-3024	-1112,402	-270	$-6091\frac{1}{5}$
$6\frac{1}{2}$	$-3614\frac{5}{8}$	-1251,452	$-286\frac{1}{5}$	-7747,959
7	-4276	-1398,602	$-302\frac{2}{5}$	$-9717\frac{3}{4}$

• Zeichnung



Aufgabe (17)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2 = -6\frac{3}{4}(x+2)x^2$$

$$f'(x) = -20\frac{1}{4}x^2 - 27x = -20\frac{1}{4}(x+1\frac{1}{3})x$$

$$f''(x) = -40\frac{1}{2}x - 27 = -40\frac{1}{2}(x+\frac{2}{3})$$

$$f'''(x) = -40\frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int (-6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2)dx = -1\frac{11}{16}x^4 - 4\frac{1}{2}x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-6\frac{3}{4} \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-6\frac{3}{4} \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -6\frac{3}{4} \cdot (-x)^3 - 13\frac{1}{2} \cdot (-x)^2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$x^2(-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0$$

$$-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0 \quad / + 13\frac{1}{2}$$

$$-6\frac{3}{4}x = 13\frac{1}{2} \quad / : (-6\frac{3}{4})$$

$$x = \frac{13\frac{1}{2}}{-6\frac{3}{4}}$$

$$x = -2$$

$$x_1 = -2; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{\text{2-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

$x \in] - \infty; -2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - 2; 0[\cup] 0; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -20\frac{1}{4}x^2 - 27x = 0$$

$$x(-20\frac{1}{4}x - 27) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -20\frac{1}{4}x - 27 = 0$$

$$-20\frac{1}{4}x - 27 = 0 \quad / + 27$$

$$-20\frac{1}{4}x = 27 \quad / : (-20\frac{1}{4})$$

$$x = \frac{27}{-20\frac{1}{4}}$$

$$x = -1\frac{1}{3}$$

$$x_3 = -1\frac{1}{3}; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$x_4 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f''(-1\frac{1}{3}) = 27 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt: } (-1\frac{1}{3} / -8)}$$

$$f''(0) = -27$$

$$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt: } (0/0)}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1\frac{1}{3}$	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x \in] -1\frac{1}{3}; 0[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in] -\infty; -1\frac{1}{3}[\cup] 0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = -40\frac{1}{2}x - 27 = 0$$

$$-40\frac{1}{2}x - 27 = 0 \quad / + 27$$

$$-40\frac{1}{2}x = 27 \quad / : \left(-40\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{27}{-40\frac{1}{2}}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$x_5 = -\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-\frac{2}{3}) = -4$$

$$f'''(-\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-\frac{2}{3} / -4)$$

• Krümmung

	$x <$	$-\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$$x \in] -\infty; -\frac{2}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

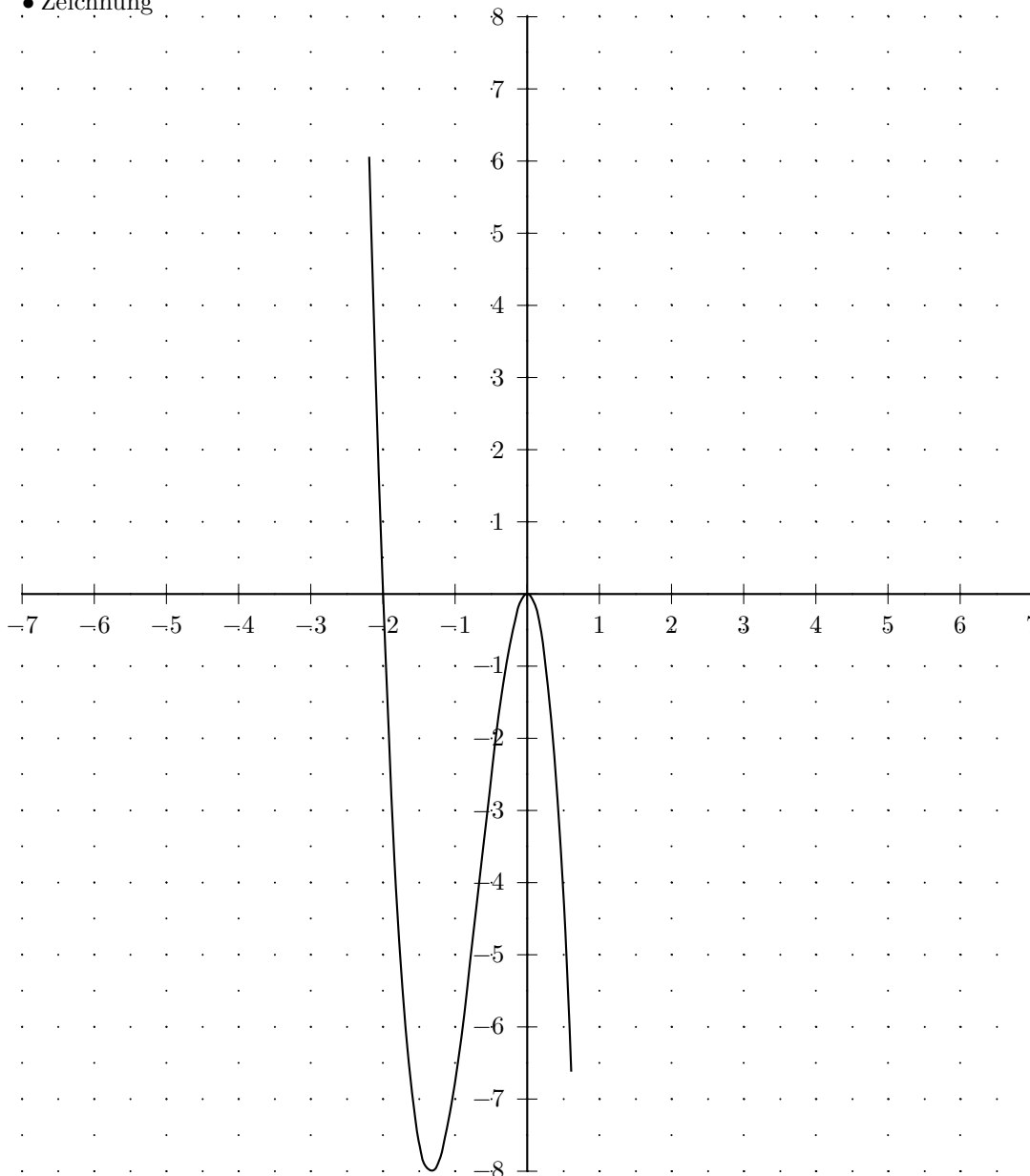
$$x \in] -\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$1653\frac{3}{4}$	-803,252	$256\frac{1}{2}$	$-2508\frac{3}{16}$
$-6\frac{1}{2}$	$1283\frac{11}{32}$	-680,065	$236\frac{1}{4}$	-1776,48
-6	972	-567,002	216	-1215
$-5\frac{1}{2}$	$714\frac{21}{32}$	-464,065	$195\frac{3}{4}$	-795,48
-5	$506\frac{1}{4}$	-371,252	$175\frac{1}{2}$	$-492\frac{3}{16}$
$-4\frac{1}{2}$	$341\frac{23}{32}$	-288,565	$155\frac{1}{4}$	-281,918
-4	216	-216,002	135	-144
$-3\frac{1}{2}$	$124\frac{1}{32}$	-153,565	$114\frac{3}{4}$	-60,293
-3	$60\frac{3}{4}$	-101,252	$94\frac{1}{2}$	$-15\frac{3}{16}$
$-2\frac{1}{2}$	$21\frac{3}{32}$	-59,065	$74\frac{1}{4}$	4,395
-2	0	-27,002	54	9
$-1\frac{1}{2}$	$-7\frac{19}{32}$	-5,065	$33\frac{3}{4}$	6,645
-1	$-6\frac{3}{4}$	6,748	$13\frac{1}{2}$	$2\frac{13}{16}$
$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{17}{32}$	8,435	$-6\frac{3}{4}$	0,457
0	0	-0,002	-27	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-0,002	-27	0
$\frac{1}{2}$	$-4\frac{7}{32}$	-18,565	$-47\frac{1}{4}$	-0,668
1	$-20\frac{1}{4}$	-47,252	$-67\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$
$1\frac{1}{2}$	$-53\frac{5}{32}$	-86,065	$-87\frac{3}{4}$	-23,73
2	-108	-135,002	-108	-63
$2\frac{1}{2}$	$-189\frac{27}{32}$	-194,065	$-128\frac{1}{4}$	-136,23
3	$-303\frac{3}{4}$	-263,252	$-148\frac{1}{2}$	$-258\frac{3}{16}$
$3\frac{1}{2}$	$-454\frac{25}{32}$	-342,565	$-168\frac{3}{4}$	-446,168
4	-648	-432,002	-189	-720
$4\frac{1}{2}$	$-888\frac{15}{32}$	-531,565	$-209\frac{1}{4}$	-1102,043
5	$-1181\frac{1}{4}$	-641,252	$-229\frac{1}{2}$	$-1617\frac{3}{16}$
$5\frac{1}{2}$	$-1531\frac{13}{32}$	-761,065	$-249\frac{3}{4}$	-2292,855
6	-1944	-891,002	-270	-3159
$6\frac{1}{2}$	$-2424\frac{3}{32}$	-1031,065	$-290\frac{1}{4}$	-4248,105
7	$-2976\frac{3}{4}$	-1181,252	$-310\frac{1}{2}$	$-5595\frac{3}{16}$

• Zeichnung



Aufgabe (18)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8 = \frac{2}{3}(x+3)(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 2x^2 + 4x - 2\frac{2}{3} = 2(x+2,528)(x-0,528)$$

$$f''(x) = 4x + 4 = 4(x+1)$$

$$f'''(x) = 4$$

$$F(x) = \int (\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8)dx = \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 - 8x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{2}{3} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{2}{3} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{2}{3} \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 - 2\frac{2}{3} \cdot (-x) - 8$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8 = 0$$

$$\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8 = 0$$

NumerischeSuche :

$$x_1 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x \in]-3; -2[\cup]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in]-\infty; -3[\cup]-2; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 2x^2 + 4x - 2\frac{2}{3} = 0$$

$$2x^2 + 4x - 2\frac{2}{3} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2\frac{2}{3})}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{37\frac{1}{3}}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 6,11}{4}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 6,11}{4} \quad x_2 = \frac{-4 - 6,11}{4}$$

$$x_1 = 0,528 \quad x_2 = -2,528$$

$$x_4 = -2,528; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 0,528; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-2,528) = -6,11$$

$$f''(-2,528) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(-2,528/0,752)$$

$$f''(0,528) = 6,11 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(0,528/-8,752)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,528$	$< x <$	$0,528$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x \in]-\infty; -2,528[\cup]0,528; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-2,528; 0,528[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 4x + 4 = 0$$

$$4x + 4 = 0 \quad / -4$$

$$4x = -4 \quad / :4$$

$$x = \frac{-4}{4}$$

$$x = -1$$

$$x_6 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-1) = -4$$

$$f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-1 / -4)$$

• Krümmung

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$$x \in]-1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

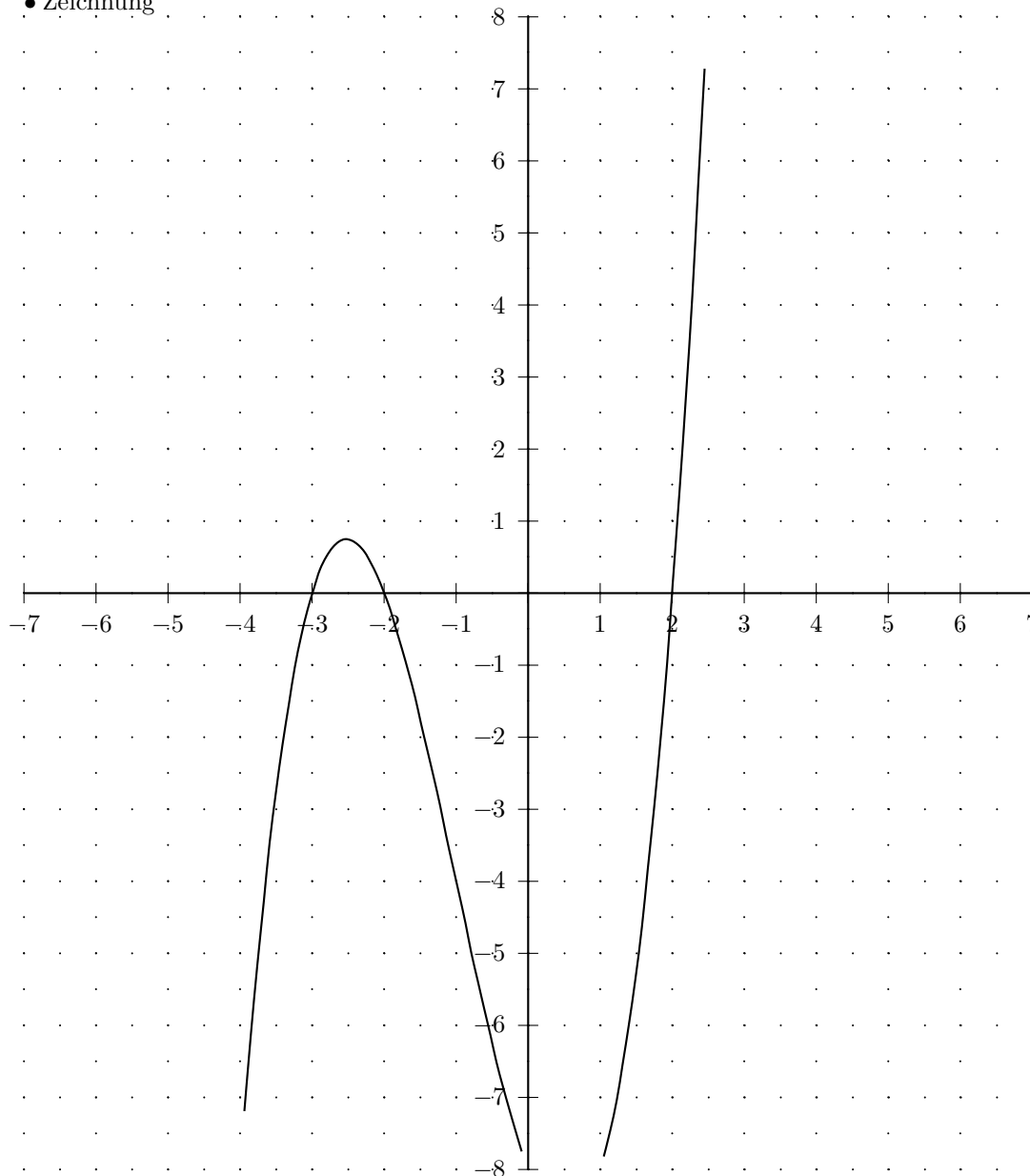
$$x \in]-\infty; -1[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-120	67,334	-24	$162\frac{1}{6}$
$-6\frac{1}{2}$	$-89\frac{1}{4}$	55,834	-22	$110\frac{3}{32}$
-6	-64	45,334	-20	72
$-5\frac{1}{2}$	$-43\frac{3}{4}$	35,834	-18	$45\frac{25}{96}$
-5	-28	27,334	-16	$27\frac{1}{2}$
$-4\frac{1}{2}$	$-16\frac{1}{4}$	19,834	-14	$16\frac{19}{32}$
-4	-8	13,334	-12	$10\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	7,834	-10	$8\frac{3}{32}$
-3	0	3,334	-8	$7\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-0,166	-6	$7\frac{73}{96}$
-2	0	-2,666	-4	8
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$	-4,166	-2	$7\frac{19}{32}$
-1	-4	-4,666	0	$6\frac{1}{6}$
$-\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{4}$	-4,166	2	$3\frac{19}{32}$
0	-8	-2,666	4	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-8	-2,666	4	0
$\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	-0,166	6	$-4\frac{23}{96}$
1	-8	3,334	8	$-8\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	7,834	10	$-11\frac{29}{32}$
2	0	13,334	12	$-13\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{4}$	19,834	14	$-11\frac{13}{32}$
3	20	27,334	16	$-4\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$35\frac{3}{4}$	35,834	18	$9\frac{25}{96}$
4	56	45,334	20	32
$4\frac{1}{2}$	$81\frac{1}{4}$	55,834	22	$66\frac{3}{32}$
5	112	67,334	24	$114\frac{1}{6}$
$5\frac{1}{2}$	$148\frac{3}{4}$	79,834	26	$179\frac{3}{32}$
6	192	93,334	28	264
$6\frac{1}{2}$	$242\frac{1}{4}$	107,834	30	$372\frac{25}{96}$
7	300	123,334	32	$507\frac{1}{2}$

• Zeichnung



Aufgabe (19)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{27}{28}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 5\frac{11}{14}x = -\frac{27}{28}(x+3)x(x-2)$$

$$f'(x) = -2\frac{25}{28}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 5\frac{11}{14} = -2\frac{25}{28}(x+1,786)(x-1,12)$$

$$f''(x) = -5\frac{11}{14}x - 1\frac{13}{14} = -5\frac{11}{14}(x + \frac{1}{3})$$

$$f'''(x) = -5\frac{11}{14}$$

$$F(x) = \int (-\frac{27}{28}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 5\frac{11}{14}x) dx = -0,241x^4 - \frac{9}{28}x^3 + 2\frac{25}{28}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{27}{28} \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{27}{28} \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{27}{28} \cdot (-x)^3 - \frac{27}{28} \cdot (-x)^2 + 5\frac{11}{14} \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{27}{28}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 5\frac{11}{14}x = 0$$

$$x(-\frac{27}{28}x^2 - \frac{27}{28}x + 5\frac{11}{14}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{27}{28}x^2 - \frac{27}{28}x + 5\frac{11}{14} = 0$$

$$-\frac{27}{28}x^2 - \frac{27}{28}x + 5\frac{11}{14} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{27}{28} \pm \sqrt{(-\frac{27}{28})^2 - 4 \cdot (-\frac{27}{28}) \cdot 5\frac{11}{14}}}{2 \cdot (-\frac{27}{28})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{27}{28} \pm \sqrt{23,246}}{-1\frac{13}{14}}$$

$$x_{1/2} = \frac{\frac{27}{28} \pm 4\frac{23}{28}}{-1\frac{13}{14}}$$

$$x_1 = \frac{\frac{27}{28} + 4\frac{23}{28}}{-1\frac{13}{14}} \quad x_2 = \frac{\frac{27}{28} - 4\frac{23}{28}}{-1\frac{13}{14}}$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 2$$

$$x_1 = -3; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 2; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3[\cup]0; 2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-3; 0[\cup]2; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -2\frac{25}{28}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 5\frac{11}{14} = 0$$

$$-2\frac{25}{28}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 5\frac{11}{14} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{13}{14} \pm \sqrt{(-1\frac{13}{14})^2 - 4 \cdot (-2\frac{25}{28}) \cdot 5\frac{11}{14}}}{2 \cdot (-2\frac{25}{28})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{13}{14} \pm \sqrt{70,668}}{-5\frac{11}{14}}$$

$$x_{1/2} = \frac{1\frac{13}{14} \pm 8,406}{-5\frac{11}{14}}$$

$$x_1 = \frac{1\frac{13}{14} + 8,406}{-5\frac{11}{14}} \quad x_2 = \frac{1\frac{13}{14} - 8,406}{-5\frac{11}{14}}$$

$$x_1 = -1,786 \quad x_2 = 1,12$$

$$x_4 = -1,786; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 1,12; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-1,786) = 8,406 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-1,786 / -7,916)$$

$$f''(1,12) = -8,406$$

$$f''(1,12) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (1,12/3,916)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,786$	$< x <$	$1,12$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x \in] -1,786; 1,12[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in] -\infty; -1,786[\cup] 1,12; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -5\frac{11}{14}x - 1\frac{13}{14} = 0$$

$$-5\frac{11}{14}x - 1\frac{13}{14} = 0 \quad / + 1\frac{13}{14}$$

$$-5\frac{11}{14}x = 1\frac{13}{14} \quad / : \left(-5\frac{11}{14}\right)$$

$$x = \frac{1\frac{13}{14}}{-5\frac{11}{14}}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$x_6 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-\frac{1}{3}) = -2$$

$$f'''(-\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-\frac{1}{3} / -2)$$

- Krümmung

	$x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$$x \in] -\infty; -\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

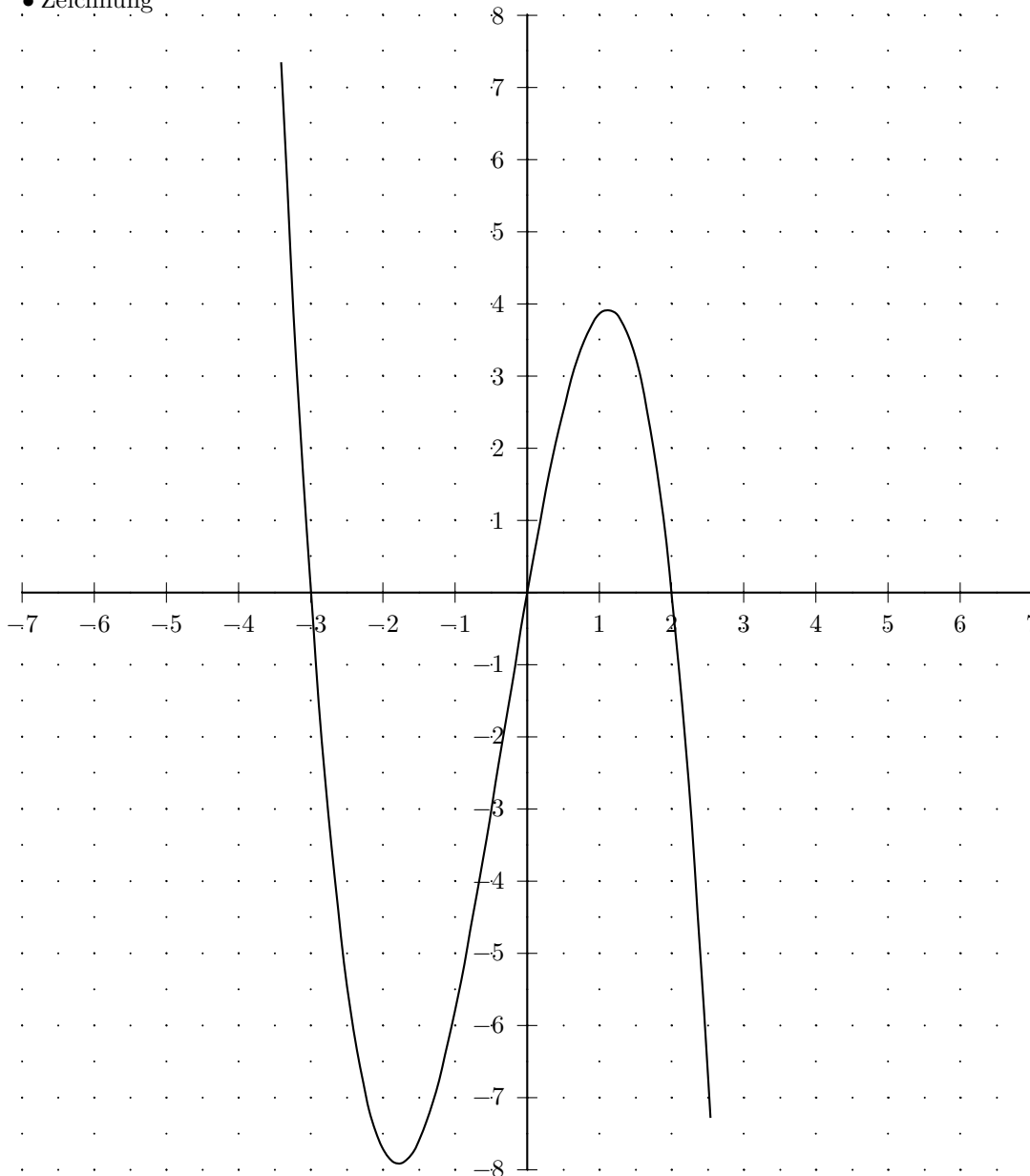
$$x \in] -\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	243	-122,465	$38\frac{4}{7}$	$-326\frac{13}{16}$
$-6\frac{1}{2}$	$186\frac{15}{32}$	-103,902	$35\frac{19}{28}$	-219,832
-6	$138\frac{6}{7}$	-86,786	$32\frac{11}{14}$	$-138\frac{6}{7}$
$-5\frac{1}{2}$	99,442	-71,116	$29\frac{25}{28}$	-79,609
-5	$67\frac{1}{2}$	-56,893	27	-38,17
$-4\frac{1}{2}$	42,308	-44,116	$24\frac{3}{28}$	-10,984
-4	$23\frac{1}{7}$	-32,786	$21\frac{3}{14}$	$5\frac{1}{7}$
$-3\frac{1}{2}$	$9\frac{9}{32}$	-22,902	$18\frac{9}{28}$	13,043
-3	0	-14,465	$15\frac{2}{7}$	$15\frac{3}{16}$
$-2\frac{1}{2}$	-5,424	-7,474	$12\frac{15}{28}$	13,686
-2	$-7\frac{2}{7}$	-1,929	$9\frac{9}{14}$	$10\frac{2}{7}$
$-1\frac{1}{2}$	$-7\frac{19}{32}$	2,169	$6\frac{3}{4}$	6,373
-1	$-5\frac{11}{14}$	4,821	$3\frac{6}{7}$	2,973
$-\frac{1}{2}$	-3,013	6,026	$\frac{27}{28}$	0,748
0	0	5,785	$-1\frac{13}{14}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	5,785	$-1\frac{13}{14}$	0
$\frac{1}{2}$	$2\frac{17}{32}$	4,098	$-4\frac{23}{28}$	0,668
1	$3\frac{6}{7}$	0,964	$-7\frac{2}{7}$	2,33
$1\frac{1}{2}$	3,254	-3,616	$-10\frac{17}{28}$	4,204
2	0	-9,643	$-13\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{7}$
$2\frac{1}{2}$	-6,629	-17,116	$-16\frac{11}{28}$	3,641
3	$-17\frac{5}{14}$	-26,036	$-19\frac{2}{7}$	-2,17
$3\frac{1}{2}$	$-32\frac{29}{32}$	-36,402	$-22\frac{5}{28}$	-14,52
4	-54	-48,215	$-25\frac{1}{14}$	-36
$4\frac{1}{2}$	-81,362	-61,474	$-27\frac{27}{28}$	-69,564
5	$-115\frac{5}{7}$	-76,179	$-30\frac{6}{7}$	-118,527
$5\frac{1}{2}$	$-157\frac{25}{32}$	-92,331	$-33\frac{3}{4}$	-186,564
6	$-208\frac{2}{7}$	-109,929	$-36\frac{9}{14}$	$-277\frac{2}{7}$
$6\frac{1}{2}$	-267,951	-128,974	$-39\frac{15}{28}$	-396,377
7	$-337\frac{1}{2}$	-149,465	$-42\frac{3}{7}$	$-547\frac{5}{16}$

• Zeichnung



Aufgabe (20)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)^2(x-1)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3(x+2)x$$

$$f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$$

$$f'''(x) = 6$$

$$F(x) = \int (x^3 + 3x^2 - 4) dx = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 - 4$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: 1

$$\begin{array}{r} (x^3 + 3x^2 \quad -4) : (x-1) = x^2 + 4x + 4 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline 4x^2 \quad -4 \\ -(4x^2 - 4x) \\ \hline 4x \quad -4 \\ -(4x - 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$1x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 0}{2} \quad x_2 = \frac{-4 - 0}{2}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -2$$

$$x_1 = -2; \quad \underline{2\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 1; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]1; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 1[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0$$

$$x(3x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 3x + 6 = 0$$

$$3x + 6 = 0 \quad / -6$$

$$3x = -6 \quad / : 3$$

$$x = \frac{-6}{3}$$

$$x = -2$$

$$x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-2) = -6$$

$$f''(-2) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-2/0)$$

$$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (0/-4)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x \in]-\infty; -2[\cup]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-2; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 6x + 6 = 0$$

$$6x + 6 = 0 \quad / -6$$

$$6x = -6 \quad / :6$$

$$x = \frac{-6}{6}$$

$$x = -1$$

$$x_5 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-1) = -2$$

$$f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-1/-2)$$

- Krümmung

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$$x \in]-1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

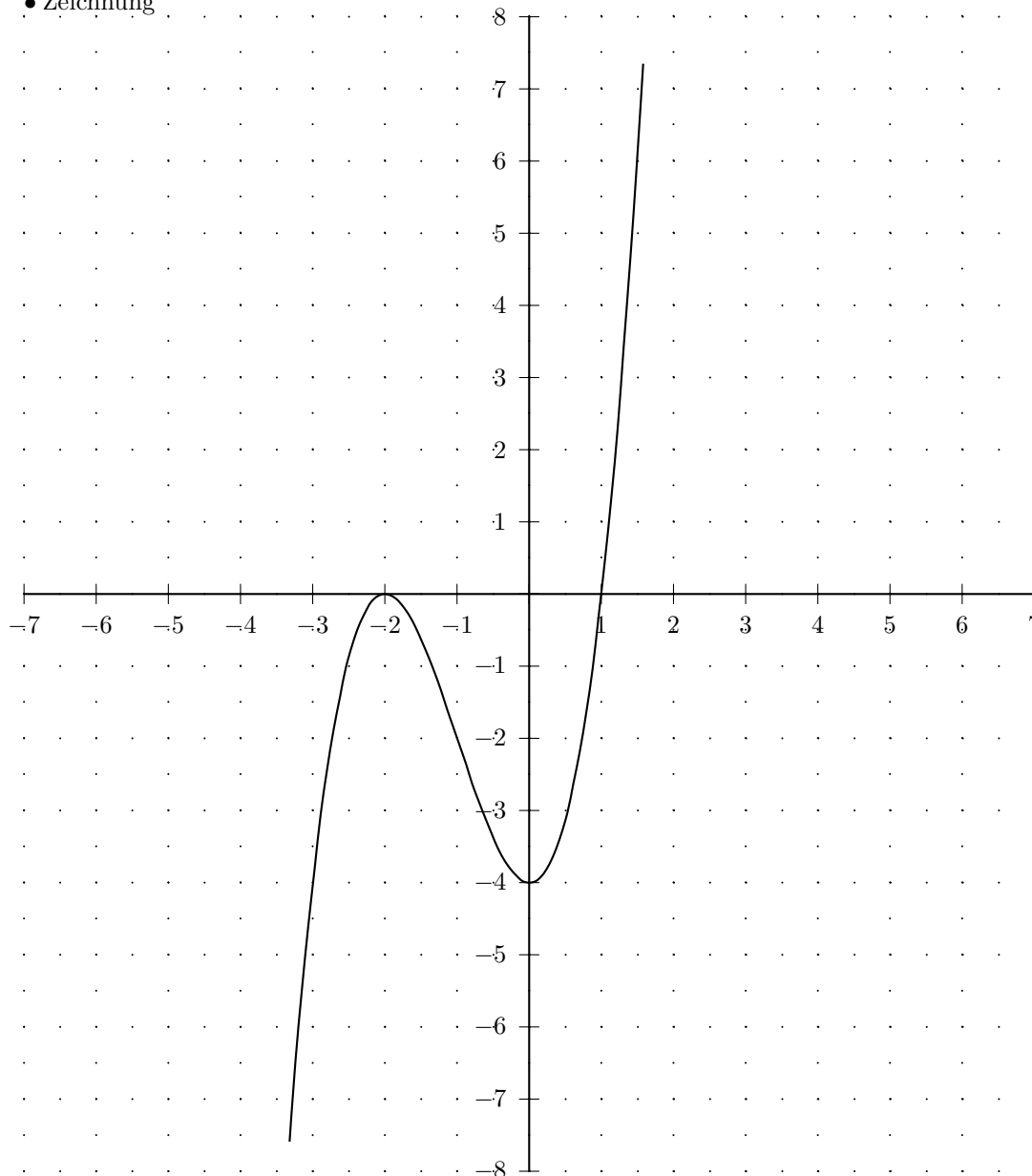
$$x \in]-\infty; -(\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-200	105	-36	$285\frac{1}{4}$
$-6\frac{1}{2}$	$-151\frac{7}{8}$	87,75	-33	$197\frac{41}{64}$
-6	-112	72	-30	132
$-5\frac{1}{2}$	$-79\frac{5}{8}$	57,75	-27	$84\frac{25}{64}$
-5	-54	45	-24	$51\frac{1}{4}$
$-4\frac{1}{2}$	$-34\frac{3}{8}$	33,75	-21	$29\frac{25}{64}$
-4	-20	24	-18	16
$-3\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	15,75	-15	$8\frac{41}{64}$
-3	-4	9	-12	$5\frac{1}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	3,75	-9	$4\frac{9}{64}$
-2	0	0	-6	4
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	-2,25	-3	$3\frac{57}{64}$
-1	-2	-3	0	$3\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{8}$	-2,25	3	$1\frac{57}{64}$
0	-4	0	6	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-4	0	6	0
$\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	3,75	9	$-1\frac{55}{64}$
1	0	9	12	$-2\frac{3}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{8}$	15,75	15	$-1\frac{23}{64}$
2	16	24	18	4
$2\frac{1}{2}$	$30\frac{3}{8}$	33,75	21	$15\frac{25}{64}$
3	50	45	24	$35\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$75\frac{5}{8}$	57,75	27	$66\frac{25}{64}$
4	108	72	30	112
$4\frac{1}{2}$	$147\frac{7}{8}$	87,75	33	$175\frac{41}{64}$
5	196	105	36	$261\frac{1}{4}$
$5\frac{1}{2}$	$253\frac{1}{8}$	123,75	39	$373\frac{9}{64}$
6	320	144	42	516
$6\frac{1}{2}$	$397\frac{3}{8}$	165,75	45	$694\frac{57}{64}$
7	486	189	48	$915\frac{1}{4}$

• Zeichnung



Aufgabe (21)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -5\frac{1}{16}x^3 + 10\frac{1}{8}x^2 = -5\frac{1}{16}x^2(x - 2)$$

$$f'(x) = -15\frac{3}{16}x^2 + 20\frac{1}{4}x = -15\frac{3}{16}x(x - 1\frac{1}{3})$$

$$f''(x) = -30\frac{3}{8}x + 20\frac{1}{4} = -30\frac{3}{8}(x - \frac{2}{3})$$

$$f'''(x) = -30\frac{3}{8}$$

$$F(x) = \int (-5\frac{1}{16}x^3 + 10\frac{1}{8}x^2) dx = -1\frac{17}{64}x^4 + 3\frac{3}{8}x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-5\frac{1}{16} \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-5\frac{1}{16} \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -5\frac{1}{16} \cdot (-x)^3 + 10\frac{1}{8} \cdot (-x)^2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -5\frac{1}{16}x^3 + 10\frac{1}{8}x^2 = 0$$

$$x^2(-5\frac{1}{16}x + 10\frac{1}{8}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -5\frac{1}{16}x + 10\frac{1}{8} = 0$$

$$-5\frac{1}{16}x + 10\frac{1}{8} = 0 \quad / -10\frac{1}{8}$$

$$-5\frac{1}{16}x = -10\frac{1}{8} \quad / : (-5\frac{1}{16})$$

$$x = \frac{-10\frac{1}{8}}{-5\frac{1}{16}}$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x_1 = 0; \quad \underline{2\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 2; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f(x)$	+	0	+	0	-

$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]2; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -15\frac{3}{16}x^2 + 20\frac{1}{4}x = 0$$

$$x(-15\frac{3}{16}x + 20\frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -15\frac{3}{16}x + 20\frac{1}{4} = 0$$

$$-15\frac{3}{16}x + 20\frac{1}{4} = 0 \quad / -20\frac{1}{4}$$

$$-15\frac{3}{16}x = -20\frac{1}{4} \quad / : \left(-15\frac{3}{16}\right)$$

$$x = \frac{-20\frac{1}{4}}{-15\frac{3}{16}}$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_4 = 1\frac{1}{3}; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = 20\frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/0)}$$

$$f''(1\frac{1}{3}) = -20\frac{1}{4}$$

$$f''(1\frac{1}{3}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1\frac{1}{3}/6)}$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$0 < x < \frac{1}{3}$	$x > \frac{1}{3}$
$f'(x)$	-	0	+	-

$$x \in]0; \frac{1}{3}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -30\frac{3}{8}x + 20\frac{1}{4} = 0$$

$$-30\frac{3}{8}x + 20\frac{1}{4} = 0 \quad / -20\frac{1}{4}$$

$$-30\frac{3}{8}x = -20\frac{1}{4} \quad / : \left(-30\frac{3}{8}\right)$$

$$x = \frac{-20\frac{1}{4}}{-30\frac{3}{8}}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$x_5 = \frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(\frac{2}{3}) = 3$$

$$f'''(\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (\frac{2}{3}/3)$$

- Krümmung

	$x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$x > \frac{2}{3}$
$f''(x)$	+	0	-

$$x \in]-\infty; \frac{2}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

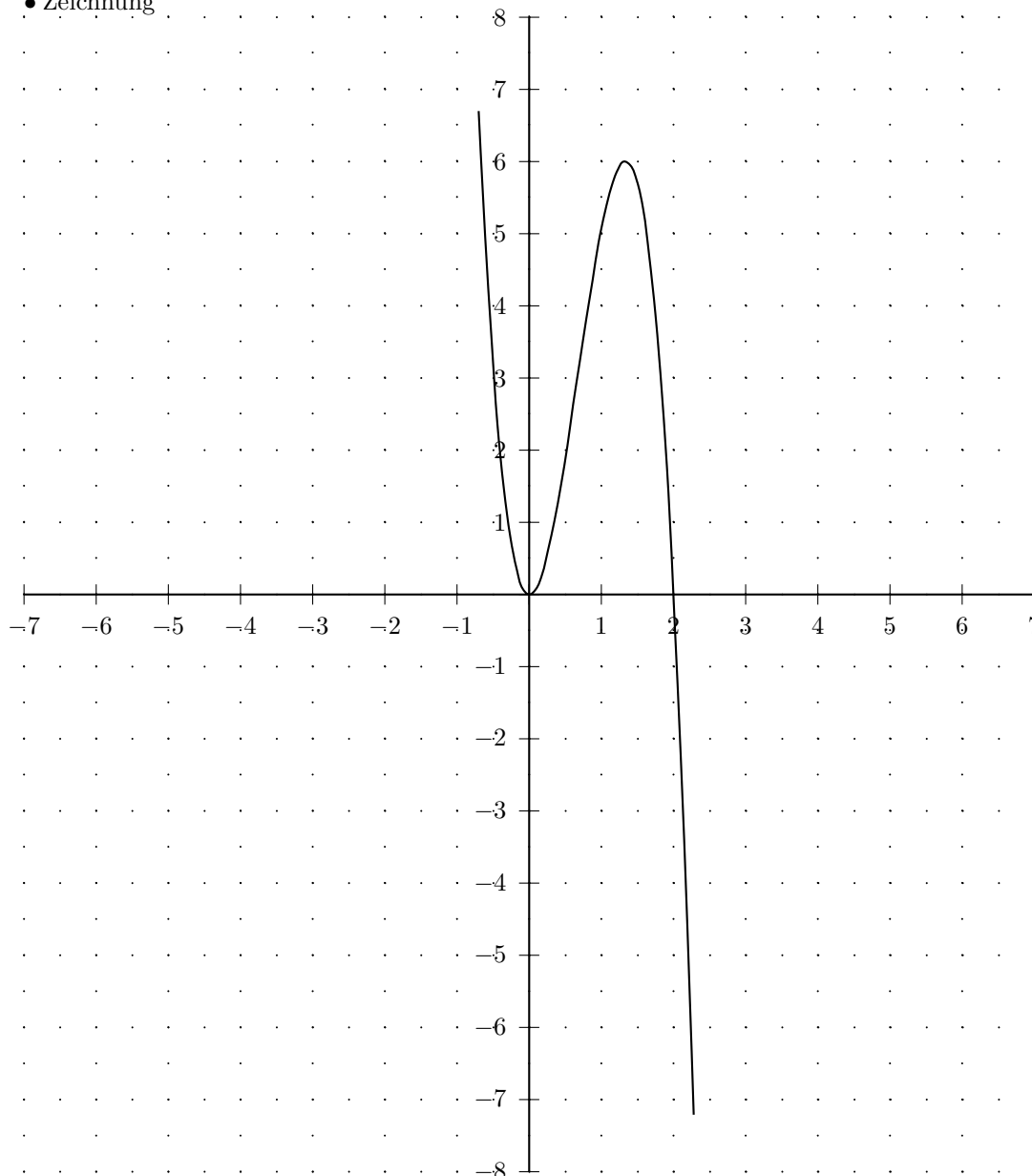
$$x \in]\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	2232 $\frac{9}{16}$	-885,939	232 $\frac{7}{8}$	-4196 $\frac{25}{64}$
-6 $\frac{1}{2}$	1818,07	-773,298	217 $\frac{11}{16}$	-3186,079
-6	1458	-668,252	202 $\frac{1}{2}$	-2369 $\frac{1}{4}$
-5 $\frac{1}{2}$	1148,555	-570,798	187 $\frac{5}{16}$	-1719,642
-5	885 $\frac{15}{16}$	-480,939	172 $\frac{1}{8}$	-1212 $\frac{27}{64}$
-4 $\frac{1}{2}$	666,352	-398,673	156 $\frac{13}{16}$	-826,532
-4	486	-324,002	141 $\frac{3}{4}$	-540
-3 $\frac{1}{2}$	341,086	-256,923	126 $\frac{9}{16}$	-334,626
-3	227 $\frac{13}{16}$	-197,439	111 $\frac{3}{8}$	-193 $\frac{41}{64}$
-2 $\frac{1}{2}$	142,383	-145,548	96 $\frac{3}{16}$	-102,173
-2	81	-101,252	81	-47 $\frac{1}{4}$
-1 $\frac{1}{2}$	39,867	-64,548	65 $\frac{13}{16}$	-17,798
-1	15 $\frac{3}{16}$	-35,439	50 $\frac{9}{8}$	-4 $\frac{41}{64}$
- $\frac{1}{2}$	3,164	-13,923	35 $\frac{7}{16}$	-0,501
0	0	-0,002	20 $\frac{1}{4}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-0,002	20 $\frac{1}{4}$	0
$\frac{1}{2}$	1,898	6,327	5 $\frac{1}{16}$	0,343
1	5 $\frac{1}{16}$	5,061	-10 $\frac{1}{8}$	2 $\frac{7}{64}$
1 $\frac{1}{2}$	5,695	-3,798	-25 $\frac{5}{16}$	4,983
2	0	-20,252	-40 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{3}{4}$
2 $\frac{1}{2}$	-15,82	-44,298	-55 $\frac{11}{16}$	3,296
3	-45 $\frac{9}{16}$	-75,939	-70 $\frac{7}{8}$	-11 $\frac{25}{64}$
3 $\frac{1}{2}$	-93,023	-115,173	-86 $\frac{1}{16}$	-45,22
4	-162	-162,002	-101 $\frac{1}{4}$	-108
4 $\frac{1}{2}$	-256,289	-216,423	-116 $\frac{7}{16}$	-211,438
5	-379 $\frac{11}{16}$	-278,439	-131 $\frac{3}{8}$	-369 $\frac{9}{64}$
5 $\frac{1}{2}$	-535,992	-348,048	-146 $\frac{13}{16}$	-596,61
6	-729	-425,252	-162	-911 $\frac{1}{4}$
6 $\frac{1}{2}$	-962,508	-510,048	-177 $\frac{3}{16}$	-1332,36
7	-1240 $\frac{5}{16}$	-602,439	-192 $\frac{3}{8}$	-1881 $\frac{9}{64}$

• Zeichnung



Aufgabe (22)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4 = \frac{1}{6}(x+3)(x-2)(x-4)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(x+1,082)(x-3,082)$$

$$f''(x) = x - 1 = (x-1)$$

$$f'''(x) = 1$$

$$F(x) = \int (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4) dx = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + 4x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{6} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{6} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{6} \cdot (-x)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-x)^2 - 1\frac{2}{3} \cdot (-x) + 4$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4 = 0$$

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4 = 0$$

Numerische Suche :

$$x_1 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 4; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichen-tabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	2	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in] -3; 2[\cup]4; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] -\infty; -3[\cup]2; 4[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1\frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 1\frac{2}{3} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1\frac{2}{3})}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{4\frac{1}{3}}}{1 \pm 2,082}$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm 2,082}{1}$$

$$x_1 = \frac{1 + 2,082}{1} \quad x_2 = \frac{1 - 2,082}{1}$$

$$x_1 = 3,082 \quad x_2 = -1,082$$

$$x_4 = -1,082; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 3,082; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-1,082) = -2,082$$

$$f''(-1,082) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1,082/5,007)$$

$$f''(3,082) = 2,082 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (3,082/-1,007)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,082$	$< x <$	$3,082$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1,082[\cup]3,082; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

$x \in]-1,082; 3,082[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = x - 1 = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad / + 1$$

$$x = 1$$

$x_6 = 1; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$

$$f'''(1) = 2$$

$$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: (1/2)

• Krümmung

	$x < 1$	1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

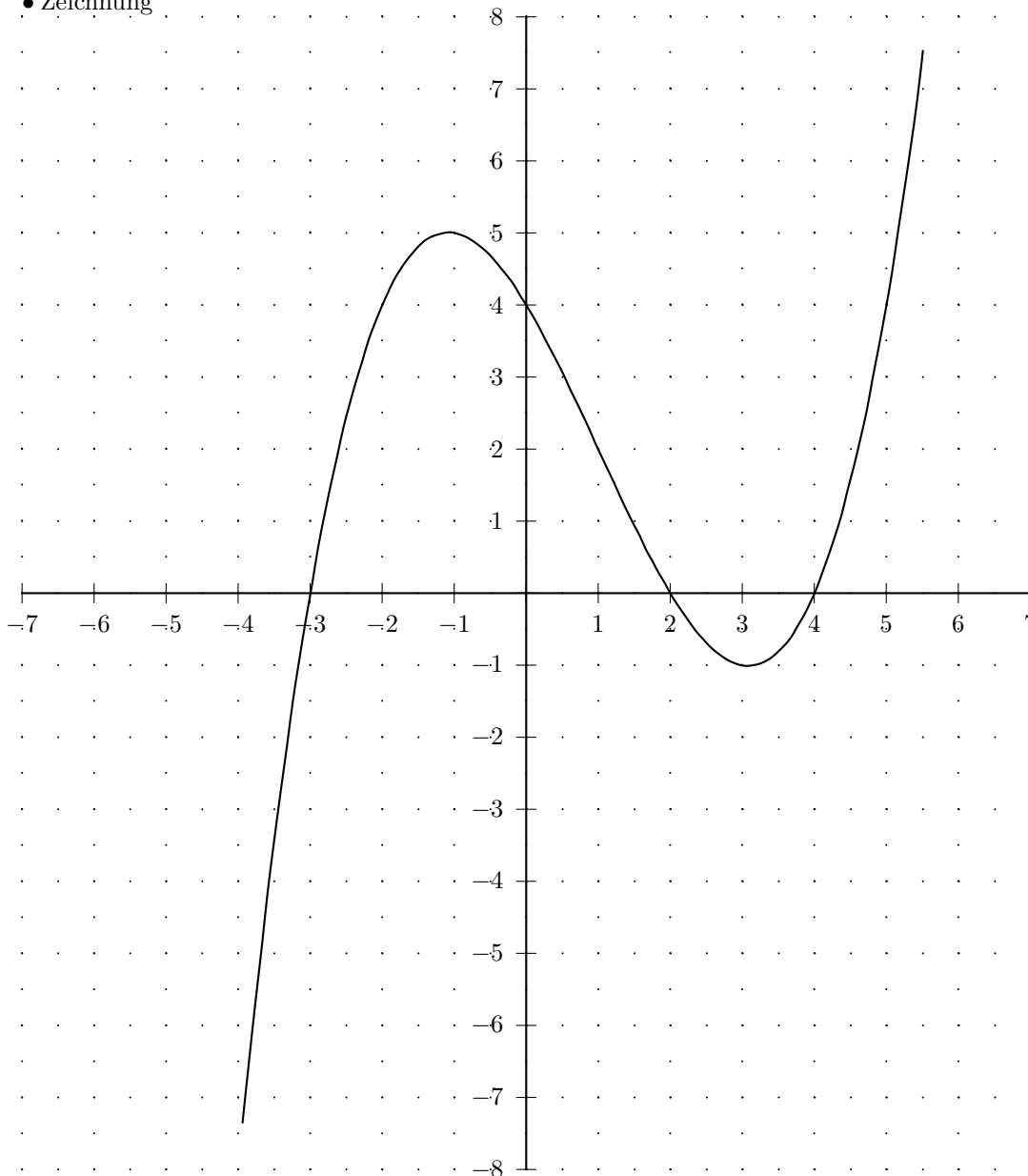
$x \in]-\infty; 1[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-66	29,833	-8	$88\frac{3}{8}$
$-6\frac{1}{2}$	$-52\frac{1}{16}$	25,958	$-7\frac{1}{2}$	58,94
-6	-40	22,333	-7	36
$-5\frac{1}{2}$	$-29\frac{11}{16}$	18,958	$-6\frac{1}{2}$	18,648
-5	-21	15,833	-6	$6\frac{1}{24}$
$-4\frac{1}{2}$	$-13\frac{13}{16}$	12,958	$-5\frac{1}{2}$	-2,602
-4	-8	10,333	-5	-8
$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{7}{16}$	7,958	$-4\frac{1}{2}$	-10,81
-3	0	5,833	-4	$-11\frac{5}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{16}$	3,958	$-3\frac{1}{2}$	-10,977
-2	4	2,333	-3	$-9\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$4\frac{13}{16}$	0,958	$-2\frac{1}{2}$	-7,102
-1	5	-0,167	-2	$-4\frac{5}{8}$
$-\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	-1,042	$-1\frac{1}{2}$	-2,185
0	4	-1,667	-1	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	4	-1,667	-1	0
$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{16}$	-2,042	$-\frac{1}{2}$	1,773
1	2	-2,167	0	$3\frac{1}{24}$
$1\frac{1}{2}$	$15\frac{15}{16}$	-2,042	$\frac{1}{2}$	3,773
2	0	-1,667	1	4
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{16}$	-1,042	$1\frac{1}{2}$	3,815
3	-1	-0,167	2	$3\frac{3}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{16}$	0,958	$2\frac{1}{2}$	2,898
4	0	2,333	3	$2\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	3,958	$3\frac{1}{2}$	3,023
5	4	5,833	4	$4\frac{3}{8}$
$5\frac{1}{2}$	$7\frac{7}{16}$	7,958	$4\frac{1}{2}$	7,19
6	12	10,333	5	12
$6\frac{1}{2}$	$17\frac{13}{16}$	12,958	$5\frac{1}{2}$	19,398
7	25	15,833	6	$30\frac{1}{24}$

• Zeichnung



Aufgabe (23)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x(x-3)^2$$

$$f'(x) = -6x^2 + 24x - 18 = -6(x-1)(x-3)$$

$$f''(x) = -12x + 24 = -12(x-2)$$

$$f'''(x) = -12$$

$$F(x) = \int (-2x^3 + 12x^2 - 18x) dx = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^3 - 9x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -2 \cdot (-x)^3 + 12 \cdot (-x)^2 - 18 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = 0$$

$$x(-2x^2 + 12x - 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -2x^2 + 12x - 18 = 0$$

$$-2x^2 + 12x - 18 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-18)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{-4}$$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm 0}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-12 + 0}{-4} \quad x_2 = \frac{-12 - 0}{-4}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 3$$

$$x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 3; \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 3$	$< x$
$f(x)$	+	-	-

$x \in]-\infty; 0[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]0; 3[\cup]3; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -6x^2 + 24x - 18 = 0$$

$$-6x^2 + 24x - 18 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-18)}}{2 \cdot (-6)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{144}}{-12}$$

$$x_{1/2} = \frac{-24 \pm 12}{-12}$$

$$x_1 = \frac{-24 + 12}{-12} \quad x_2 = \frac{-24 - 12}{-12}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 3$$

$$x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(1) = 12 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(1/ - 8)$$

$$f''(3) = -12$$

$$f''(3) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(3/0)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f'(x)$	-	+	-

$$x \in]1; 3[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; 1[\cup]3; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -12x + 24 = 0$$

$$-12x + 24 = 0 \quad / -24$$

$$-12x = -24 \quad / : (-12)$$

$$x = \frac{-24}{-12}$$

$$x = 2$$

$$x_5 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(2) = -4$$

$$f'''(2) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(2/ - 4)$$

- Krümmung

	$x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	+	-

$$x \in]-\infty; 2[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

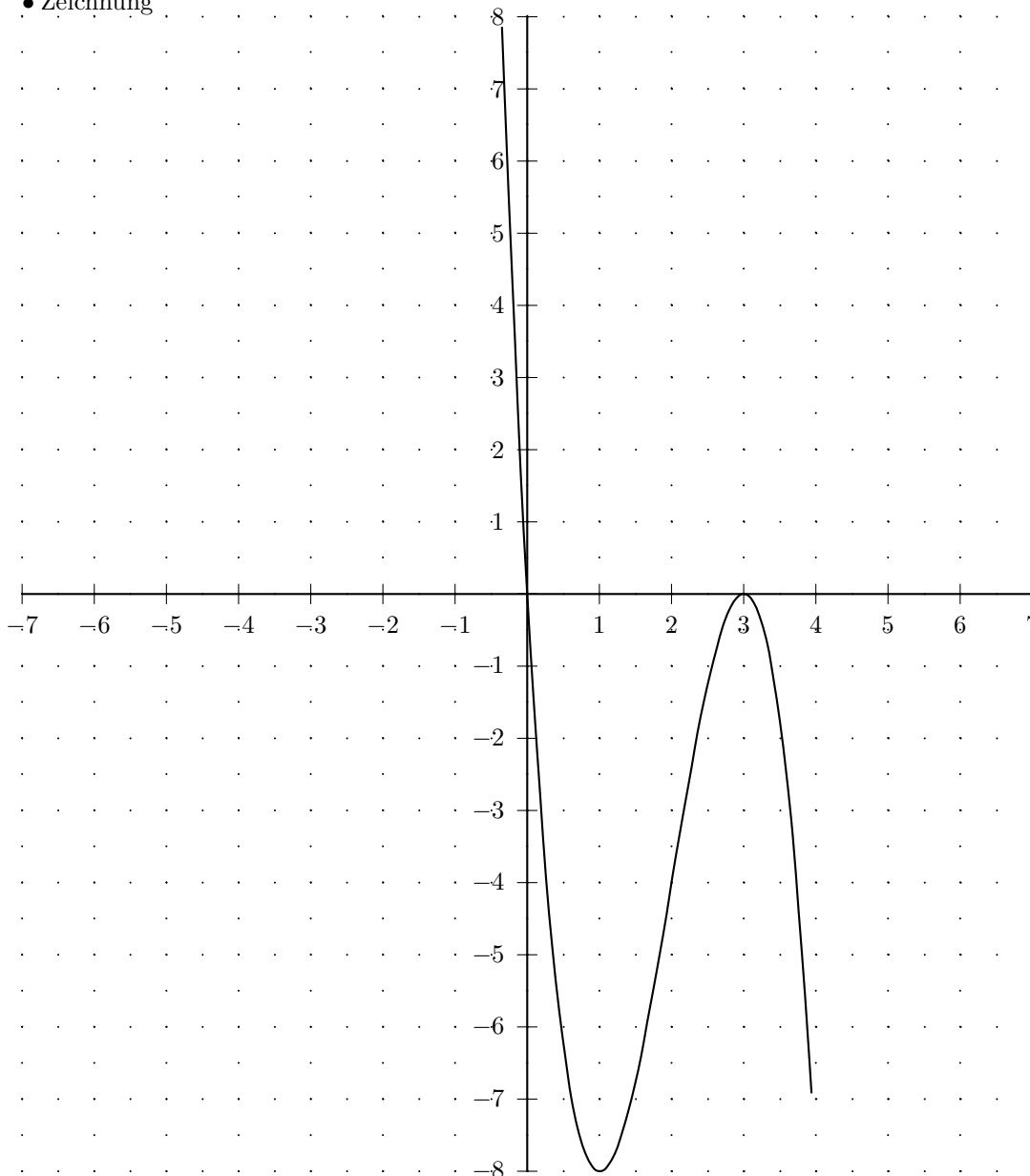
$$x \in]2; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	1400	-480,001	108	$-3013\frac{1}{2}$
$-6\frac{1}{2}$	$1173\frac{1}{4}$	-427,501	102	$-2371\frac{9}{32}$
-6	972	-378,001	96	-1836
$-5\frac{1}{2}$	$794\frac{3}{4}$	-331,501	90	$-1395\frac{9}{32}$
-5	640	-288,001	84	$-1037\frac{1}{2}$
$-4\frac{1}{2}$	$506\frac{1}{4}$	-247,501	78	$-751\frac{25}{32}$
-4	392	-210,001	72	-528
$-3\frac{1}{2}$	$295\frac{3}{4}$	-175,501	66	$-356\frac{25}{32}$
-3	216	-144,001	60	$-229\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$151\frac{1}{4}$	-115,501	54	$-138\frac{9}{32}$
-2	100	-90,001	48	-76
$-1\frac{1}{2}$	$60\frac{3}{4}$	-67,501	42	$-36\frac{9}{32}$
-1	32	-48,001	36	$-13\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	-31,501	30	$-2\frac{25}{32}$
0	0	-18,001	24	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-18,001	24	0
$\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{4}$	-7,501	18	$-1\frac{25}{32}$
1	-8	-0,001	12	$-5\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$	4,499	6	$-9\frac{9}{32}$
2	-4	5,999	0	-12
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	4,499	-6	$-13\frac{9}{32}$
3	0	-0,001	-12	$-13\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$	-7,501	-18	$-13\frac{25}{32}$
4	-8	-18,001	-24	-16
$4\frac{1}{2}$	$-20\frac{1}{4}$	-31,501	-30	$-22\frac{25}{32}$
5	-40	-48,001	-36	$-37\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2}$	$-68\frac{3}{4}$	-67,501	-42	$-64\frac{9}{32}$
6	-108	-90,001	-48	-108
$6\frac{1}{2}$	$-159\frac{1}{4}$	-115,501	-54	$-174\frac{9}{32}$
7	-224	-144,001	-60	$-269\frac{1}{2}$

• Zeichnung



Aufgabe (24)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 40\frac{1}{2}x^3 + 81x^2 + 40\frac{1}{2}x = 40\frac{1}{2}(x+1)^2x$$

$$f'(x) = 121\frac{1}{2}x^2 + 162x + 40\frac{1}{2} = 121\frac{1}{2}(x+1)(x+\frac{1}{3})$$

$$f''(x) = 243x + 162 = 243(x + \frac{2}{3})$$

$$f'''(x) = 243$$

$$F(x) = \int (40\frac{1}{2}x^3 + 81x^2 + 40\frac{1}{2}x)dx = 10\frac{1}{8}x^4 + 27x^3 + 20\frac{1}{4}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [40\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [40\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 40\frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 81 \cdot (-x)^2 + 40\frac{1}{2} \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 40\frac{1}{2}x^3 + 81x^2 + 40\frac{1}{2}x = 0$$

$$x(40\frac{1}{2}x^2 + 81x + 40\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 40\frac{1}{2}x^2 + 81x + 40\frac{1}{2} = 0$$

$$40\frac{1}{2}x^2 + 81x + 40\frac{1}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-81 \pm \sqrt{81^2 - 4 \cdot 40\frac{1}{2} \cdot 40\frac{1}{2}}}{2 \cdot 40\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-81 \pm \sqrt{0}}{81}$$

$$x_{1/2} = \frac{-81 \pm 0}{81}$$

$$x_1 = \frac{-81 + 0}{81} \quad x_2 = \frac{-81 - 0}{81}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -1$$

$$x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -(\cup) -1; 0[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 121\frac{1}{2}x^2 + 162x + 40\frac{1}{2} = 0$$

$$121\frac{1}{2}x^2 + 162x + 40\frac{1}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-162 \pm \sqrt{162^2 - 4 \cdot 121\frac{1}{2} \cdot 40\frac{1}{2}}}{2 \cdot 121\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-162 \pm \sqrt{6561}}{243}$$

$$x_{1/2} = \frac{-162 \pm 81}{243}$$

$$x_1 = \frac{-162 + 81}{243} \quad x_2 = \frac{-162 - 81}{243}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \quad x_2 = -1$$

$$x_3 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-1) = -81$$

$$f''(-1) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1/0)$$

$$f''(-\frac{1}{3}) = 81 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-\frac{1}{3}/-6)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -1$	-1	$-1 < x < -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	x
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-1; -\frac{1}{3}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 243x + 162 = 0$$

$$243x + 162 = 0 \quad / -162$$

$$243x = -162 \quad / :243$$

$$x = \frac{-162}{243}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$x_5 = -\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-\frac{2}{3}) = -3$$

$$f'''(-\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-\frac{2}{3}/-3)$$

- Krümmung

	$x < -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	x
$f''(x)$	-	0	+

$$x \in]-\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

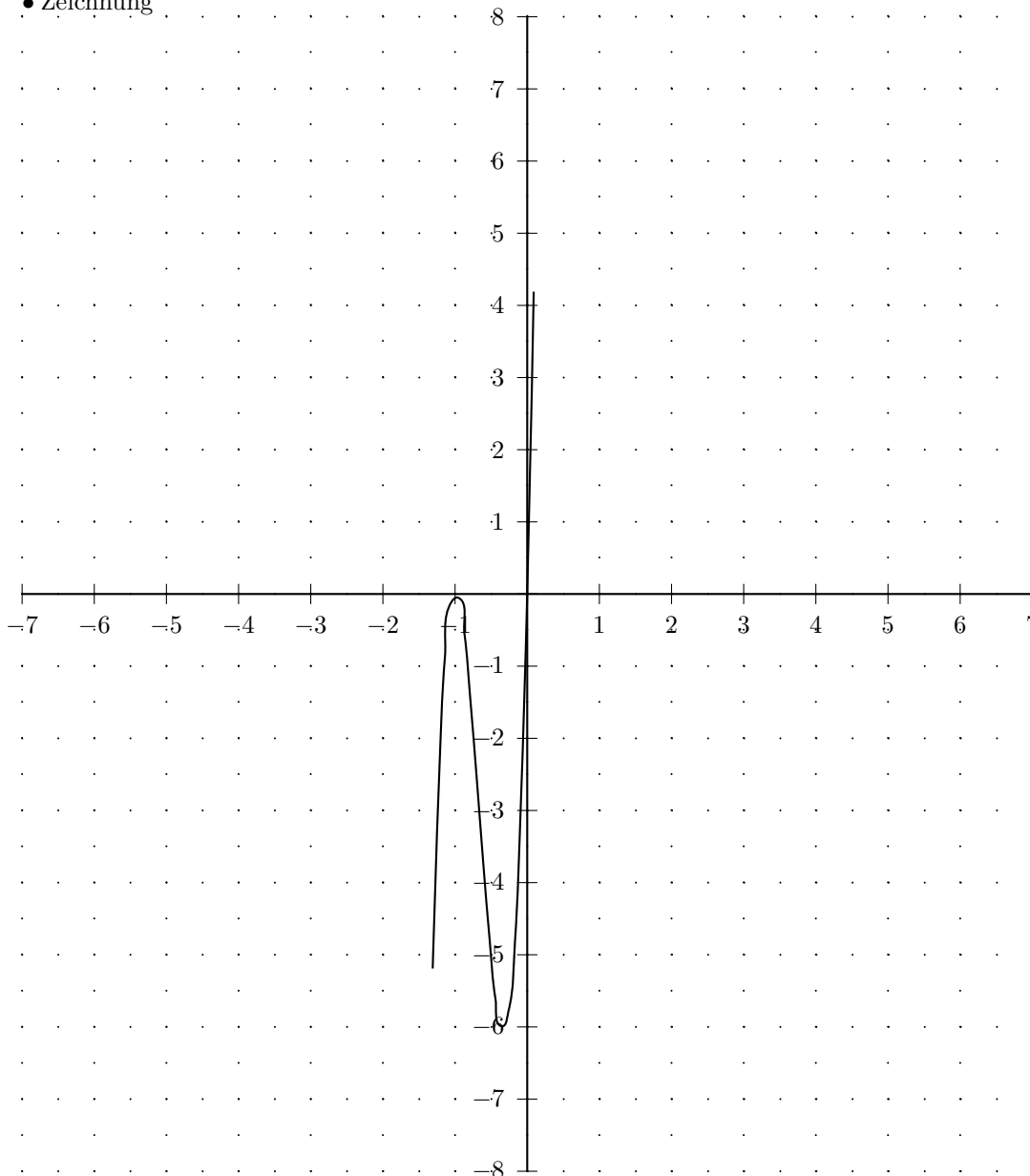
$$x \in]-\infty; -\frac{2}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-10206	4860,012	-1539	$16041\frac{3}{8}$
$-6\frac{1}{2}$	$-7963\frac{5}{16}$	4120,887	$-1417\frac{1}{2}$	11514,445
-6	-6075	3442,512	-1296	8019
$-5\frac{1}{2}$	$-4510\frac{11}{16}$	2824,887	$-1174\frac{1}{2}$	5385,445
-5	-3240	2268,012	-1053	$3459\frac{3}{8}$
$-4\frac{1}{2}$	$-2232\frac{9}{16}$	1771,887	$-931\frac{1}{2}$	2101,57
-4	-1458	1336,512	-810	1188
$-3\frac{1}{2}$	$-885\frac{15}{16}$	961,887	$-688\frac{1}{2}$	609,82
-3	-486	648,012	-567	$273\frac{3}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	$-227\frac{13}{16}$	394,887	$-445\frac{1}{2}$	100,195
-2	-81	202,512	-324	27
$-1\frac{1}{2}$	$-15\frac{3}{16}$	70,887	$-202\frac{1}{2}$	5,695
-1	0	0,012	-81	$3\frac{3}{8}$
$-\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{16}$	-10,113	$40\frac{1}{2}$	2,32
0	0	40,512	162	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	40,512	162	0
$\frac{1}{2}$	$45\frac{9}{16}$	151,887	$283\frac{1}{2}$	9,07
1	162	324,012	405	$57\frac{3}{8}$
$1\frac{1}{2}$	$379\frac{11}{16}$	556,887	$526\frac{1}{2}$	187,945
2	729	850,512	648	459
$2\frac{1}{2}$	$1240\frac{5}{16}$	1204,887	$769\frac{1}{2}$	943,945
3	1944	1620,012	891	$1731\frac{3}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$2870\frac{7}{16}$	2095,887	$1012\frac{1}{2}$	2925,07
4	4050	2632,512	1134	4644
$4\frac{1}{2}$	$5513\frac{1}{16}$	3229,887	$1255\frac{1}{2}$	7022,32
5	7290	3888,012	1377	$10209\frac{3}{8}$
$5\frac{1}{2}$	$9411\frac{3}{16}$	4606,887	$1498\frac{1}{2}$	14369,695
6	11907	5386,512	1620	19683
$6\frac{1}{2}$	$14807\frac{13}{16}$	6226,887	$1741\frac{1}{2}$	26344,195
7	18144	7128,012	1863	$34563\frac{3}{8}$

• Zeichnung



Aufgabe (25)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 54x^3 - 270x^2 + 432x - 216 = 54(x-1)(x-2)^2$$

$$f'(x) = 162x^2 - 540x + 432 = 162(x - 1\frac{1}{3})(x-2)$$

$$f''(x) = 324x - 540 = 324(x - 1\frac{2}{3})$$

$$f'''(x) = 324$$

$$F(x) = \int (54x^3 - 270x^2 + 432x - 216)dx = 13\frac{1}{2}x^4 - 90x^3 + 216x^2 - 216x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [54 \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [54 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 54 \cdot (-x)^3 - 270 \cdot (-x)^2 + 432 \cdot (-x) - 216$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 54x^3 - 270x^2 + 432x - 216 = 0$$

$$54x^3 - 270x^2 + 432x - 216 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: 1

$$\begin{array}{r} (54x^3 - 270x^2 + 432x - 216) : (x-1) = 54x^2 - 216x + 216 \\ \underline{-(54x^3 - 54x^2)} \\ -216x^2 + 432x - 216 \\ \underline{-(-216x^2 + 216x)} \\ 216x - 216 \\ \underline{-(216x - 216)} \\ 0 \end{array}$$

$$54x^2 - 216x + 216 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+216 \pm \sqrt{(-216)^2 - 4 \cdot 54 \cdot 216}}{2 \cdot 54}$$

$$x_{1/2} = \frac{+216 \pm \sqrt{0}}{216 \pm 0}$$

$$x_{1/2} = \frac{108}{216 \pm 0}$$

$$x_1 = \frac{108}{216 + 0} \quad x_2 = \frac{216 - 0}{108}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2$$

$$x_1 = 1; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 2; \quad 2\text{-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$x > 2$
$f(x)$	-	0	+	0	+

$x \in]1; 2[\cup]2; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 1[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 162x^2 - 540x + 432 = 0$$

$$162x^2 - 540x + 432 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+540 \pm \sqrt{(-540)^2 - 4 \cdot 162 \cdot 432}}{2 \cdot 162}$$

$$x_{1/2} = \frac{+540 \pm \sqrt{11664}}{324}$$

$$x_{1/2} = \frac{540 \pm 108}{324}$$

$$x_1 = \frac{540 + 108}{324} \quad x_2 = \frac{540 - 108}{324}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 1\frac{1}{3}$$

$$x_3 = 1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(1\frac{1}{3}) = -108$$

$$f''(1\frac{1}{3}) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(1\frac{1}{3}/8)$$

$$f''(2) = 108 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(2/0)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; 1\frac{1}{3}[\cup]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]1\frac{1}{3}; 2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 324x - 540 = 0$$

$$324x - 540 = 0 \quad / + 540$$

$$324x = 540 \quad / : 324$$

$$x = \frac{540}{324}$$

$$x = 1\frac{2}{3}$$

$$x_5 = 1\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(1\frac{2}{3}) = 4$$

$$f'''(1\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(1\frac{2}{3}/4)$$

- Krümmung

	$x <$	$1\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	-	0	+

$$x \in]1\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

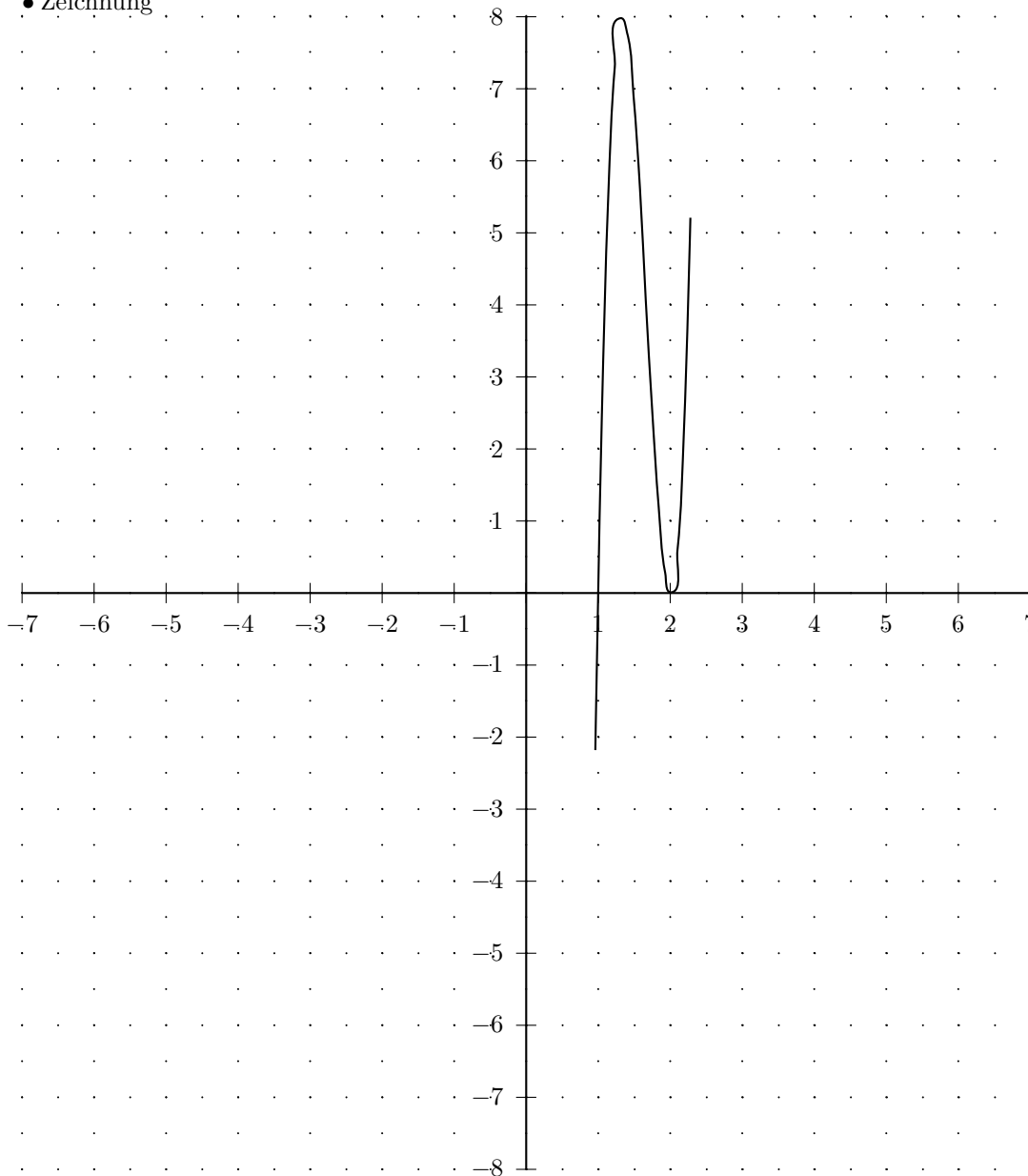
$$x \in]-\infty; 1\frac{2}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-34992	12150,017	-2808	$75379\frac{1}{5}$
$-6\frac{1}{2}$	$-29261\frac{1}{4}$	10786,517	-2646	$59344\frac{19}{32}$
-6	-24192	9504,017	-2484	46008
$-5\frac{1}{2}$	$-19743\frac{3}{4}$	8302,517	-2322	$35049\frac{3}{32}$
-5	-15876	7182,017	-2160	$26167\frac{1}{5}$
$-4\frac{1}{2}$	$-12548\frac{1}{4}$	6142,517	-1998	$19083\frac{3}{32}$
-4	-9720	5184,017	-1836	13536
$-3\frac{1}{2}$	$-7350\frac{3}{4}$	4306,517	-1674	$9286\frac{19}{32}$
-3	-5400	3510,017	-1512	$6115\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$-3827\frac{1}{4}$	2794,517	-1350	$3823\frac{19}{32}$
-2	-2592	2160,017	-1188	2232
$-1\frac{1}{2}$	$-1653\frac{3}{4}$	1606,517	-1026	$1182\frac{3}{32}$
-1	-972	1134,017	-864	$535\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-506\frac{1}{4}$	742,517	-702	$174\frac{3}{32}$
0	-216	432,017	-540	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-216	432,017	-540	0
$\frac{1}{2}$	$-60\frac{3}{4}$	202,517	-378	$-64\frac{13}{32}$
1	0	54,017	-216	$-76\frac{1}{5}$
$1\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	-13,483	-54	$-73\frac{13}{32}$
2	0	0,017	108	-72
$2\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	94,517	270	$-68\frac{29}{32}$
3	108	270,017	432	$-40\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$303\frac{3}{4}$	526,517	594	$57\frac{3}{32}$
4	648	864,017	756	288
$4\frac{1}{2}$	$1181\frac{1}{4}$	1282,517	918	$736\frac{19}{32}$
5	1944	1782,017	1080	$1507\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2}$	$2976\frac{3}{4}$	2362,517	1242	$2725\frac{19}{32}$
6	4320	3024,017	1404	4536
$6\frac{1}{2}$	$6014\frac{1}{4}$	3766,517	1566	$7104\frac{3}{32}$
7	8100	4590,017	1728	$10615\frac{1}{2}$

• Zeichnung



Aufgabe (26)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 1\frac{19}{35}x^3 - 10\frac{4}{5}x^2 + 18\frac{18}{35}x = 1\frac{19}{35}x(x-3)(x-4)$$

$$f'(x) = 4\frac{22}{35}x^2 - 21\frac{3}{5}x + 18\frac{18}{35} = 4\frac{22}{35}(x-1,131)(x-3,535)$$

$$f''(x) = 9\frac{9}{35}x - 21\frac{3}{5} = 9\frac{9}{35}(x-2\frac{1}{3})$$

$$f'''(x) = 9\frac{9}{35}$$

$$F(x) = \int (1\frac{19}{35}x^3 - 10\frac{4}{5}x^2 + 18\frac{18}{35}x) dx = \frac{27}{70}x^4 - 3\frac{3}{5}x^3 + 9\frac{9}{35}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1\frac{19}{35} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1\frac{19}{35} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1\frac{19}{35} \cdot (-x)^3 - 10\frac{4}{5} \cdot (-x)^2 + 18\frac{18}{35} \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 1\frac{19}{35}x^3 - 10\frac{4}{5}x^2 + 18\frac{18}{35}x = 0$$

$$x(1\frac{19}{35}x^2 - 10\frac{4}{5}x + 18\frac{18}{35}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 1\frac{19}{35}x^2 - 10\frac{4}{5}x + 18\frac{18}{35} = 0$$

$$1\frac{19}{35}x^2 - 10\frac{4}{5}x + 18\frac{18}{35} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+10\frac{4}{5} \pm \sqrt{(-10\frac{4}{5})^2 - 4 \cdot 1\frac{19}{35} \cdot 18\frac{18}{35}}}{2 \cdot 1\frac{19}{35}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+10\frac{4}{5} \pm \sqrt{2,38}}{3\frac{3}{35}}$$

$$x_{1/2} = \frac{10\frac{4}{5} \pm 1\frac{19}{35}}{3\frac{3}{35}}$$

$$x_1 = \frac{10\frac{4}{5} + 1\frac{19}{35}}{3\frac{3}{35}} \quad x_2 = \frac{10\frac{4}{5} - 1\frac{19}{35}}{3\frac{3}{35}}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 3$$

$$x_1 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 3; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 4; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]0; 3[\cup]4; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[\cup]3; 4[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4\frac{22}{35}x^2 - 21\frac{3}{5}x + 18\frac{18}{35} = 0$$

$$4\frac{22}{35}x^2 - 21\frac{3}{5}x + 18\frac{18}{35} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+21\frac{3}{5} \pm \sqrt{(-21\frac{3}{5})^2 - 4 \cdot 4\frac{22}{35} \cdot 18\frac{18}{35}}}{2 \cdot 4\frac{22}{35}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+21\frac{3}{5} \pm \sqrt{123,781}}{9\frac{9}{35}}$$

$$x_{1/2} = \frac{21\frac{3}{5} \pm 11,126}{9\frac{9}{35}}$$

$$x_1 = \frac{21\frac{3}{5} + 11,126}{9\frac{9}{35}} \quad x_2 = \frac{21\frac{3}{5} - 11,126}{9\frac{9}{35}}$$

$$x_1 = 3,535 \quad x_2 = 1,131$$

$$x_4 = 1,131; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 3,535; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(1,131) = -11,126$$

$$f''(1,131) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(1,131/9,357)$$

$$f''(3,535) = 11,126 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(3,535/-1,357)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	1,131	$< x <$	3,535	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; 1,131[\cup]3,535; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]1,131; 3,535[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 9\frac{9}{35}x - 21\frac{3}{5} = 0$$

$$9\frac{9}{35}x - 21\frac{3}{5} = 0 \quad / + 21\frac{3}{5}$$

$$9\frac{9}{35}x = 21\frac{3}{5} \quad / : 9\frac{9}{35}$$

$$x = \frac{21\frac{3}{5}}{9\frac{9}{35}}$$

$$x = 2\frac{1}{3}$$

$$x_6 = 2\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(2\frac{1}{3}) = 4$$

$$f'''(2\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(2\frac{1}{3}/4)$$

- Krümmung

	$x <$	$2\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	-	0	+

$$x \in]2\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

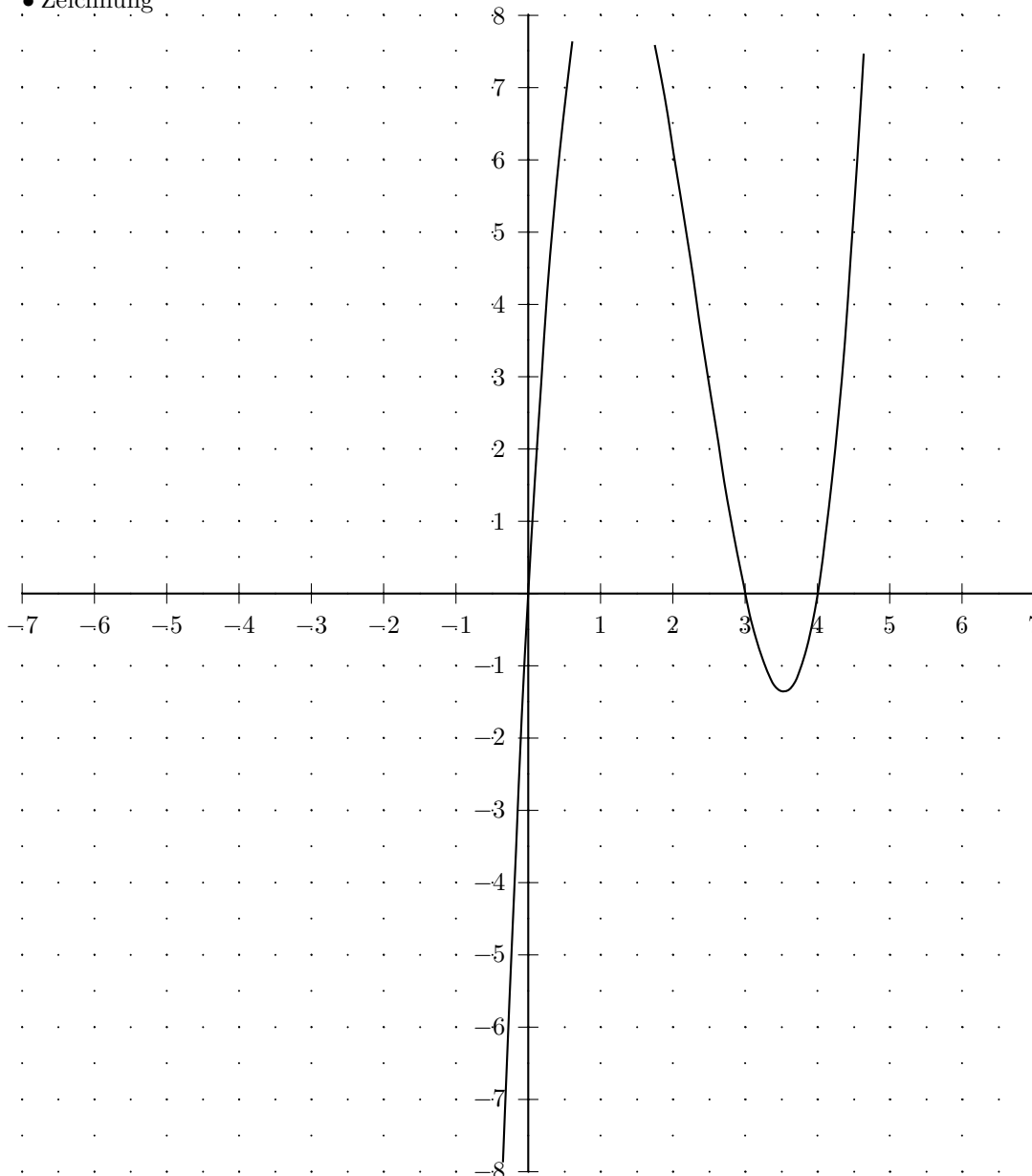
$$x \in]-\infty; 2\frac{1}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-1188	396,515	$-86\frac{2}{5}$	$2614\frac{1}{2}$
$-6\frac{1}{2}$	$-1000\frac{7}{20}$	354,472	$-81\frac{27}{35}$	2068,288
-6	$-833\frac{1}{7}$	314,743	$-77\frac{1}{7}$	$1610\frac{26}{35}$
$-5\frac{1}{2}$	-685,221	277,329	$-72\frac{18}{35}$	1231,931
-5	$-555\frac{3}{7}$	242,229	$-67\frac{31}{35}$	$922\frac{1}{2}$
$-4\frac{1}{2}$	$-442\frac{17}{28}$	209,443	$-63\frac{9}{35}$	673,674
-4	$-345\frac{3}{5}$	178,972	$-58\frac{22}{35}$	$477\frac{9}{35}$
$-3\frac{1}{2}$	$-263\frac{1}{4}$	150,815	-54	325,631
-3	$-194\frac{2}{5}$	124,972	$-49\frac{13}{35}$	$211\frac{53}{70}$
$-2\frac{1}{2}$	$-137\frac{23}{28}$	101,443	$-44\frac{26}{35}$	129,174
-2	$-92\frac{4}{7}$	80,229	$-40\frac{4}{35}$	72
$-1\frac{1}{2}$	-57,279	61,329	$-35\frac{17}{35}$	34,931
-1	$-30\frac{6}{7}$	44,743	$-30\frac{6}{7}$	$13\frac{17}{70}$
$-\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{20}$	30,472	$-26\frac{8}{35}$	2,788
0	0	18,515	$-21\frac{3}{5}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	18,515	$-21\frac{3}{5}$	0
$\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	8,872	$-16\frac{34}{35}$	1,888
1	$9\frac{9}{35}$	1,543	$-12\frac{12}{35}$	$6\frac{3}{70}$
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{19}{28}$	-3,471	$-7\frac{5}{7}$	10,631
2	$6\frac{6}{35}$	-6,171	$-3\frac{3}{35}$	$14\frac{2}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{29}{28}$	-6,557	$1\frac{19}{35}$	16,674
3	0	-4,628	$6\frac{9}{35}$	$17\frac{5}{14}$
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{20}$	-0,385	$10\frac{4}{5}$	16,931
4	0	6,172	$15\frac{3}{7}$	$16\frac{16}{35}$
$4\frac{1}{2}$	5,207	15,043	$20\frac{2}{35}$	17,574
5	$15\frac{3}{7}$	26,229	$24\frac{24}{35}$	$22\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2}$	$31\frac{23}{28}$	39,729	$29\frac{11}{35}$	$34\frac{1}{32}$
6	$55\frac{19}{35}$	55,543	$33\frac{33}{35}$	$55\frac{19}{35}$
$6\frac{1}{2}$	$87\frac{3}{4}$	73,672	$38\frac{4}{7}$	90,988
7	$129\frac{3}{5}$	94,115	$43\frac{1}{5}$	$144\frac{9}{10}$

• Zeichnung



Aufgabe (27)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 = -2x^2(x - 3)$$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x - 2)$$

$$f''(x) = -12x + 12 = -12(x - 1)$$

$$f'''(x) = -12$$

$$F(x) = \int (-2x^3 + 6x^2) dx = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -2 \cdot (-x)^3 + 6 \cdot (-x)^2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 = 0$$

$$x^2(-2x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -2x + 6 = 0$$

$$-2x + 6 = 0 \quad / -6$$

$$-2x = -6 \quad / : (-2)$$

$$x = \frac{-6}{-2}$$

$$x = 3$$

$$x_1 = 0; \quad \underline{\text{2-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 3; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
$f(x)$	+	+	-

$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 3[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]3; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -6x^2 + 12x = 0$$

$$x(-6x + 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -6x + 12 = 0$$

$$-6x + 12 = 0 \quad / -12$$

$$-6x = -12 \quad / : (-6)$$

$$x = \frac{-12}{-6}$$

$$x = 2$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$x_4 = 2; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:(0/0)}}$$

$$f''(2) = -12$$

$$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:(2/8)}}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	+	-

$x \in]0; 2[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[\cup]2; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -12x + 12 = 0$$

$$-12x + 12 = 0 \quad / -12$$

$$-12x = -12 \quad / : (-12)$$

$$x = \frac{-12}{-12}$$

$$x = 1$$

$$x_5 = 1; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f'''(1) = 4$$

$$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Wendepunkt:}(1/4)}$$

- Krümmung

	$x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$$\underline{x \in]-\infty; 1[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$$

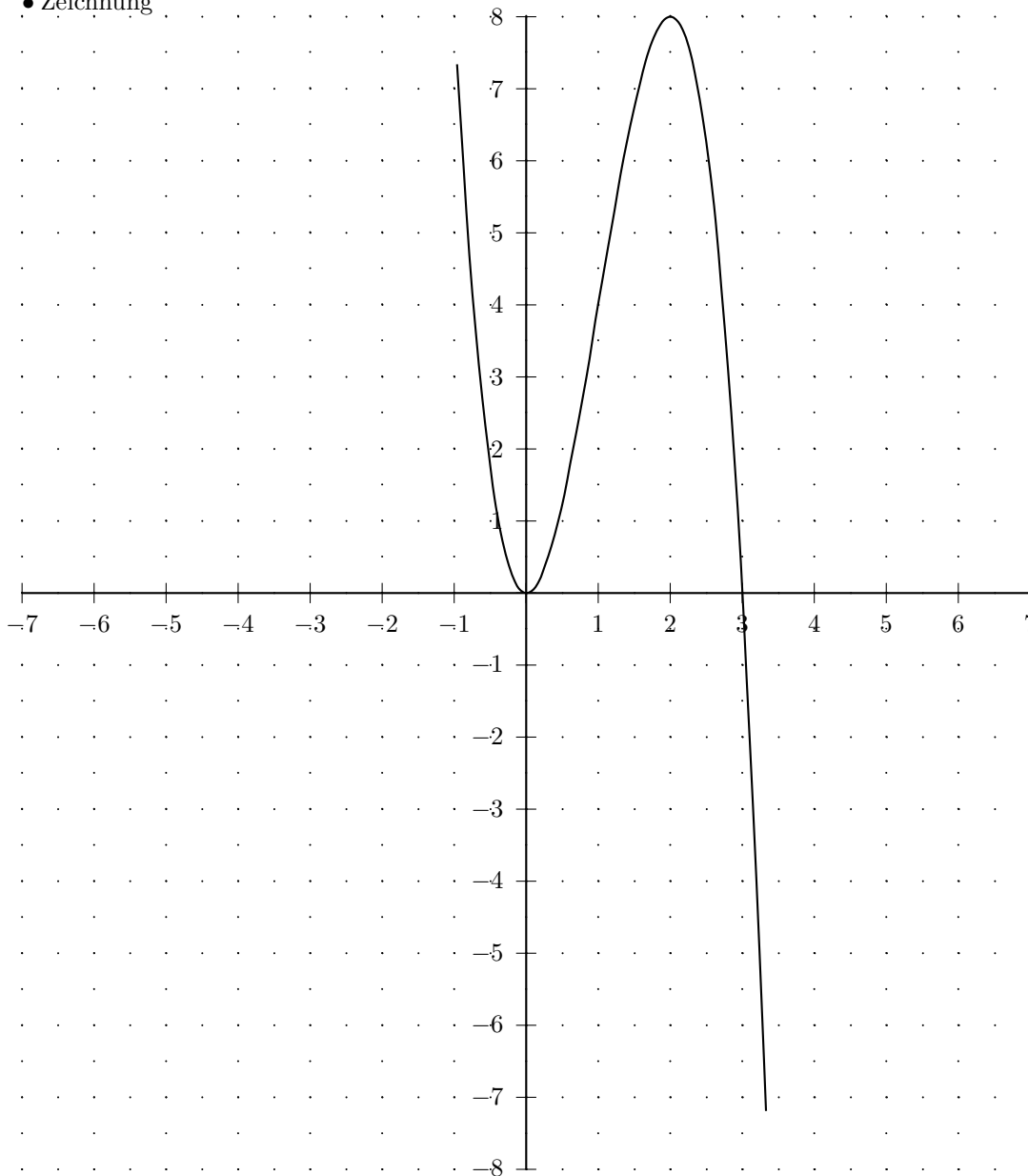
$$\underline{x \in]1; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	980	-378,001	96	-1886 $\frac{1}{2}$
-6 $\frac{1}{2}$	802 $\frac{3}{4}$	-331,501	90	-1441 $\frac{25}{32}$
-6	648	-288,001	84	-1080
-5 $\frac{1}{2}$	514 $\frac{1}{4}$	-247,501	78	-790 $\frac{9}{32}$
-5	400	-210,001	72	-562 $\frac{1}{2}$
-4 $\frac{1}{2}$	303 $\frac{3}{4}$	-175,501	66	-387 $\frac{9}{32}$
-4	224	-144,001	60	-256
-3 $\frac{1}{2}$	159 $\frac{1}{4}$	-115,501	54	-160 $\frac{25}{32}$
-3	108	-90,001	48	-94 $\frac{1}{2}$
-2 $\frac{1}{2}$	68 $\frac{3}{4}$	-67,501	42	-50 $\frac{25}{32}$
-2	40	-48,001	36	-24
-1 $\frac{1}{2}$	20 $\frac{1}{4}$	-31,501	30	-9 $\frac{9}{32}$
-1	8	-18,001	24	-2 $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$	1 $\frac{3}{4}$	-7,501	18	- $\frac{9}{32}$
0	0	-0,001	12	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-0,001	12	0
$\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{4}$	4,499	6	$\frac{7}{32}$
1	4	5,999	0	1 $\frac{1}{2}$
1 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{3}{4}$	4,499	-6	4 $\frac{7}{32}$
2	8	-0,001	-12	8
2 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{4}$	-7,501	-18	11 $\frac{23}{32}$
3	0	-18,001	-24	13 $\frac{1}{2}$
3 $\frac{1}{2}$	-12 $\frac{1}{4}$	-31,501	-30	10 $\frac{23}{32}$
4	-32	-48,001	-36	0
4 $\frac{1}{2}$	-60 $\frac{3}{4}$	-67,501	-42	-22 $\frac{25}{32}$
5	-100	-90,001	-48	-62 $\frac{1}{2}$
5 $\frac{1}{2}$	-151 $\frac{1}{4}$	-115,501	-54	-124 $\frac{25}{32}$
6	-216	-144,001	-60	-216
6 $\frac{1}{2}$	-295 $\frac{3}{4}$	-175,501	-66	-343 $\frac{9}{32}$
7	-392	-210,001	-72	-514 $\frac{1}{2}$

• Zeichnung



Aufgabe (28)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 = -2x^2(x - 3)$$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x - 2)$$

$$f''(x) = -12x + 12 = -12(x - 1)$$

$$f'''(x) = -12$$

$$F(x) = \int (-2x^3 + 6x^2) dx = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -2 \cdot (-x)^3 + 6 \cdot (-x)^2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 = 0$$

$$x^2(-2x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -2x + 6 = 0$$

$$-2x + 6 = 0 \quad / -6$$

$$-2x = -6 \quad / : (-2)$$

$$x = \frac{-6}{-2}$$

$$x = 3$$

$$x_1 = 0; \quad \underline{\text{2-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 3; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichenstabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
$f(x)$	+	+	-

$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 3[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]3; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -6x^2 + 12x = 0$$

$$x(-6x + 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -6x + 12 = 0$$

$$-6x + 12 = 0 \quad / -12$$

$$-6x = -12 \quad / : (-6)$$

$$x = \frac{-12}{-6}$$

$$x = 2$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$x_4 = 2; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:(0/0)}}$$

$$f''(2) = -12$$

$$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:(2/8)}}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	+	-

$x \in]0; 2[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[\cup]2; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -12x + 12 = 0$$

$$-12x + 12 = 0 \quad / -12$$

$$-12x = -12 \quad / : (-12)$$

$$x = \frac{-12}{-12}$$

$$x = 1$$

$$x_5 = 1; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f'''(1) = 4$$

$$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Wendepunkt:}(1/4)}$$

- Krümmung

	$x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$$\underline{x \in]-\infty; 1[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$$

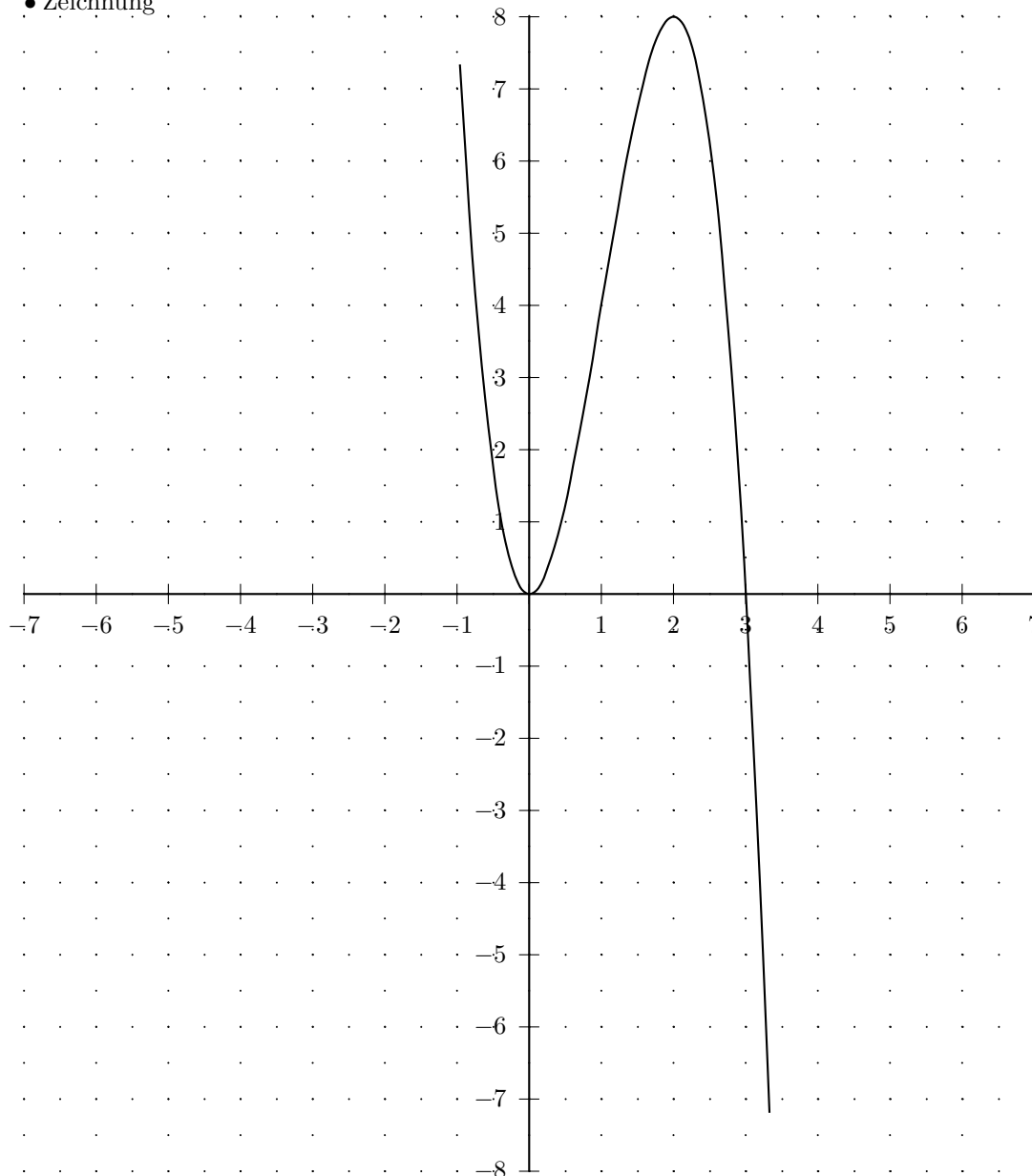
$$\underline{x \in]1; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	980	-378,001	96	-1886 $\frac{1}{2}$
-6 $\frac{1}{2}$	802 $\frac{3}{4}$	-331,501	90	-1441 $\frac{25}{32}$
-6	648	-288,001	84	-1080
-5 $\frac{1}{2}$	514 $\frac{1}{4}$	-247,501	78	-790 $\frac{9}{32}$
-5	400	-210,001	72	-562 $\frac{1}{2}$
-4 $\frac{1}{2}$	303 $\frac{3}{4}$	-175,501	66	-387 $\frac{9}{32}$
-4	224	-144,001	60	-256
-3 $\frac{1}{2}$	159 $\frac{1}{4}$	-115,501	54	-160 $\frac{25}{32}$
-3	108	-90,001	48	-94 $\frac{1}{2}$
-2 $\frac{1}{2}$	68 $\frac{3}{4}$	-67,501	42	-50 $\frac{25}{32}$
-2	40	-48,001	36	-24
-1 $\frac{1}{2}$	20 $\frac{1}{4}$	-31,501	30	-9 $\frac{9}{32}$
-1	8	-18,001	24	-2 $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$	1 $\frac{3}{4}$	-7,501	18	- $\frac{9}{32}$
0	0	-0,001	12	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-0,001	12	0
$\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{4}$	4,499	6	$\frac{7}{32}$
1	4	5,999	0	1 $\frac{1}{2}$
1 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{3}{4}$	4,499	-6	4 $\frac{7}{32}$
2	8	-0,001	-12	8
2 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{4}$	-7,501	-18	11 $\frac{23}{32}$
3	0	-18,001	-24	13 $\frac{1}{2}$
3 $\frac{1}{2}$	-12 $\frac{1}{4}$	-31,501	-30	10 $\frac{23}{32}$
4	-32	-48,001	-36	0
4 $\frac{1}{2}$	-60 $\frac{3}{4}$	-67,501	-42	-22 $\frac{25}{32}$
5	-100	-90,001	-48	-62 $\frac{1}{2}$
5 $\frac{1}{2}$	-151 $\frac{1}{4}$	-115,501	-54	-124 $\frac{25}{32}$
6	-216	-144,001	-60	-216
6 $\frac{1}{2}$	-295 $\frac{3}{4}$	-175,501	-66	-343 $\frac{9}{32}$
7	-392	-210,001	-72	-514 $\frac{1}{2}$

• Zeichnung



Aufgabe (29)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 5\frac{2}{5}x^3 + 27x^2 + 32\frac{2}{5}x = 5\frac{2}{5}(x+3)(x+2)x$$

$$f'(x) = 16\frac{1}{5}x^2 + 54x + 32\frac{2}{5} = 16\frac{1}{5}(x+2,549)(x+0,785)$$

$$f''(x) = 32\frac{2}{5}x + 54 = 32\frac{2}{5}(x+1\frac{2}{3})$$

$$f'''(x) = 32\frac{2}{5}$$

$$F(x) = \int (5\frac{2}{5}x^3 + 27x^2 + 32\frac{2}{5}x) dx = 1\frac{7}{20}x^4 + 9x^3 + 16\frac{1}{5}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [5\frac{2}{5} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [5\frac{2}{5} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 5\frac{2}{5} \cdot (-x)^3 + 27 \cdot (-x)^2 + 32\frac{2}{5} \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 5\frac{2}{5}x^3 + 27x^2 + 32\frac{2}{5}x = 0$$

$$x(5\frac{2}{5}x^2 + 27x + 32\frac{2}{5}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 5\frac{2}{5}x^2 + 27x + 32\frac{2}{5} = 0$$

$$5\frac{2}{5}x^2 + 27x + 32\frac{2}{5} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 5\frac{2}{5} \cdot 32\frac{2}{5}}}{2 \cdot 5\frac{2}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-27 \pm \sqrt{29\frac{4}{25}}}{10\frac{4}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-27 \pm 5\frac{2}{5}}{10\frac{4}{5}}$$

$$x_1 = \frac{-27 + 5\frac{2}{5}}{10\frac{4}{5}} \quad x_2 = \frac{-27 - 5\frac{2}{5}}{10\frac{4}{5}}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -3$$

$$x_1 = -3; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -2; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x \in] -3; -2[\cup] 0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in] -\infty; -3[\cup] -2; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 16\frac{1}{5}x^2 + 54x + 32\frac{2}{5} = 0$$

$$16\frac{1}{5}x^2 + 54x + 32\frac{2}{5} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 16\frac{1}{5} \cdot 32\frac{2}{5}}}{2 \cdot 16\frac{1}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm \sqrt{816\frac{12}{25}}}{32\frac{2}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm 28,574}{32\frac{2}{5}}$$

$$x_1 = \frac{-54 + 28,574}{32\frac{2}{5}} \quad x_2 = \frac{-54 - 28,574}{32\frac{2}{5}}$$

$$x_1 = -0,785 \quad x_2 = -2,549$$

$$x_4 = -2,549; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = -0,785; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f''(-2,549) = -28,574$$

$$f''(-2,549) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-2,549/3, 408)$$

$$f''(-0,785) = 28,574 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-0,785/ -11, 408)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,549$	$< x <$	$-0,785$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x \in]-\infty; -2,549[\cup]-0,785; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-2,549; -0,785[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 32\frac{2}{5}x + 54 = 0$$

$$32\frac{2}{5}x + 54 = 0 \quad / -54$$

$$32\frac{2}{5}x = -54 \quad / : 32\frac{2}{5}$$

$$x = \frac{-54}{32\frac{2}{5}}$$

$$x = -1\frac{2}{3}$$

$$x_6 = -1\frac{2}{3}; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-1\frac{2}{3}) = -4$$

$$f'''(-1\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-1\frac{2}{3}/ -4)$$

- Krümmung

	$x <$	$-1\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$$x \in]-1\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

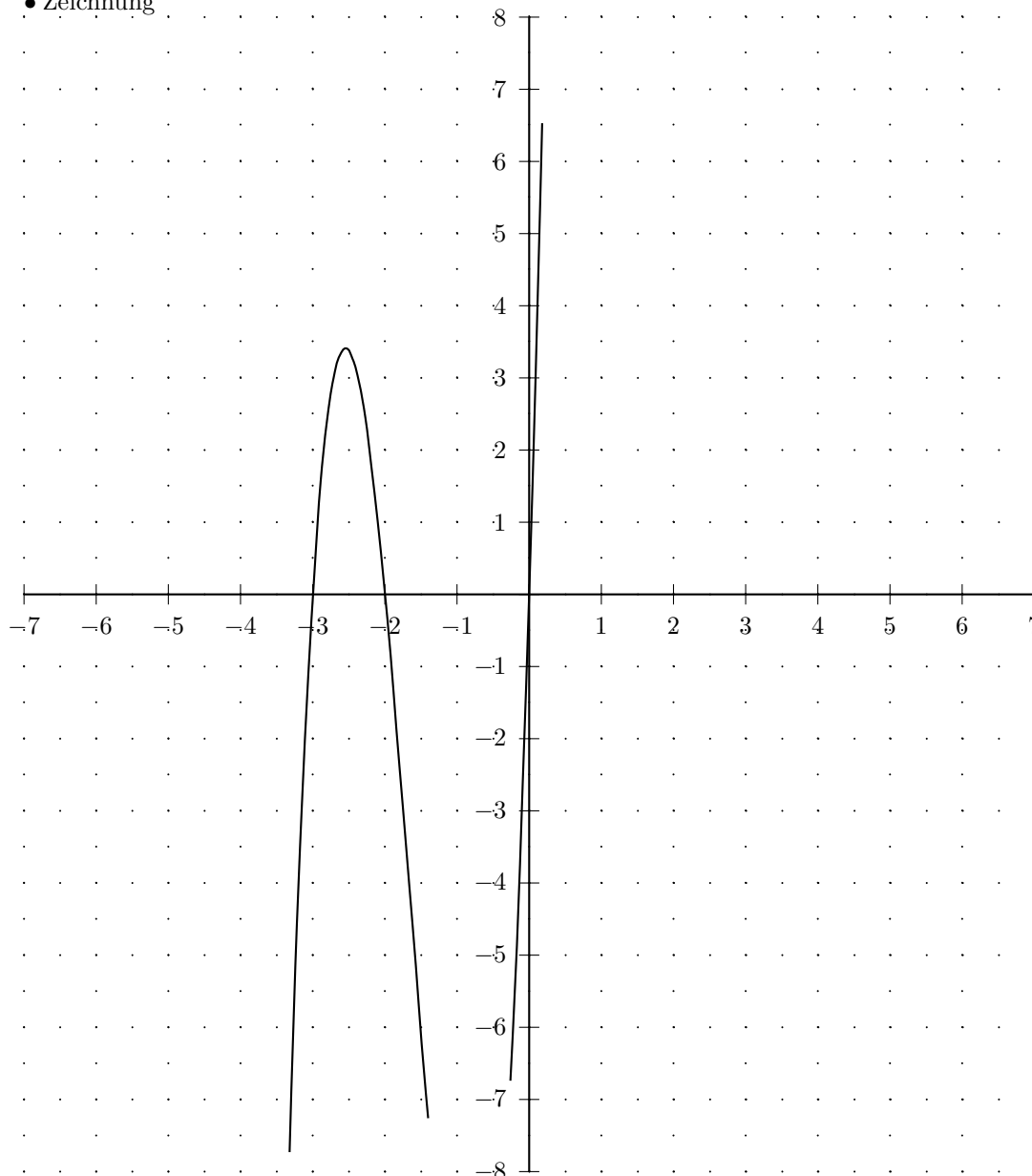
$$x \in]-\infty; -1\frac{2}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-756	448,202	-172 $\frac{4}{5}$	948 $\frac{3}{20}$
-6 $\frac{1}{2}$	-552 $\frac{33}{40}$	365,852	-156 $\frac{2}{5}$	622,659
-6	-388 $\frac{4}{5}$	291,602	-140 $\frac{4}{5}$	388 $\frac{4}{5}$
-5 $\frac{1}{2}$	-259 $\frac{7}{8}$	225,452	-124 $\frac{1}{5}$	228,009
-5	-162	167,402	-108	123 $\frac{3}{4}$
-4 $\frac{1}{2}$	-91 $\frac{1}{8}$	117,452	-91 $\frac{4}{5}$	61,509
-4	-43 $\frac{1}{5}$	75,602	-75 $\frac{2}{5}$	28 $\frac{4}{5}$
-3 $\frac{1}{2}$	-14 $\frac{7}{40}$	41,852	-59 $\frac{2}{5}$	15,159
-3	0	16,202	-43 $\frac{1}{5}$	12 $\frac{3}{20}$
-2 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{3}{8}$	-1,348	-27	13 $\frac{23}{64}$
-2	0	-10,798	-10 $\frac{4}{5}$	14 $\frac{2}{5}$
-1 $\frac{1}{2}$	-6 $\frac{3}{40}$	-12,148	5 $\frac{2}{5}$	12,909
-1	-10 $\frac{4}{5}$	-5,398	21 $\frac{3}{5}$	8 $\frac{11}{20}$
- $\frac{1}{2}$	-10 $\frac{1}{8}$	9,452	37 $\frac{4}{5}$	3,009
0	0	32,402	54	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	32,402	54	0
$\frac{1}{2}$	23 $\frac{5}{8}$	63,452	70 $\frac{1}{5}$	5,259
1	64 $\frac{4}{5}$	102,602	86 $\frac{2}{5}$	26 $\frac{11}{20}$
1 $\frac{1}{2}$	127 $\frac{23}{40}$	149,852	102 $\frac{3}{5}$	73,659
2	216	205,202	118 $\frac{2}{5}$	158 $\frac{2}{5}$
2 $\frac{1}{2}$	334 $\frac{1}{8}$	268,652	135	294 $\frac{39}{64}$
3	486	340,202	151 $\frac{1}{5}$	498 $\frac{3}{20}$
3 $\frac{1}{2}$	675 $\frac{27}{40}$	419,852	167	786,909
4	907 $\frac{1}{5}$	507,602	183	1180 $\frac{4}{5}$
4 $\frac{1}{2}$	1184 $\frac{9}{8}$	603,452	199 $\frac{1}{5}$	1701,759
5	1512	707,402	216	2373 $\frac{3}{4}$
5 $\frac{1}{2}$	1893 $\frac{3}{8}$	819,452	232 $\frac{1}{5}$	3222,759
6	2332 $\frac{4}{5}$	939,602	248	4276 $\frac{4}{5}$
6 $\frac{1}{2}$	2834 $\frac{13}{40}$	1067,852	264	5565,909
7	3402	1204,202	280 $\frac{4}{5}$	7122 $\frac{3}{20}$

• Zeichnung



Aufgabe (30)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(x+1)x(x-4)$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 1\frac{1}{3} = (x+0,528)(x-2,528)$$

$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$$

$$f'''(x) = 2$$

$$F(x) = \int (\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{3}x) dx = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{3} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{3} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{3} \cdot (-x)^3 - 1 \cdot (-x)^2 - 1\frac{1}{3} \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{3}x = 0$$

$$x(\frac{1}{3}x^2 - x - 1\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{3}x^2 - x - 1\frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{1}{3}x^2 - x - 1\frac{1}{3} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1\frac{1}{3})}}{2 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{2\frac{7}{9}}}{\frac{2}{3}}$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm 1\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$x_1 = \frac{1 + 1\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \quad x_2 = \frac{1 - 1\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -1$$

$$x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 4; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x \in]-1; 0[\cup]4; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in]-\infty; -(\cup]0; 4[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 1\frac{1}{3} = 0$$

$$1x^2 - 2x - 1\frac{1}{3} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1\frac{1}{3})}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{9\frac{1}{3}}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm 3,055}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + 3,055}{2} \quad x_2 = \frac{2 - 3,055}{2}$$

$$x_1 = 2,528 \quad x_2 = -0,528$$

$$x_4 = -0,528; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 2,528; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-0,528) = -3,055$$

$$f''(-0,528) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-0,528/0,376)$$

$$f''(2,528) = 3,055 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (2,528/-4,376)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -0,528$	$-0,528 < x < 2,528$	$x > 2,528$	x
$f'(x)$	+	0	-	+

$$x \in]-\infty; -0,528[\cup]2,528; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-0,528; 2,528[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 2x - 2 = 0$$

$$2x - 2 = 0 \quad / + 2$$

$$2x = 2 \quad / : 2$$

$$x = \frac{2}{2}$$

$$x = 1$$

$$x_6 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(1) = -2$$

$$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (1/-2)$$

- Krümmung

	$x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	-	+

$$x \in]1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

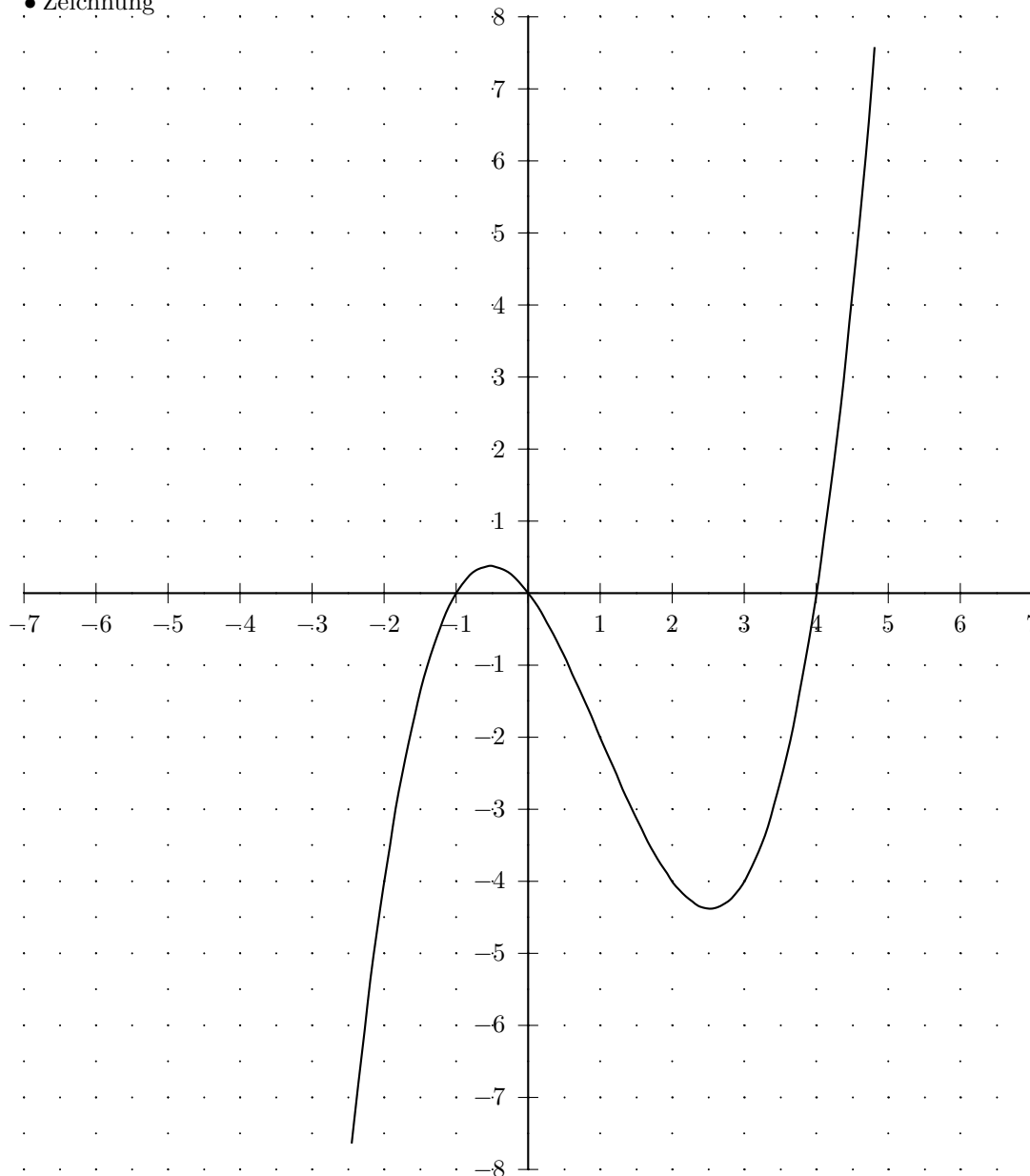
$$x \in]-\infty; 1[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-154	61,667	-16	$281\frac{3}{4}$
$-6\frac{1}{2}$	$-125\frac{1}{8}$	53,917	-15	212,13
-6	-100	46,667	-14	156
$-5\frac{1}{2}$	$-78\frac{3}{8}$	39,917	-13	$111\frac{35}{64}$
-5	-60	33,667	-12	$77\frac{1}{12}$
$-4\frac{1}{2}$	$-44\frac{5}{8}$	27,917	-11	$51\frac{3}{64}$
-4	-32	22,667	-10	32
$-3\frac{1}{2}$	$-21\frac{7}{8}$	17,917	-9	18,63
-3	-14	13,667	-8	$9\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{8}$	9,917	-7	$4\frac{19}{64}$
-2	-4	6,667	-6	$1\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{8}$	3,917	-5	$\frac{3}{64}$
-1	0	1,667	-4	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	-0,083	-3	-0,12
0	0	-1,333	-2	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-1,333	-2	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	-2,083	-1	$-\frac{13}{64}$
1	-2	-2,333	0	$-\frac{11}{12}$
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	-2,083	1	$-2\frac{13}{64}$
2	-4	-1,333	2	-4
$2\frac{1}{2}$	$-4\frac{3}{8}$	-0,083	3	-6,12
3	-4	1,667	4	$-8\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$-2\frac{5}{8}$	3,917	5	$-9\frac{61}{64}$
4	0	6,667	6	$-10\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{8}$	9,917	7	$-9\frac{45}{64}$
5	10	13,667	8	$-6\frac{1}{4}$
$5\frac{1}{2}$	$17\frac{7}{8}$	17,917	9	0,63
6	28	22,667	10	12
$6\frac{1}{2}$	$40\frac{5}{8}$	27,917	11	$29\frac{3}{64}$
7	56	33,667	12	$53\frac{1}{12}$

• Zeichnung



Aufgabe (31)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35} = -0,096(x + 4,019)(x + 1,997)(x - 4,005)$$

$$f'(x) = -0,288x^2 - 0,386x + 1\frac{19}{35} = -0,288(x + 3,08)(x - 1,739)$$

$$f''(x) = -0,576x - 0,386 = -0,576(x + 0,67)$$

$$f'''(x) = -0,576$$

$$F(x) = \int (-0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35})dx = -0,024x^4 - 0,064x^3 + \frac{27}{35}x^2 + 3\frac{3}{35}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-0,096 \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-0,096 \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -0,096 \cdot (-x)^3 - 0,193 \cdot (-x)^2 + 1\frac{19}{35} \cdot (-x) + 3\frac{3}{35}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35} = 0$$

$$-0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35} = 0$$

NumerischeSuche :

$$x_1 = -4,019; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -1,997; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 4,005; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-4,019$	$< x <$	$-1,997$	$< x <$	$4,005$	$< x$
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-

$x \in]-\infty; -4,019[\cup]-1,997; 4,005[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-4,019; -1,997[\cup]4,005; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -0,288x^2 - 0,386x + 1\frac{19}{35} = 0$$

$$-0,288x^2 - 0,386x + 1\frac{19}{35} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+0,386 \pm \sqrt{(-0,386)^2 - 4 \cdot (-0,288) \cdot 1\frac{19}{35}}}{2 \cdot (-0,288)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+0,386 \pm \sqrt{1,926}}{-0,576}$$

$$x_{1/2} = \frac{0,386 \pm 1,388}{-0,576}$$

$$x_1 = \frac{0,386 + 1,388}{-0,576} \quad x_2 = \frac{0,386 - 1,388}{-0,576}$$

$$x_1 = -3,08 \quad x_2 = 1,739$$

$$x_4 = -3,08; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 1,739; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-3,08) = 1,388 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-3,08 / -0,692)$$

$$f''(1,739) = -1,388$$

$$f''(1,739) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (1,739 / 4,68)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-3,08$	$< x <$	$1,739$	$< x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

$x \in] - 3,08; 1,739[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

$x \in] - \infty; -3,08[\cup] 1,739; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = -0,576x - 0,386 = 0$$

$$-0,576x - 0,386 = 0 \quad / + 0,386$$

$$-0,576x = 0,386 \quad / : (-0,576)$$

$$x = \frac{0,386}{-0,576}$$

$$x = -0,67$$

$x_6 = -0,67; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$

$$f'''(-0,67) = 1,994$$

$$f'''(-0,67) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(-0,67/1,994)$

• Krümmung

	$x <$	$-0,67$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in] - \infty; -0,67[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

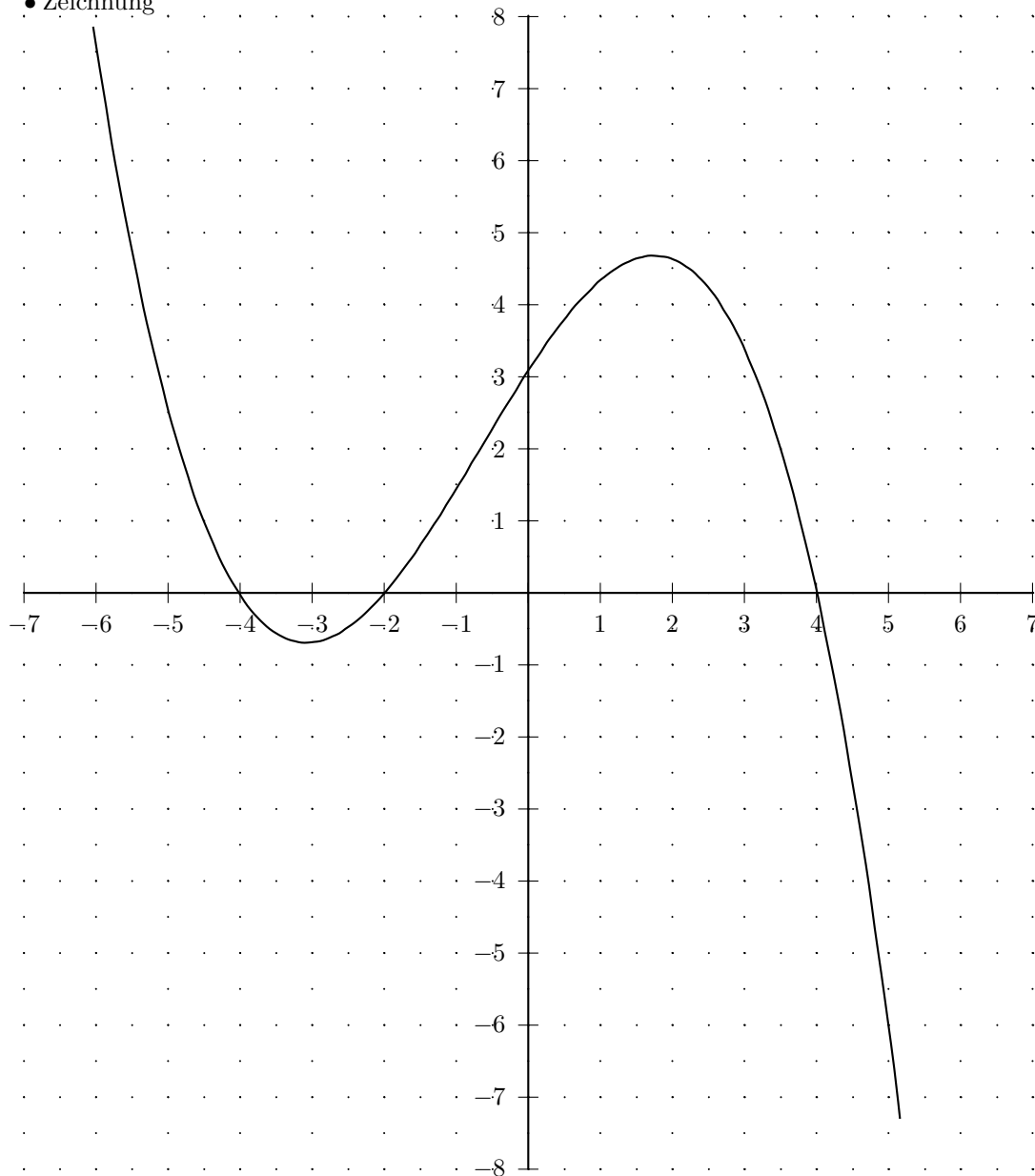
$x \in] - 0,67; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	15,757	-9,867	3,646	-19,358
$-6\frac{1}{2}$	11,267	-8,116	3,358	-12,638
-6	7,617	-6,509	3,07	-7,951
$-5\frac{1}{2}$	4,734	-5,046	2,782	-4,894
-5	2,546	-3,727	2,494	-3,101
$-4\frac{1}{2}$	0,983	-2,552	2,206	-2,243
-4	-0,03	-1,521	1,918	$-2\frac{2}{75}$
$-3\frac{1}{2}$	-0,563	-0,634	1,63	-2,193
-3	-0,688	0,109	1,342	-2,521
$-2\frac{1}{2}$	-0,478	0,708	1,054	-2,825
-2	-0,004	1,163	0,766	-2,955
$-1\frac{1}{2}$	0,661	1,474	0,478	-2,797
-1	1,446	1,641	0,19	-2,274
$-\frac{1}{2}$	2,278	1,664	-0,098	-1,343
0	$3\frac{3}{35}$	1,543	-0,386	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$3\frac{3}{35}$	1,543	-0,386	0
$\frac{1}{2}$	3,797	1,278	-0,674	1,726
1	4,34	0,869	-0,962	3,769
$1\frac{1}{2}$	4,642	0,316	$-1\frac{1}{4}$	6,026
2	4,631	-0,381	-1,538	8,358
$2\frac{1}{2}$	4,237	-1,222	-1,826	10,593
3	3,385	-2,207	-2,114	12,519
$3\frac{1}{2}$	2,005	-3,336	-2,402	13,89
4	0,025	-4,609	-2,69	14,424
$4\frac{1}{2}$	-2,628	-6,026	-2,978	13,803
5	$-6\frac{1}{40}$	-7,587	-3,266	11,673
$5\frac{1}{2}$	-10,239	-9,292	-3,554	7,642
6	-15,341	-11,141	-3,842	$1\frac{2}{7}$
$6\frac{1}{2}$	-21,404	-13,134	-4,13	-7,859
7	-28,499	-15,271	-4,418	-20,29

• Zeichnung



Aufgabe (32)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28} = -\frac{27}{56}(x+3)(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = -1\frac{25}{56}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 2\frac{23}{56} = -1\frac{25}{56}(x+2,12)(x-0,786)$$

$$f''(x) = -2\frac{25}{28}x - 1\frac{13}{14} = -2\frac{25}{28}(x + \frac{2}{3})$$

$$f'''(x) = -2\frac{25}{28}$$

$$F(x) = \int(-\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28})dx = -0,121x^4 - \frac{9}{28}x^3 + 1,205x^2 + 2\frac{25}{28}x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{27}{56} \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{27}{56} \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{27}{56} \cdot (-x)^3 - \frac{27}{28} \cdot (-x)^2 + 2\frac{23}{56} \cdot (-x) + 2\frac{25}{28}$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28} = 0$$

$$-\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28} = 0$$

Numerische Suche:

$$x_1 = -3; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -1; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 2; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichen-tabelle:

	$x < -3$	-3	$-3 < x < -1$	-1	$-1 < x < 2$	2	$x > 2$
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-

$$x \in]-\infty; -3[\cup]-1; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in]-3; -1[\cup]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -1\frac{25}{56}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 2\frac{23}{56} = 0$$

$$-1\frac{25}{56}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 2\frac{23}{56} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{13}{14} \pm \sqrt{(-1\frac{13}{14})^2 - 4 \cdot (-1\frac{25}{56}) \cdot 2\frac{23}{56}}}{2 \cdot (-1\frac{25}{56})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{13}{14} \pm \sqrt{17,667}}{-2\frac{25}{28}}$$

$$x_{1/2} = \frac{1\frac{13}{14} \pm 4,203}{-2\frac{25}{28}}$$

$$x_1 = \frac{1\frac{13}{14} + 4,203}{-2\frac{25}{28}} \quad x_2 = \frac{1\frac{13}{14} - 4,203}{-2\frac{25}{28}}$$

$$x_1 = -2,12 \quad x_2 = 0,786$$

$$x_4 = -2,12; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 0,786; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f''(-2,12) = 4,203 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-2,12 / -1,958)$$

$$f''(0,786) = -4,203$$

$$f''(0,786) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (0,786 / 3,958)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2, 12$	$< x <$	$0, 786$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in] - 2, 12; 0, 786[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in] - \infty; -2, 12[\cup] 0, 786; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$$f''(x) = -2\frac{25}{28}x - 1\frac{13}{14} = 0$$

$$-2\frac{25}{28}x - 1\frac{13}{14} = 0 \quad / + 1\frac{13}{14}$$

$$-2\frac{25}{28}x = 1\frac{13}{14} \quad / : \left(-2\frac{25}{28}\right)$$

$$x = \frac{1\frac{13}{14}}{-2\frac{25}{28}}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$x_6 = -\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-\frac{2}{3}) = 1$$

$$f'''(-\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-\frac{2}{3} | 1)$$

• Krümmung

	$x <$	$-\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in] - \infty; -\frac{2}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

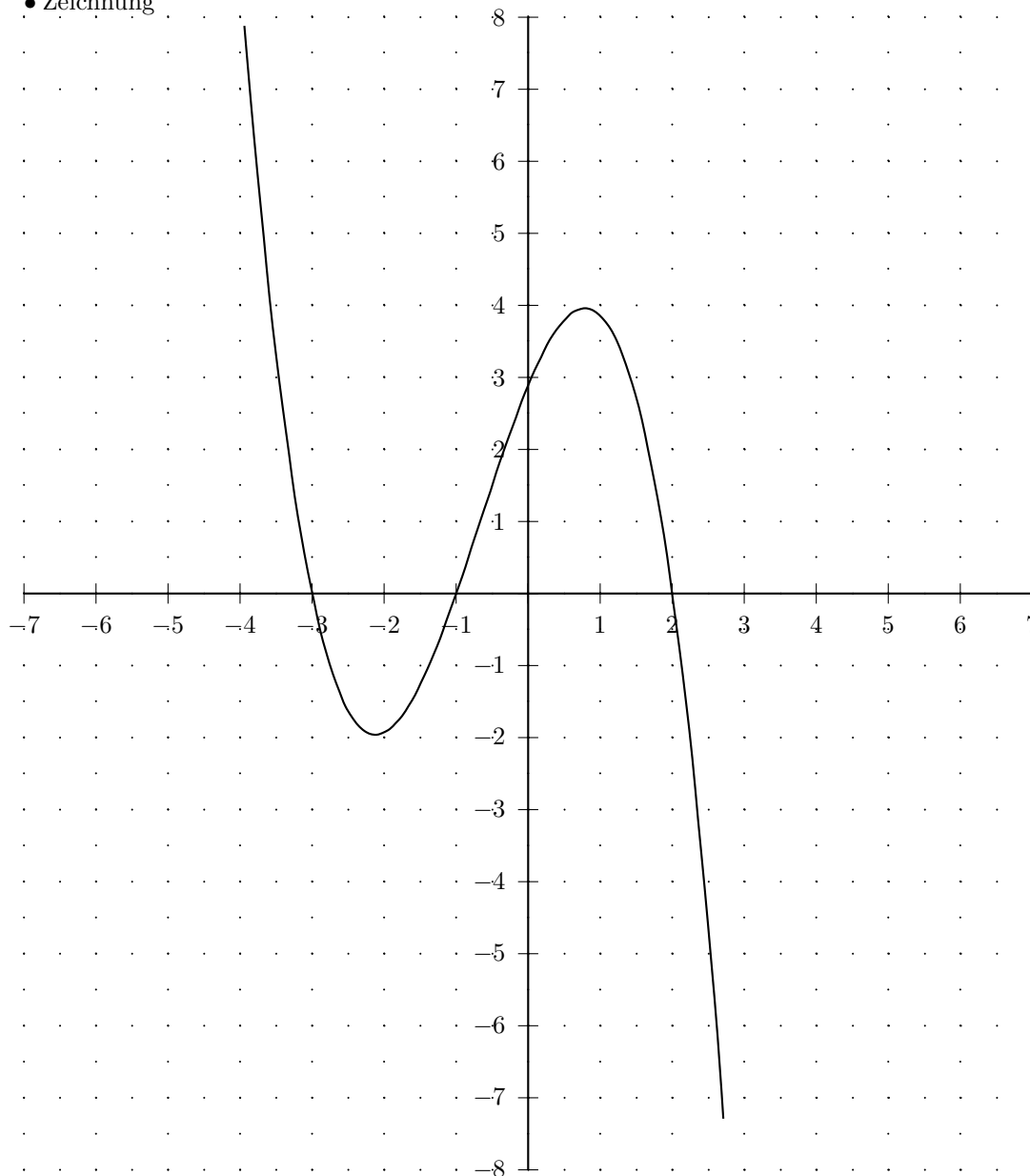
$x \in] -\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$104\frac{1}{7}$	-54,964	$18\frac{9}{28}$	$-140\frac{11}{32}$
$-6\frac{1}{2}$	$78\frac{57}{64}$	-46,165	$16\frac{7}{8}$	-94,769
-6	$57\frac{6}{7}$	-38,089	$15\frac{3}{7}$	$-60\frac{3}{4}$
$-5\frac{1}{2}$	40,681	-30,737	$13\frac{55}{56}$	-36,269
-5	27	-24,107	$12\frac{19}{28}$	-19,487
$-4\frac{1}{2}$	$16\frac{29}{64}$	-18,201	$11\frac{9}{56}$	-8,746
-4	$8\frac{19}{28}$	-13,018	$9\frac{9}{14}$	$-2\frac{4}{7}$
$-3\frac{1}{2}$	3,315	-8,558	$8\frac{11}{56}$	0,334
-3	0	-4,822	$6\frac{3}{4}$	1,085
$-2\frac{1}{2}$	-1,627	-1,808	$5\frac{17}{56}$	0,615
-2	$-1\frac{13}{14}$	0,482	$3\frac{6}{7}$	$-\frac{9}{28}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{17}{64}$	2,049	$2\frac{23}{56}$	-1,153
-1	0	2,893	$\frac{27}{28}$	-1,487
$-\frac{1}{2}$	1,507	3,013	$-\frac{27}{56}$	-1,112
0	$2\frac{25}{28}$	2,411	$-1\frac{13}{14}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	$2\frac{25}{28}$	2,411	$-1\frac{13}{14}$	0
$\frac{1}{2}$	$3\frac{51}{64}$	1,085	$-3\frac{3}{8}$	1,7
1	$3\frac{6}{7}$	-0,964	$-4\frac{23}{28}$	$3\frac{21}{32}$
$1\frac{1}{2}$	2,712	-3,737	$-6\frac{15}{56}$	5,356
2	0	-7,232	$-7\frac{5}{7}$	$6\frac{3}{28}$
$2\frac{1}{2}$	$-4\frac{41}{64}$	-11,451	$-9\frac{9}{56}$	5,035
3	$-11\frac{4}{7}$	-16,393	$-10\frac{17}{28}$	1,085
$3\frac{1}{2}$	-21,154	-22,058	$-12\frac{3}{56}$	-6,979
4	$-33\frac{3}{4}$	-28,447	$-13\frac{1}{5}$	$-20\frac{4}{7}$
$4\frac{1}{2}$	-49,721	-35,558	$-14\frac{53}{56}$	-41,291
5	$-69\frac{3}{7}$	-43,393	$-16\frac{11}{28}$	-70,915
$5\frac{1}{2}$	$-93\frac{15}{64}$	-51,951	$-17\frac{47}{56}$	-111,403
6	$-121\frac{1}{2}$	-61,232	$-19\frac{2}{7}$	$-164\frac{25}{28}$
$6\frac{1}{2}$	-154,587	-71,237	$-20\frac{41}{56}$	-233,706
7	$-192\frac{6}{7}$	-81,964	$-22\frac{5}{28}$	$-320\frac{11}{32}$

• Zeichnung



Aufgabe (33)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -13\frac{1}{2}x^3 - 67\frac{1}{2}x^2 - 108x - 54 = -13\frac{1}{2}(x+2)^2(x+1)$$

$$f'(x) = -40\frac{1}{2}x^2 - 135x - 108 = -40\frac{1}{2}(x+2)(x+1\frac{1}{3})$$

$$f''(x) = -81x - 135 = -81(x+1\frac{2}{3})$$

$$f'''(x) = -81$$

$$F(x) = \int (-13\frac{1}{2}x^3 - 67\frac{1}{2}x^2 - 108x - 54)dx = -3\frac{3}{8}x^4 - 22\frac{1}{2}x^3 - 54x^2 - 54x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-13\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-13\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -13\frac{1}{2} \cdot (-x)^3 - 67\frac{1}{2} \cdot (-x)^2 - 108 \cdot (-x) - 54$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -13\frac{1}{2}x^3 - 67\frac{1}{2}x^2 - 108x - 54 = 0$$

$$-13\frac{1}{2}x^3 - 67\frac{1}{2}x^2 - 108x - 54 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{r} (-13\frac{1}{2}x^3 \quad -67\frac{1}{2}x^2 \quad -108x \quad -54) : (x+1) = -13\frac{1}{2}x^2 - 54x - 54 \\ \underline{-(-13\frac{1}{2}x^3 \quad -13\frac{1}{2}x^2)} \\ \quad \quad \quad -54x^2 \quad -108x \quad -54 \\ \quad \quad \quad \underline{-(-54x^2 \quad -54x)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad -54x \quad -54 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \underline{-(-54x \quad -54)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$-13\frac{1}{2}x^2 - 54x - 54 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+54 \pm \sqrt{(-54)^2 - 4 \cdot (-13\frac{1}{2}) \cdot (-54)}}{2 \cdot (-13\frac{1}{2})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+54 \pm \sqrt{0}}{-27}$$

$$x_{1/2} = \frac{54 \pm 0}{-27}$$

$$x_1 = \frac{54+0}{-27} \quad x_2 = \frac{54-0}{-27}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -2$$

$$x_1 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\cup]-1; -2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-1; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -40\frac{1}{2}x^2 - 135x - 108 = 0$$

$$-40\frac{1}{2}x^2 - 135x - 108 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+135 \pm \sqrt{(-135)^2 - 4 \cdot (-40\frac{1}{2}) \cdot (-108)}}{2 \cdot (-40\frac{1}{2})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+135 \pm \sqrt{729}}{-81}$$

$$x_{1/2} = \frac{135 \pm 27}{-81}$$

$$x_1 = \frac{135 + 27}{-81} \quad x_2 = \frac{135 - 27}{-81}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -1\frac{1}{3}$$

$$x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = -1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-2) = 27 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-2/0)$$

$$f''(-1\frac{1}{3}) = -27$$

$$f''(-1\frac{1}{3}) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1\frac{1}{3}/2)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -2$	-2	$-2 < x < -1\frac{1}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$x > -1\frac{1}{3}$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

$$x \in]-2; -1\frac{1}{3}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; -2[\cup]-1\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -81x - 135 = 0$$

$$-81x - 135 = 0 \quad / + 135$$

$$-81x = 135 \quad / : (-81)$$

$$x = \frac{135}{-81}$$

$$x = -1\frac{2}{3}$$

$$x_5 = -1\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-1\frac{2}{3}) = 1$$

$$f'''(-1\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-1\frac{2}{3}/1)$$

- Krümmung

	$x < -1\frac{2}{3}$	$-1\frac{2}{3}$	$x > -1\frac{2}{3}$
$f''(x)$	+	0	-

$$x \in]-\infty; -1\frac{2}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

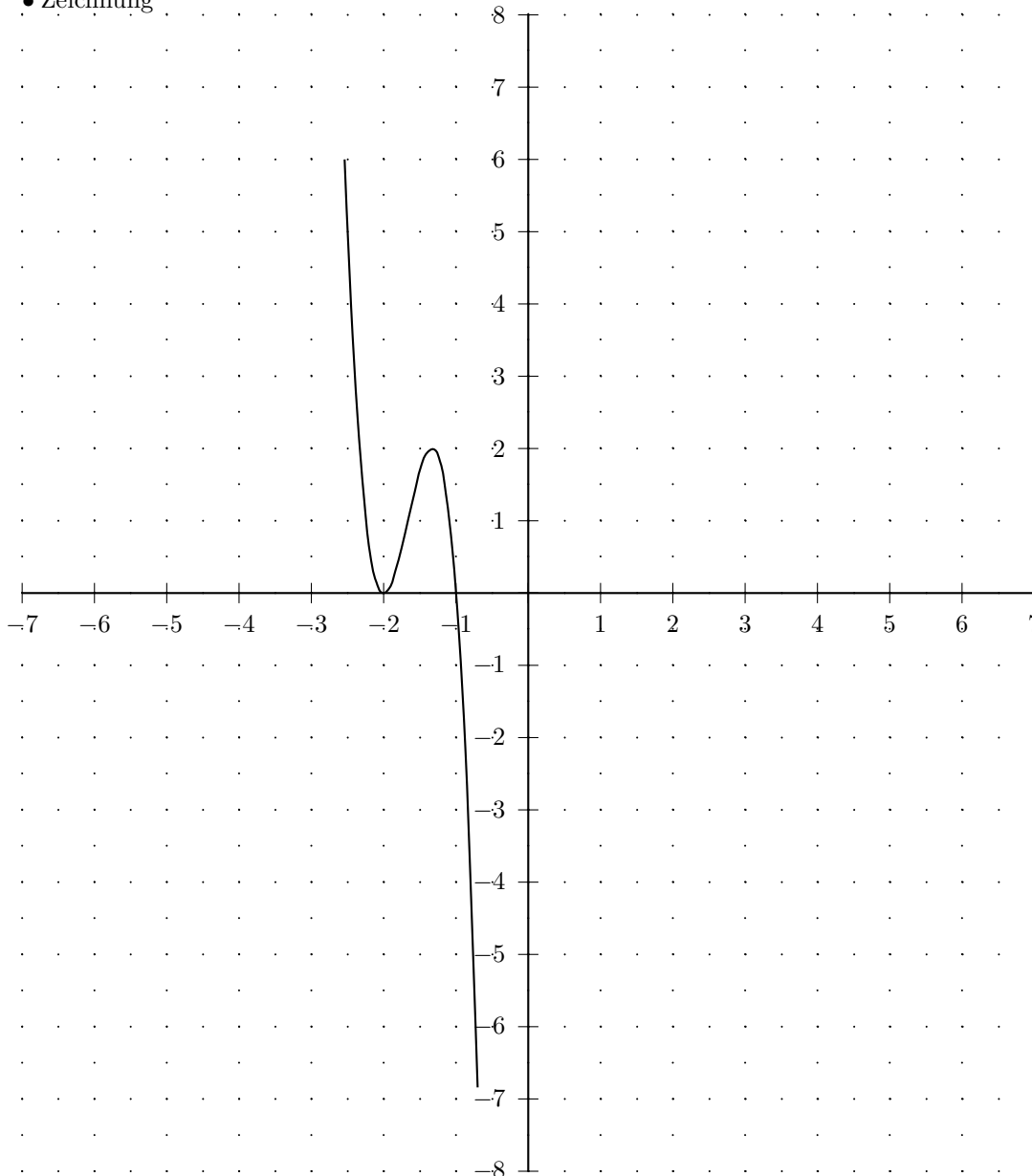
$$x \in]-1\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	2025	-1147,504	432	$-2653\frac{7}{8}$
$-6\frac{1}{2}$	$1503\frac{9}{16}$	-941,629	$391\frac{1}{2}$	-1776,023
-6	1080	-756,004	351	-1134
$-5\frac{1}{2}$	$744\frac{3}{16}$	-590,629	$310\frac{1}{2}$	-681,398
-5	486	-445,504	270	$-376\frac{7}{8}$
$-4\frac{1}{2}$	$295\frac{5}{16}$	-320,629	$229\frac{1}{2}$	-184,148
-4	162	-216,004	189	-72
$-3\frac{1}{2}$	$75\frac{15}{16}$	-131,629	$148\frac{1}{2}$	-14,273
-3	27	-67,504	108	$10\frac{1}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{16}$	-23,629	$67\frac{1}{2}$	17,227
-2	0	-0,004	27	18
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{16}$	3,371	$-13\frac{1}{2}$	18,352
-1	0	-13,504	-54	$19\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{2}$	$-15\frac{3}{16}$	-50,629	$-94\frac{1}{2}$	16,102
0	-54	-108,004	-135	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-54	-108,004	-135	0
$\frac{1}{2}$	$-126\frac{9}{16}$	-185,629	$-175\frac{1}{2}$	-43,523
1	-243	-283,504	-216	$-133\frac{7}{8}$
$1\frac{1}{2}$	$-413\frac{7}{16}$	-401,629	$-256\frac{1}{2}$	-295,523
2	-648	-540,004	-297	-558
$2\frac{1}{2}$	$-956\frac{13}{16}$	-698,629	$-337\frac{1}{2}$	-955,898
3	-1350	-877,504	-378	$-1528\frac{7}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$-1837\frac{11}{16}$	-1076,629	$-418\frac{1}{2}$	-2321,648
4	-2430	-1296,004	-459	-3384
$4\frac{1}{2}$	$-3137\frac{1}{16}$	-1535,629	$-499\frac{1}{2}$	-4770,773
5	-3969	-1795,504	-540	$-6541\frac{7}{8}$
$5\frac{1}{2}$	$-4935\frac{15}{16}$	-2075,629	$-580\frac{1}{2}$	-8762,273
6	-6048	-2376,004	-621	-11502
$6\frac{1}{2}$	$-7315\frac{5}{16}$	-2696,629	$-661\frac{1}{2}$	-14836,148
7	-8748	-3037,504	-702	$-18844\frac{7}{8}$

• Zeichnung



7 Funktionen 4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

7.1 Aufgaben

(1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4$

(2) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 16x - 16$

(3) $f(x) = x^4 - 18x^2 + 81$

(4) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3$

(5) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3$

(6) $f(x) = x^4 + 16$

(7) $f(x) = x^4 - 16$

(8) $f(x) = x^4 - 3x^3$

(9) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x$

(10) $f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + 2x^2$

(11) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 5x^2$

(12) $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x$

(13) $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 4x$

(14) $f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 6x^2$

(15) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

(16) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

(17) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

(18) $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7$

(19) $f(x) = 4\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 10x - 12$

7.2 Lösungen

Aufgabe (1)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4 = (x^2 + 0,784x + 0,81)(x - 1,508)(x - 3,276)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4x = 4x(x - 0,382)(x - 2,618)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 4 = 12(x - 0,184)(x - 1,816)$$

$$f'''(x) = 24x - 24$$

$$F(x) = \int (x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4)dx = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 4x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-7,09), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 + 4$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4$$

NumerischeSuche :

$$x_1 = 1,508; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 3,276; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	1,508	$< x <$	3,276	$< x$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; 1,508[\cup]3,276; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]1,508; 3,276[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4x = 0$$

$$x(4x^2 - 12x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$4x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4}$$

$$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{80}}{8}$$

$$x_{1/2} = \frac{12 \pm 8,944}{8}$$

$$x_1 = \frac{12 + 8,944}{8} \quad x_2 = \frac{12 - 8,944}{8}$$

$$x_1 = 2,618 \quad x_2 = 0,382$$

$$x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 0,382; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 2,618; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(0/4)$$

$$f''(0,382) = -3,416$$

$$f''(0,382) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(0,382/4,09)$$

$$f''(2,618) = 23,416 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(2,618/ -7,09)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$< x < 0,382$	$0,382$	$< x < 2,618$	$2,618$	$< x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$x \in]0; 0,382[\cup]2,618; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; 0[\cup]0,382; 2,618[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 4 = 0$$

$$12x^2 - 24x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 4}}{2 \cdot 12}$$

$$x_{1/2} = \frac{+24 \pm \sqrt{384}}{24}$$

$$x_{1/2} = \frac{24 \pm 19,596}{24}$$

$$x_1 = \frac{24 + 19,596}{24} \quad x_2 = \frac{24 - 19,596}{24}$$

$$x_1 = 1,816 \quad x_2 = 0,184$$

$$x_6 = 0,184; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_7 = 1,816; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(0,184) = 4,044$$

$$f'''(0,184) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(0,184/4,044)$$

$$f'''(1,816) = -2,488$$

$$f'''(1,816) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(1,816/-2,488)$$

- Krümmung

	$x < 0,184$	$0,184$	$< x < 1,816$	$1,816$	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; 0,184[\cup]1,816; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

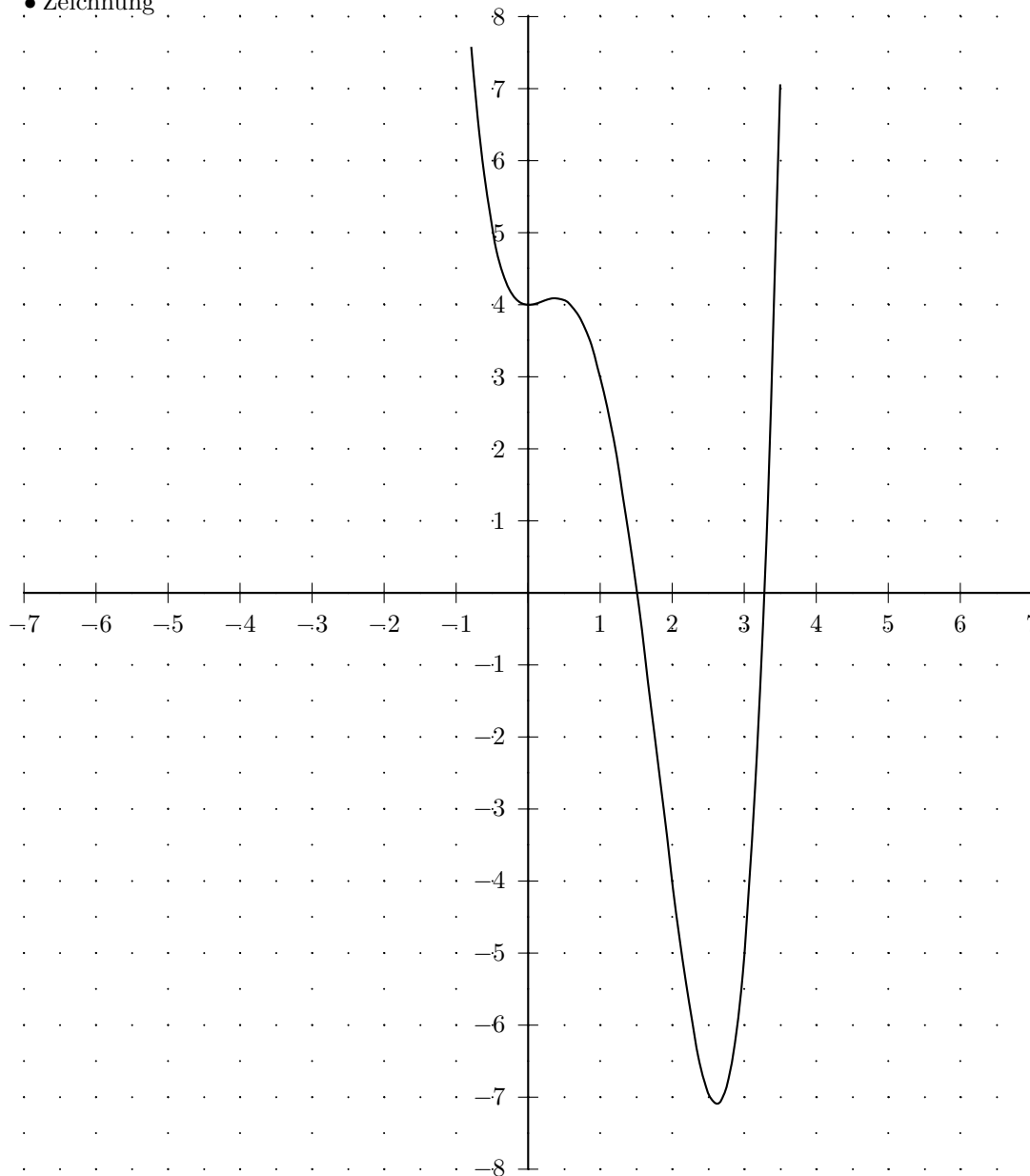
$$x \in]0,184; 1,816[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	3875	-1988,01	760,001	-6019,067
$-6\frac{1}{2}$	$2972\frac{1}{16}$	-1631,509	667,001	-4314,727
-6	2236	-1320,009	580,001	-3019,2
$-5\frac{1}{2}$	$1645\frac{1}{16}$	-1050,508	499,001	-2054,548
-5	1179	-820,007	424,001	-1353,333
$-4\frac{1}{2}$	$819\frac{1}{16}$	-625,507	355,001	-857,869
-4	548	-464,006	292,001	-519,467
$-3\frac{1}{2}$	$350\frac{1}{16}$	-332,506	235,001	-297,69
-3	211	-228,005	184,001	-159 $\frac{3}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{16}$	-147,504	139,001	-79 $\frac{1}{96}$
-2	60	-88,004	100,001	-35 $\frac{11}{15}$
$-1\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{16}$	-46,503	67,001	-14,831
-1	11	-20,002	40,001	-5 $\frac{13}{15}$
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{16}$	-5,502	19,001	-2,152
0	4	-0,001	4,001	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	4	-0,001	4,001	0
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{16}$	-0,501	-4,999	2,027
1	3	-4	-7,999	$3\frac{13}{15}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	-7,499	-4,999	4,706
2	-4	-7,999	4,001	$3\frac{11}{15}$
$2\frac{1}{2}$	$-6\frac{15}{16}$	-2,498	19,001	$\frac{85}{96}$
3	-5	12,002	40,001	$-2\frac{2}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{16}$	38,503	67,001	-2,435
4	36	80,004	100,001	7,467
$4\frac{1}{2}$	$90\frac{1}{16}$	139,504	139,001	37,744
5	179	220,005	184,001	103,333
$5\frac{1}{2}$	$314\frac{1}{16}$	324,506	235,001	224,423
6	508	456,006	292,001	427,2
$6\frac{1}{2}$	$775\frac{1}{16}$	617,507	355,001	744,602
7	1131	812,007	424,001	1217,067

• Zeichnung



Aufgabe (2)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 16x - 16 = (x + 0,828)(x^2 + 4)(x - 4,828)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16 = 4(x^2 + 0,355x + 1,192)(x - 3,355)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

$$f'''(x) = 24x - 24$$

$$F(x) = \int (x^4 - 4x^3 - 16x - 16)dx = \frac{1}{5}x^5 - x^4 - 8x^2 - 16x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-94,038), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^3 - 16 \cdot (-x) - 16$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 16x - 16 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 - 16x - 16$$

NumerischeSuche :

$$x_1 = -0,828; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 4,828; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-0,828$	$< x <$	$4,828$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -0,828[\cup]4,828; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-0,828; 4,828[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16 = 0$$

$$4x^3 - 12x^2 - 16 = 0$$

NumerischeSuche :

$$x_3 = 3,355; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(3,355) = 54,569 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(3,355 / -94,038)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$3,355$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]3,355; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 3,355[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 0$$

$$x(12x - 24) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 12x - 24 = 0$$

$$12x - 24 = 0 \quad / + 24$$

$$12x = 24 \quad / : 12$$

$$x = \frac{24}{12}$$

$$x = \frac{12}{12}$$

$$x = 2$$

$x_4 = 0$; 1-fache Nullstelle $x_5 = 2$; 1-fache Nullstelle

$$f'''(0) = -16$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt:(0/ - 16)

$$f'''(2) = -64$$

$$f'''(2) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt:(2/ - 64)

• Krümmung

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	+	-	+

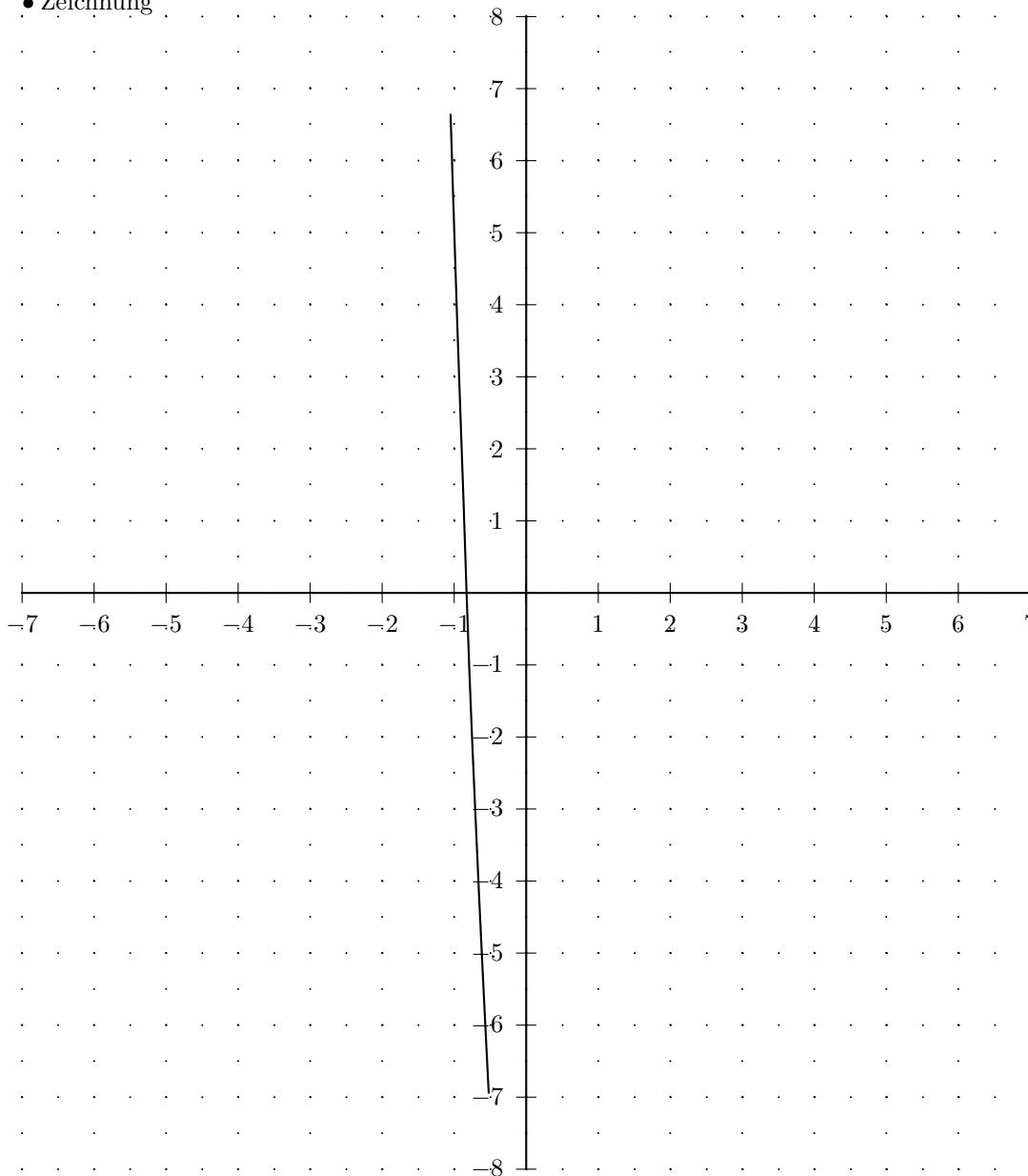
 $x \in]-\infty; 0[\cup]2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$ $x \in]0; 2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	3869	-1976,01	756,001	-6042,4
$-6\frac{1}{2}$	$2971\frac{9}{16}$	-1621,509	663,001	-4339,644
-6	2240	-1312,009	576,001	-3043,2
$-5\frac{1}{2}$	$1652\frac{9}{16}$	-1044,508	495,001	-2075,631
-5	1189	-816,007	420,001	-1370
$-4\frac{1}{2}$	$830\frac{9}{16}$	-623,507	351,001	-869,119
-4	560	-464,006	288,001	-524,8
$-3\frac{1}{2}$	$361\frac{9}{16}$	-334,506	231,001	-297,106
-3	221	-232,005	180,001	-153 $\frac{3}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$125\frac{9}{16}$	-153,504	135,001	-68 $\frac{19}{32}$
-2	64	-96,004	96,001	-22 $\frac{2}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$26\frac{9}{16}$	-56,503	63,001	-0,581
-1	5	-32,002	36,001	$6\frac{4}{5}$
$-\frac{1}{2}$	$-7\frac{7}{16}$	-19,502	15,001	5,931
0	-16	-16,001	0,001	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-16	-16,001	0,001	0
$\frac{1}{2}$	$-24\frac{7}{16}$	-18,501	-8,999	-10,056
1	-35	-24	-11,999	-24 $\frac{4}{5}$
$1\frac{1}{2}$	$-48\frac{7}{16}$	-29,499	-8,999	-45,544
2	-64	-31,999	0,001	-73 $\frac{3}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$-79\frac{7}{16}$	-28,498	15,001	-109 $\frac{17}{32}$
3	-91	-15,998	36,001	-152 $\frac{2}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$-93\frac{7}{16}$	8,503	63,001	-199,019
4	-80	48,004	96,001	-243,2
$4\frac{1}{2}$	$-42\frac{7}{16}$	105,504	135,001	-275,006
5	29	184,005	180,001	-280
$5\frac{1}{2}$	$145\frac{9}{16}$	286,506	231,001	-238,494
6	320	416,006	288,001	-124,8
$6\frac{1}{2}$	$566\frac{9}{16}$	575,507	351,001	93,519
7	901	768,007	420,001	456,4

• Zeichnung



Aufgabe (3)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^4 - 18x^2 + 81 = (x + 3)^2(x - 3)^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 36x = 4(x + 3)x(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 36 = 12(x + 1,732)(x - 1,732)$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$F(x) = \int (x^4 - 18x^2 + 81)dx = \frac{1}{5}x^5 - 6x^3 + 81x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]0, \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 18 \cdot (-x)^2 + 81$$

$$f(-x) = 1 \cdot x^4 - 18 \cdot x^2 + 81$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^4 - 18x^2 + 81 = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$1u^2 - 18u + 81 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1/2} = \frac{+18 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$u_{1/2} = \frac{18 \pm 0}{2}$$

$$u_1 = \frac{18 + 0}{2} \quad u_2 = \frac{18 - 0}{2}$$

$$u_1 = 9 \quad u_2 = 9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$$x_1 = -3; \quad \underline{\text{2-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 3; \quad \underline{\text{2-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 3[\cup]3; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4x^3 - 36x = 0$$

$$x(4x^2 - 36) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 - 36 = 0$$

$$4x^2 - 36 = 0 \quad / + 36$$

$$4x^2 = 36 \quad / : 4$$

$$x^2 = \frac{36}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$x_3 = -3$; 1-fache Nullstelle
 $x_4 = 0$; 1-fache Nullstelle
 $x_5 = 3$; 1-fache Nullstelle
 $f''(-3) = 72 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:(-3/0)
 $f''(0) = -36$
 $f''(0) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(0/81)
 $f''(3) = 72 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:(3/0)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-3	$< x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-3; 0[\cup]3; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -3[\cup]0; 3[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$f''(x) = 12x^2 - 36 = 0$

$12x^2 - 36 = 0 \quad / + 36$

$12x^2 = 36 \quad / : 12$

$x^2 = \frac{36}{12}$

$x = \pm\sqrt{3}$

$x_1 = 1,732 \quad x_2 = -1,732$

$x_6 = -1,732$; 1-fache Nullstelle

$x_7 = 1,732$; 1-fache Nullstelle

$f'''(-1,732) = 36$

$f'''(-1,732) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:(-1,732/36)

$f'''(1,732) = 36$

$f'''(1,732) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:(1,732/36)

• Krümmung

	$x <$	$-1,732$	$< x <$	$1,732$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1,732[\cup]1,732; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

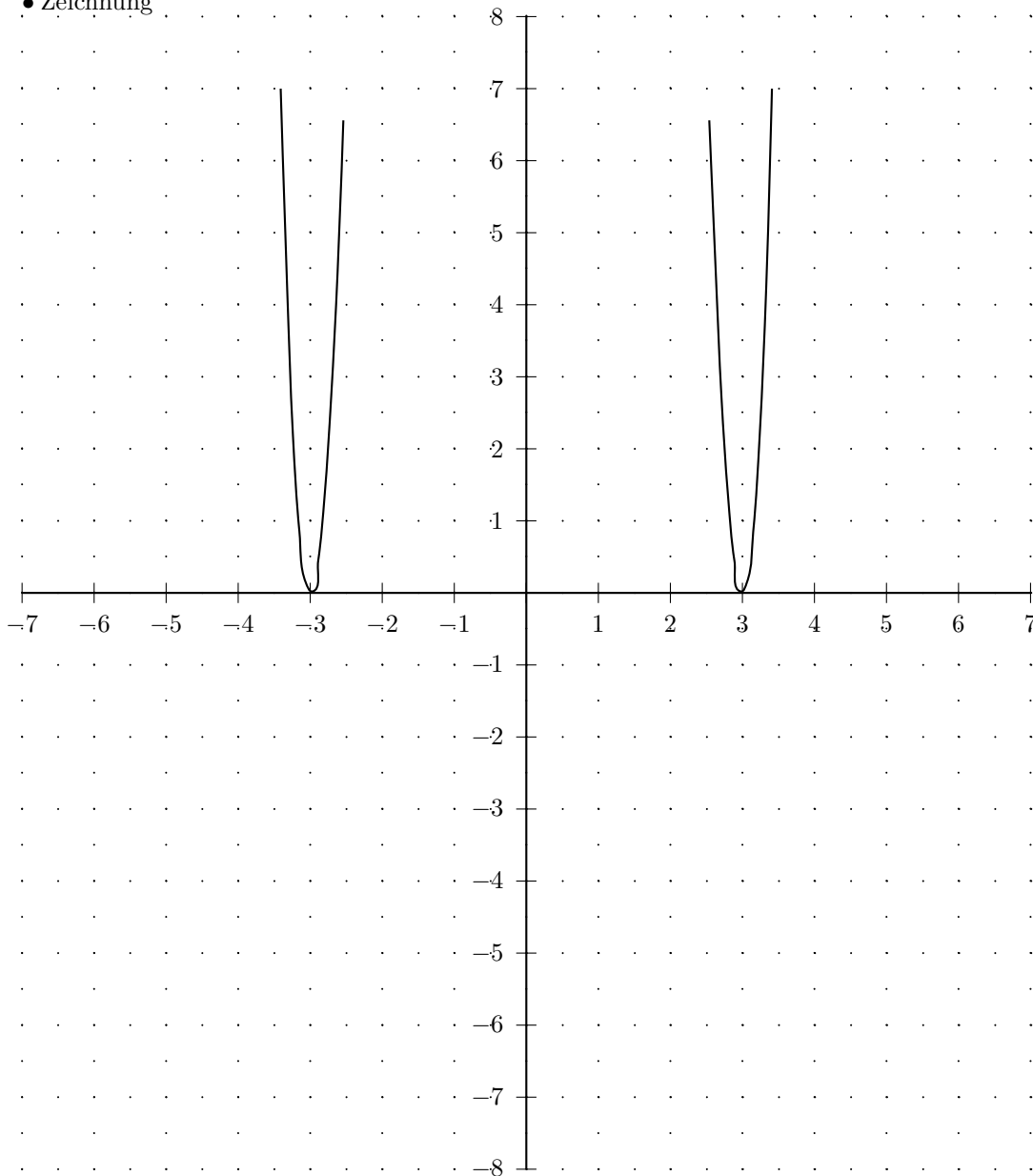
$x \in]-1,732; 1,732[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	1600	-1120,009	552,001	-1870,4
$-6\frac{1}{2}$	$1105\frac{9}{16}$	-864,508	471,001	-1199,331
-6	729	-648,007	396,001	-745,2
$-5\frac{1}{2}$	$451\frac{9}{16}$	-467,507	327,001	-453,819
-5	256	-320,006	264,001	-280
$-4\frac{1}{2}$	$126\frac{9}{16}$	-202,506	207,001	-186,806
-4	49	-112,005	156,001	-144,8
$-3\frac{1}{2}$	$10\frac{9}{16}$	-45,504	111,001	-131,294
-3	0	-0,004	72,001	$-129\frac{3}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$7\frac{9}{16}$	27,497	39,001	$-128\frac{9}{32}$
-2	25	39,998	12,001	$-120\frac{2}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$45\frac{9}{16}$	40,498	-8,999	-102,769
-1	64	31,999	-23,999	$-75\frac{1}{5}$
$-\frac{1}{2}$	$76\frac{9}{16}$	17,499	-32,999	-39,756
0	81	0	-35,999	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	81	0	-35,999	0
$\frac{1}{2}$	$76\frac{9}{16}$	-17,499	-32,999	39,756
1	64	-31,999	-23,999	$75\frac{1}{5}$
$1\frac{1}{2}$	$45\frac{9}{16}$	-40,498	-8,999	102,769
2	25	-39,998	12,001	$120\frac{2}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{9}{16}$	-27,497	39,001	$128\frac{9}{32}$
3	0	0,004	72,001	$129\frac{3}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$10\frac{9}{16}$	45,504	111,001	131,294
4	49	112,005	156,001	144,8
$4\frac{1}{2}$	$126\frac{9}{16}$	202,506	207,001	186,806
5	256	320,006	264,001	280
$5\frac{1}{2}$	$451\frac{9}{16}$	467,507	327,001	453,819
6	729	648,007	396,001	745,2
$6\frac{1}{2}$	$1105\frac{9}{16}$	864,508	471,001	1199,331
7	1600	1120,009	552,001	1870,4

• Zeichnung



Aufgabe (4)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 = -\frac{1}{4}x^3(x - 2\frac{2}{3})$$

$$f'(x) = -x^3 + 2x^2 = -x^2(x - 2)$$

$$f''(x) = -3x^2 + 4x = -3x(x - 1\frac{1}{3})$$

$$f'''(x) = -6x + 4$$

$$F(x) = \int(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3)dx = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 1\frac{1}{3}[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot \infty^4] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^4] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{4} \cdot (-x)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-x)^3$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 = 0$$

$$x^3(-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0 \quad / -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{4}x = -\frac{2}{3} \quad / : (-\frac{1}{4})$$

$$x = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{4}}$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$x_1 = 0$; 3-fache Nullstelle

$x_2 = 2\frac{2}{3}$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	0	$0 < x < 2\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3} < x$
$f(x)$	-	0	+	0

$x \in]0; 2\frac{2}{3}[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[\cup]2\frac{2}{3}; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -x^3 + 2x^2 = 0$$

$$x^2(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x + 2 = 0$$

$$-1x + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-1x = -2 \quad / : (-1)$$

$$x = \frac{-2}{-1}$$

$$x = 2$$

$x_3 = 0$; 2-fache Nullstelle

$x_4 = 2$; 1-fache Nullstelle

$f''(0) = 0$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$

Terrassenpunkt:(0/0)

$f''(2) = -4$

$f''(2) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(2/1 $\frac{1}{3}$)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	$2 < x$
$f'(x)$	+	0	+	0

$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 2[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]2; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$$f''(x) = -3x^2 + 4x = 0$$

$$x(-3x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -3x + 4 = 0$$

$$-3x + 4 = 0 \quad / -4$$

$$-3x = -4 \quad / : (-3)$$

$$x = \frac{-4}{-3}$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

$x_5 = 0$; 1-fache Nullstelle

$x_6 = 1\frac{1}{3}$; 1-fache Nullstelle

$$f'''(0) = 0$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: (0/0)

$$f'''(1\frac{1}{3}) = \frac{64}{81}$$

$$f'''(1\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(1\frac{1}{3} / \frac{64}{81})$

• Krümmung

	$x < 0$	0	$0 < x < 1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3} < x$
$f''(x)$	-	0	+	0

$x \in]0; 1\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

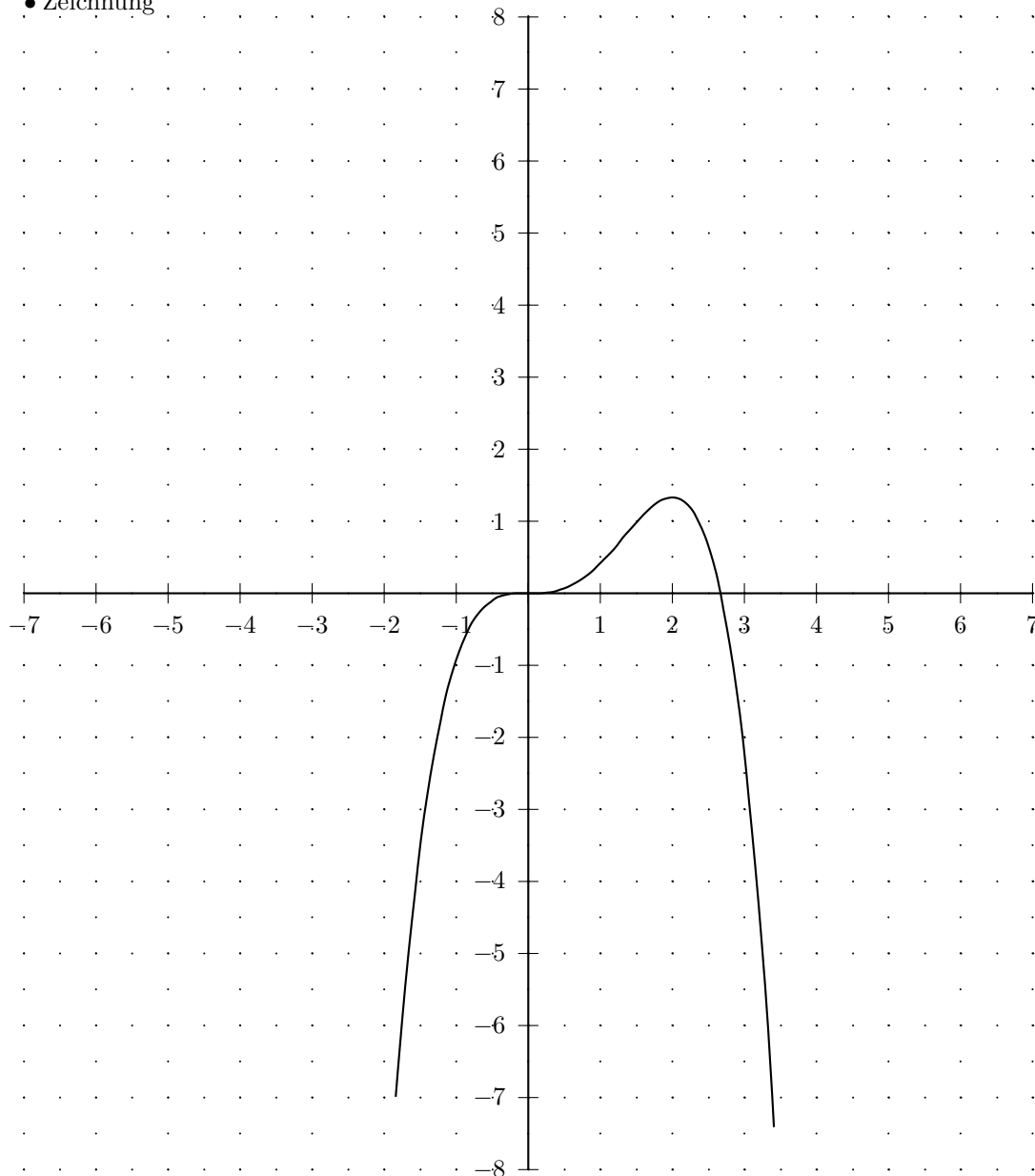
$x \in]-\infty; 0[\cup]1\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-828\frac{11}{12}$	441,002	-175	1240,517
$-6\frac{1}{2}$	-629,349	359,127	-152,75	877,656
-6	-468	288,002	-132	604,8
$-5\frac{1}{2}$	-339,682	226,877	-112,75	404,153
-5	$-239\frac{7}{12}$	175,002	-95	260,417
$-4\frac{1}{2}$	$-163\frac{17}{64}$	131,627	-78,75	160,608
-4	$-106\frac{2}{3}$	96,001	-64	$93\frac{13}{15}$
$-3\frac{1}{2}$	-66,099	67,376	-50,75	51,271
-3	$-38\frac{1}{4}$	45,001	-39	$25\frac{13}{20}$
$-2\frac{1}{2}$	-20,182	28,126	-28,75	11,393
-2	$-9\frac{1}{3}$	16,001	-20	$4\frac{4}{15}$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{33}{64}$	7,876	-12,75	1,223
-1	$-\frac{11}{12}$	3,001	-7	$\frac{13}{60}$
$-\frac{1}{2}$	-0,099	0,625	-2,75	0,012
0	0	0	0	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0,068	0,375	1,25	0,009
1	$\frac{5}{12}$	1	1	$\frac{7}{60}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{63}{64}$	1,125	-0,75	0,464
2	$1\frac{1}{3}$	0	-4	$1\frac{1}{15}$
$2\frac{1}{2}$	0,651	-3,126	-8,75	1,628
3	$-2\frac{1}{4}$	-9,001	-15	$1\frac{7}{20}$
$3\frac{1}{2}$	-8,932	-18,376	-22,75	-1,251
4	$-21\frac{1}{3}$	-32,001	-32	$-8\frac{8}{15}$
$4\frac{1}{2}$	$-41\frac{49}{64}$	-50,626	-42,75	-23,92
5	$-72\frac{11}{12}$	-75,001	-55	-52,083
$5\frac{1}{2}$	-117,849	-105,876	-68,75	-99,132
6	-180	-144,002	-84	-172,8
$6\frac{1}{2}$	-263,182	-190,127	-100,75	-282,635
7	$-371\frac{7}{12}$	-245,002	-119	-440,183

• Zeichnung



Aufgabe (5)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 = -\frac{1}{4}x^3(x - 2\frac{2}{3})$$

$$f'(x) = -x^3 + 2x^2 = -x^2(x - 2)$$

$$f''(x) = -3x^2 + 4x = -3x(x - 1\frac{1}{3})$$

$$f'''(x) = -6x + 4$$

$$F(x) = \int(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3)dx = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 1\frac{1}{3}[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot \infty^4] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^4] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{4} \cdot (-x)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-x)^3$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 = 0$$

$$x^3(-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0 \quad / -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{4}x = -\frac{2}{3} \quad / : (-\frac{1}{4})$$

$$x = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{4}}$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$x_1 = 0$; 3-fache Nullstelle

$x_2 = 2\frac{2}{3}$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	0	$0 < x < 2\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3} < x$
$f(x)$	-	0	+	0

$x \in]0; 2\frac{2}{3}[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[\cup]2\frac{2}{3}; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -x^3 + 2x^2 = 0$$

$$x^2(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x + 2 = 0$$

$$-1x + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-1x = -2 \quad / : (-1)$$

$$x = \frac{-2}{-1}$$

$$x = 2$$

$x_3 = 0$; 2-fache Nullstelle

$x_4 = 2$; 1-fache Nullstelle

$f''(0) = 0$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$

Terrassenpunkt:(0/0)

$f''(2) = -4$

$f''(2) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(2/1 $\frac{1}{3}$)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
$f'(x)$	+	+	-

$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = -3x^2 + 4x = 0$$

$$x(-3x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -3x + 4 = 0$$

$$-3x + 4 = 0 \quad / -4$$

$$-3x = -4 \quad / : (-3)$$

$$x = \frac{-4}{-3}$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

$$x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_6 = 1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: (0/0)

$$f'''(1\frac{1}{3}) = \frac{64}{81}$$

$$f'''(1\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(1\frac{1}{3} / \frac{64}{81})$

• Krümmung

	$x < 0$	0	$0 < x < 1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3} < x$
$f''(x)$	-	0	+	0

$$x \in]0; 1\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

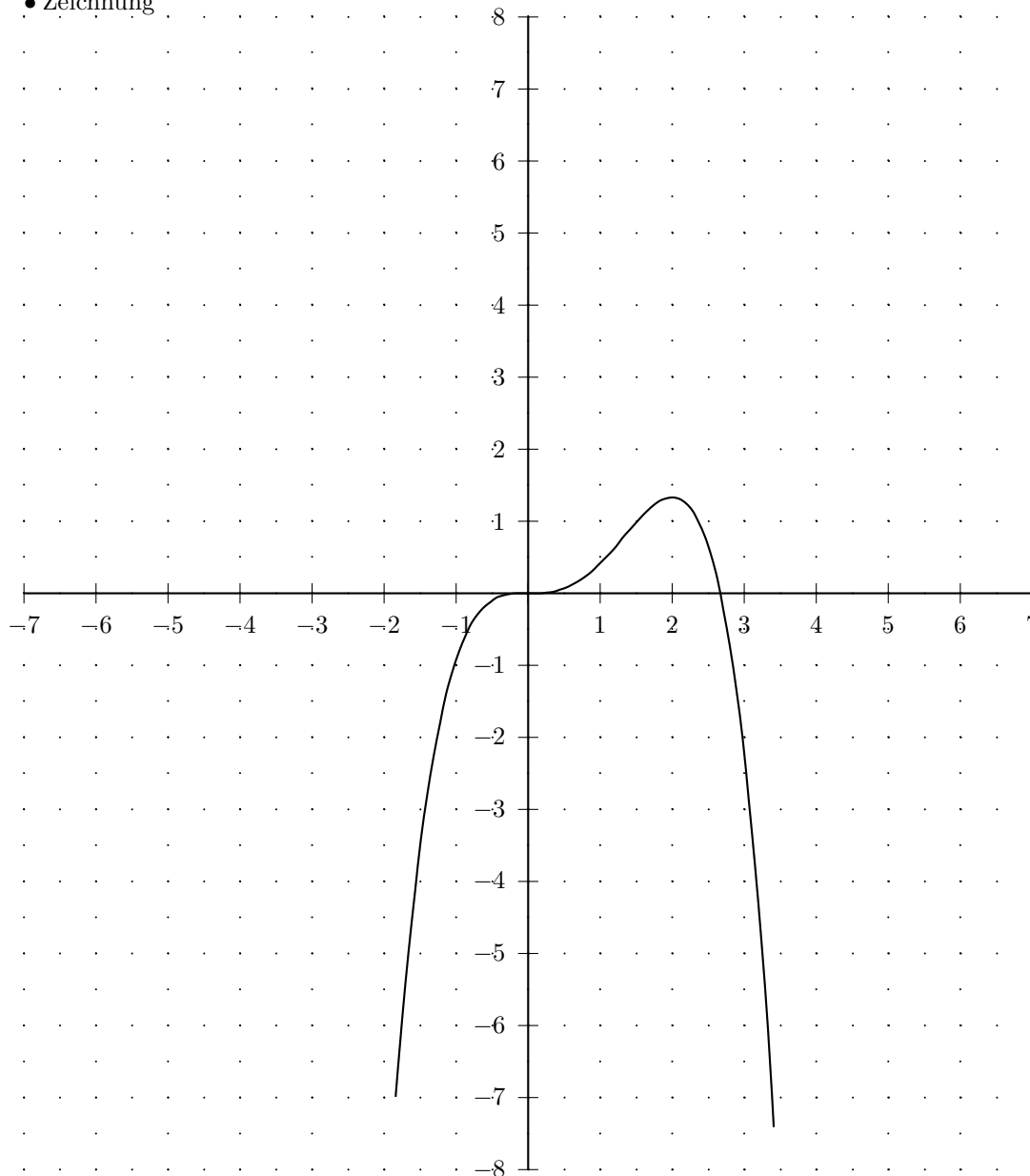
$$x \in]-\infty; 0[\cup]1\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-828\frac{11}{12}$	441,002	-175	1240,517
$-6\frac{1}{2}$	-629,349	359,127	-152,75	877,656
-6	-468	288,002	-132	604,8
$-5\frac{1}{2}$	-339,682	226,877	-112,75	404,153
-5	$-239\frac{7}{12}$	175,002	-95	260,417
$-4\frac{1}{2}$	$-163\frac{17}{64}$	131,627	-78,75	160,608
-4	$-106\frac{2}{3}$	96,001	-64	$93\frac{13}{15}$
$-3\frac{1}{2}$	-66,099	67,376	-50,75	51,271
-3	$-38\frac{1}{4}$	45,001	-39	$25\frac{13}{20}$
$-2\frac{1}{2}$	-20,182	28,126	-28,75	11,393
-2	$-9\frac{1}{3}$	16,001	-20	$4\frac{4}{15}$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{33}{64}$	7,876	-12,75	1,223
-1	$-\frac{11}{12}$	3,001	-7	$\frac{13}{60}$
$-\frac{1}{2}$	-0,099	0,625	-2,75	0,012
0	0	0	0	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0,068	0,375	1,25	0,009
1	$\frac{5}{12}$	1	1	$\frac{7}{60}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{63}{64}$	1,125	-0,75	0,464
2	$1\frac{1}{3}$	0	-4	$1\frac{1}{15}$
$2\frac{1}{2}$	0,651	-3,126	-8,75	1,628
3	$-2\frac{1}{4}$	-9,001	-15	$1\frac{7}{20}$
$3\frac{1}{2}$	-8,932	-18,376	-22,75	-1,251
4	$-21\frac{1}{3}$	-32,001	-32	$-8\frac{8}{15}$
$4\frac{1}{2}$	$-41\frac{49}{64}$	-50,626	-42,75	-23,92
5	$-72\frac{11}{12}$	-75,001	-55	-52,083
$5\frac{1}{2}$	-117,849	-105,876	-68,75	-99,132
6	-180	-144,002	-84	-172,8
$6\frac{1}{2}$	-263,182	-190,127	-100,75	-282,635
7	$-371\frac{7}{12}$	-245,002	-119	-440,183

• Zeichnung



Aufgabe (6)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^4 + 16$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$F(x) = \int (x^4 + 16)dx = \frac{1}{5}x^5 + 16x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]16, \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 + 16$$

$$f(-x) = 1 \cdot x^4 + 16$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^4 + 16 = 0$$

$$1x^4 + 16 = 0 \quad / -16$$

$$1x^4 = -16 \quad / :1$$

$$x^4 = \frac{-16}{1}$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{-16}{1}}$$

keine Lösung

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4x^3 = 0$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x_1 = 0$; 3-fache Nullstelle

$$f''(0) = 16$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow$$

Extremwert:(0/16)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 12x^2 = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x_2 = 0$; 2-fache Nullstelle

• Krümmung

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$

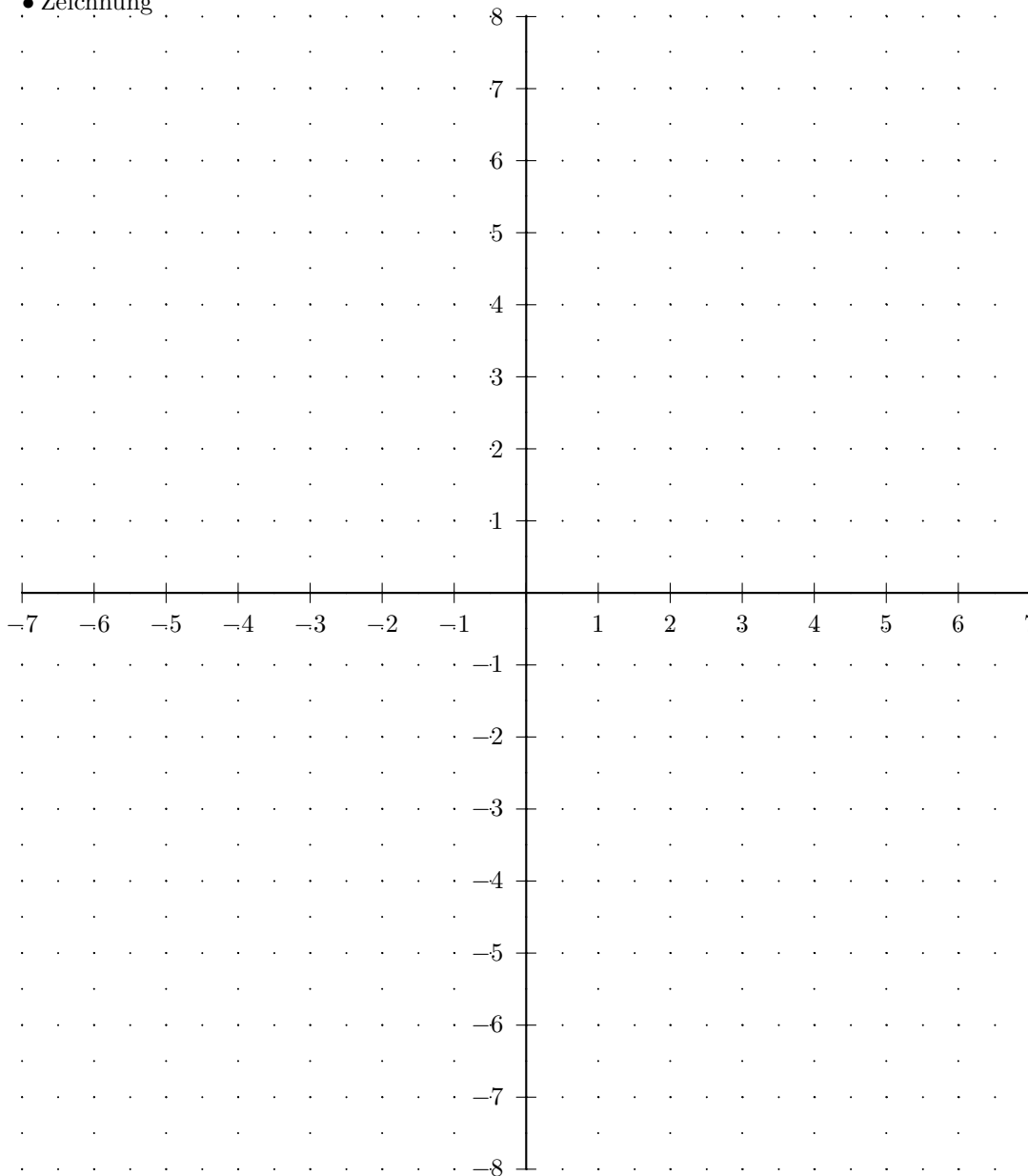
$x \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$ $f''(x) > 0$ linksgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	2417	-1372,009	588,001	-3473,4
$-6\frac{1}{2}$	$1801\frac{1}{16}$	-1098,508	507,001	-2424,581
-6	1312	-864,007	432,001	-1651,2
$-5\frac{1}{2}$	$931\frac{1}{16}$	-665,507	363,001	-1094,569
-5	641	-500,006	300,001	-705
$-4\frac{1}{2}$	$426\frac{1}{16}$	-364,506	243,001	-441,056
-4	272	-256,005	192,001	-268,8
$-3\frac{1}{2}$	$166\frac{1}{16}$	-171,504	147,001	-161,044
-3	97	-108,004	108,001	$-96\frac{3}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$55\frac{1}{16}$	-62,503	75,001	$-59\frac{17}{32}$
-2	32	-32,002	48,001	$-38\frac{2}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{16}$	-13,502	27,001	-25,519
-1	17	-4,001	12,001	$-16\frac{1}{5}$
$-\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{16}$	-0,501	3,001	-8,006
0	16	0	0,001	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	16	0	0,001	0
$\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{16}$	0,501	3,001	8,006
1	17	4,001	12,001	$16\frac{1}{5}$
$1\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{16}$	13,502	27,001	25,519
2	32	32,002	48,001	$38\frac{2}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$55\frac{1}{16}$	62,503	75,001	$59\frac{17}{32}$
3	97	108,004	108,001	$96\frac{3}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$166\frac{1}{16}$	171,504	147,001	161,044
4	272	256,005	192,001	268,8
$4\frac{1}{2}$	$426\frac{1}{16}$	364,506	243,001	441,056
5	641	500,006	300,001	705
$5\frac{1}{2}$	$931\frac{1}{16}$	665,507	363,001	1094,569
6	1312	864,007	432,001	1651,2
$6\frac{1}{2}$	$1801\frac{1}{16}$	1098,508	507,001	2424,581
7	2417	1372,009	588,001	3473,4

• Zeichnung



- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 12x^2 = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x_4 = 0$; 2-fache Nullstelle

- Krümmung

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$

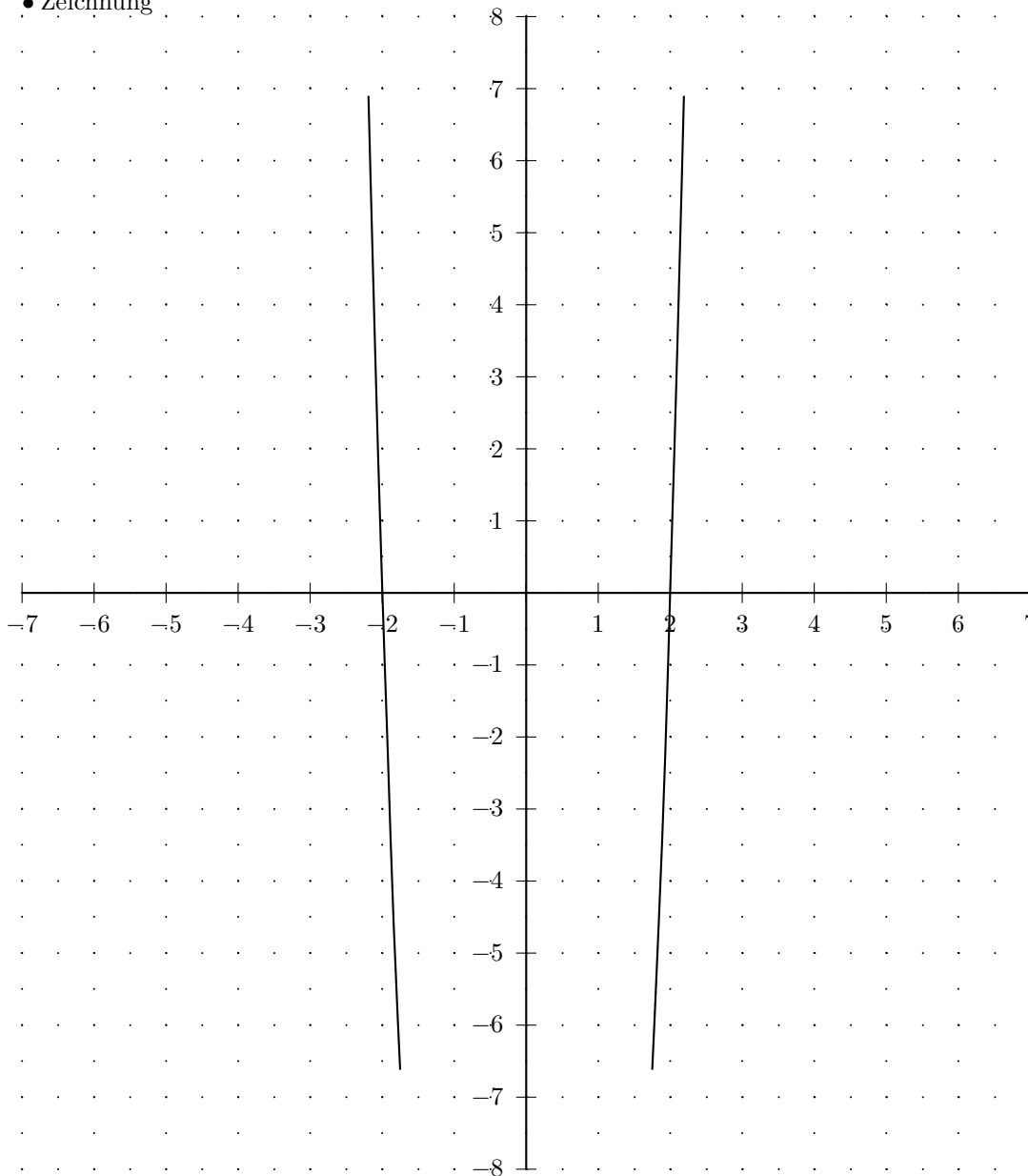
$x \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$ $f''(x) > 0$ linksgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	2385	-1372,009	588,001	-3249,4
$-6\frac{1}{2}$	$1769\frac{1}{16}$	-1098,508	507,001	-2216,581
-6	1280	-864,007	432,001	-1459,2
$-5\frac{1}{2}$	$899\frac{1}{16}$	-665,507	363,001	-918,569
-5	609	-500,006	300,001	-545
$-4\frac{1}{2}$	$394\frac{1}{16}$	-364,506	243,001	-297,056
-4	240	-256,005	192,001	-140,8
$-3\frac{1}{2}$	$134\frac{1}{16}$	-171,504	147,001	-49,044
-3	65	-108,004	108,001	$-\frac{3}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{16}$	-62,503	75,001	$20\frac{15}{32}$
-2	0	-32,002	48,001	$25\frac{3}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$-10\frac{15}{16}$	-13,502	27,001	22,481
-1	-15	-4,001	12,001	$15\frac{4}{5}$
$-\frac{1}{2}$	$-15\frac{15}{16}$	-0,501	3,001	7,994
0	-16	0	0,001	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-16	0	0,001	0
$\frac{1}{2}$	$-15\frac{15}{16}$	0,501	3,001	-7,994
1	-15	4,001	12,001	$-15\frac{4}{5}$
$1\frac{1}{2}$	$-10\frac{15}{16}$	13,502	27,001	-22,481
2	0	32,002	48,001	$-25\frac{3}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{16}$	62,503	75,001	$-20\frac{15}{32}$
3	65	108,004	108,001	$\frac{3}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$134\frac{1}{16}$	171,504	147,001	49,044
4	240	256,005	192,001	140,8
$4\frac{1}{2}$	$394\frac{1}{16}$	364,506	243,001	297,056
5	609	500,006	300,001	545
$5\frac{1}{2}$	$899\frac{1}{16}$	665,507	363,001	918,569
6	1280	864,007	432,001	1459,2
$6\frac{1}{2}$	$1769\frac{1}{16}$	1098,508	507,001	2216,581
7	2385	1372,009	588,001	3249,4

• Zeichnung



Aufgabe (8)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^4 - 3x^3 = x^3(x - 3)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 = 4x^2(x - 2\frac{1}{4})$$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x = 12x(x - 1\frac{1}{2})$$

$$f'''(x) = 24x - 18$$

$$F(x) = \int (x^4 - 3x^3)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-8, 543), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 3 \cdot (-x)^3$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^4 - 3x^3 = 0$$

$$x^3(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x - 3 = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad / + 3$$

$$x = 3$$

$x_1 = 0$; 3-fache Nullstelle

$x_2 = 3$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichen-tabelle:

	$x < 0$	0	$0 < x < 3$	3	$< x$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; 0[\cup]3; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]0; 3[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 9) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x - 9 = 0$$

$$4x - 9 = 0 \quad / + 9$$

$$4x = 9 \quad / : 4$$

$$x = \frac{9}{4}$$

$$x = 2\frac{1}{4}$$

$x_3 = 0$; 2-fache Nullstelle

$x_4 = 2\frac{1}{4}$; 1-fache Nullstelle

$$f''(0) = 0$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow$$

Terrassenpunkt:(0/0)

$$f''(2\frac{1}{4}) = 20\frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(2\frac{1}{4} / -8, 543)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4} < x$	$< x$
$f'(x)$	-	0	+	+

$x \in]2\frac{1}{4}; \infty[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 2\frac{1}{4}[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 12x^2 - 18x = 0$$

$$x(12x - 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 12x - 18 = 0$$

$$12x - 18 = 0 \quad / + 18$$

$$12x = 18 \quad / : 12$$

$$x = \frac{18}{12}$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

$$x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_6 = 1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: (0/0)

$$f'''(1\frac{1}{2}) = -5\frac{1}{16}$$

$$f'''(1\frac{1}{2}) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(1\frac{1}{2} / -5\frac{1}{16})$

• Krümmung

	$x <$	0	$< x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; 0[\cup]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

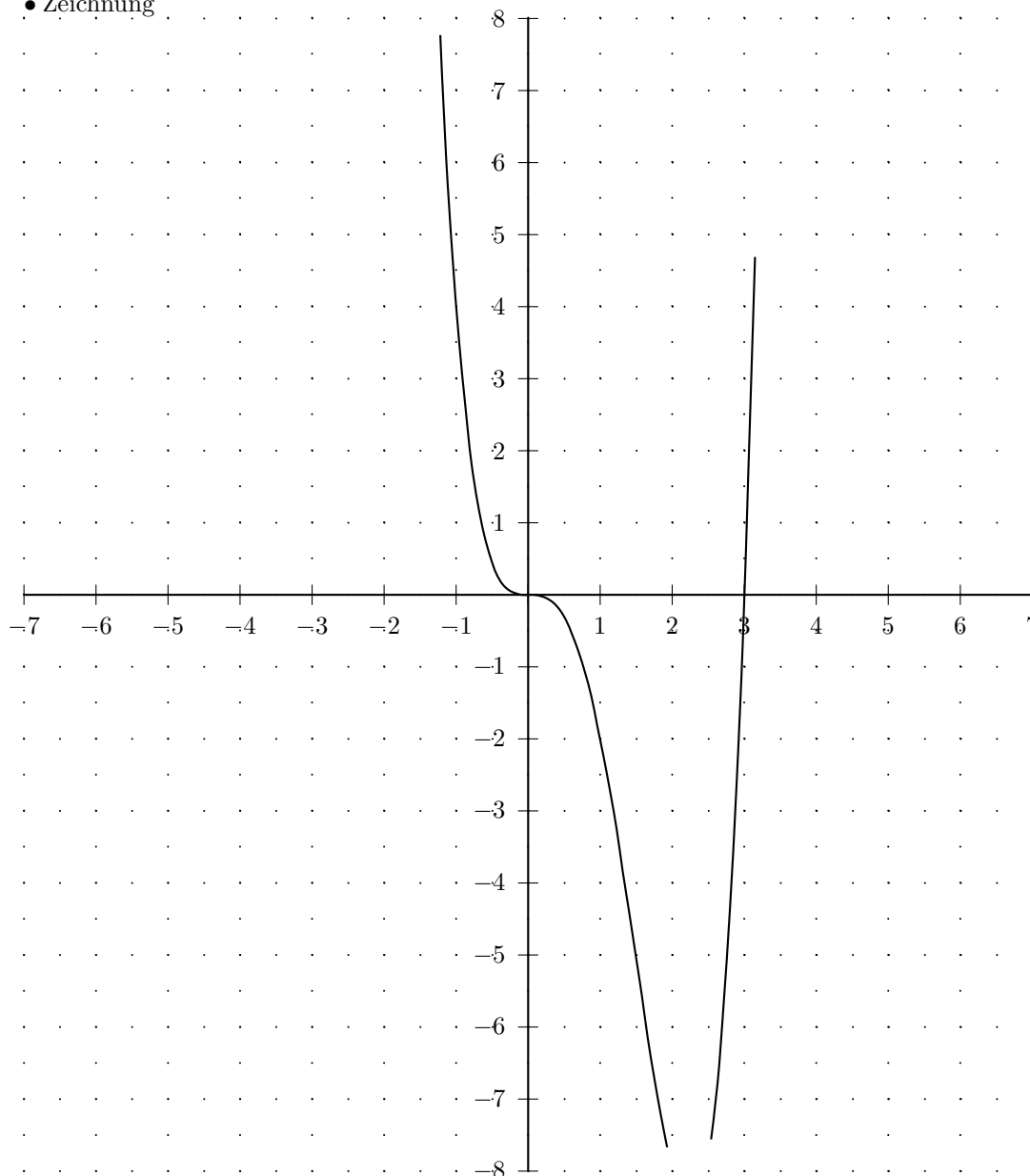
$$x \in]0; 1\frac{1}{2}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	3430	-1813,009	714,001	-5162,15
$-6\frac{1}{2}$	$2608\frac{15}{16}$	-1478,759	624,001	-3659,378
-6	1944	-1188,008	540,001	-2527,2
$-5\frac{1}{2}$	$1414\frac{3}{16}$	-937,758	462,001	-1692,866
-5	1000	-725,007	390,001	-1093,75
$-4\frac{1}{2}$	$683\frac{7}{16}$	-546,756	324,001	-676,603
-4	448	-400,006	264,001	-396,8
$-3\frac{1}{2}$	$278\frac{11}{16}$	-281,755	210,001	-217,591
-3	162	-189,005	162,001	-109 $\frac{7}{20}$
$-2\frac{1}{2}$	$85\frac{15}{16}$	-118,754	120,001	$-48\frac{23}{64}$
-2	40	-68,003	84,001	$-18\frac{2}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{16}$	-33,753	54,001	-5,316
-1	4	-13,002	30,001	$-\frac{19}{20}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	-2,752	12,001	-0,053
0	0	-0,001	0,001	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-0,001	0,001	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{16}$	-1,75	-5,999	-0,041
1	-2	-5	-5,999	$-\frac{11}{20}$
$1\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{16}$	-6,749	0,001	-2,278
2	-8	-3,998	12,001	$-5\frac{3}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$-7\frac{13}{16}$	6,252	30,001	$-9\frac{49}{64}$
3	0	27,003	54,001	$-12\frac{3}{20}$
$3\frac{1}{2}$	$21\frac{7}{16}$	61,253	84,001	-7,503
4	64	112,004	120,001	12,8
$4\frac{1}{2}$	$136\frac{11}{16}$	182,255	162,001	61,509
5	250	275,005	210,001	156,25
$5\frac{1}{2}$	$415\frac{15}{16}$	393,256	264,001	320,272
6	648	540,006	324,001	583,2
$6\frac{1}{2}$	$961\frac{3}{16}$	718,257	390,001	981,784
7	1372	931,008	462,001	1560,65

• Zeichnung



Aufgabe (9)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x = \frac{1}{2}(x^2 - 1, 587x + 2, 52)(x + 1, 587)x$$

$$f'(x) = 2x^3 + 2 = 2(x^2 - x + 1)(x + 1)$$

$$f''(x) = 6x^2 = 6x^2$$

$$f'''(x) = 12x$$

$$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^4 + 2x)dx = \frac{1}{10}x^5 + x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-1\frac{1}{2}), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^4 + 2 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x = 0$$

$$x(\frac{1}{2}x^3 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^3 + 2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^3 + 2 = 0 \quad / -2$$

$$\frac{1}{2}x^3 = -2 \quad / : \frac{1}{2}$$

$$x^3 = \frac{-2}{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{-4}$$

$$x = -1, 587$$

Polynomdivision: $(-1, 587)$

$$\begin{array}{r} (\frac{1}{2}x^3 \quad \quad \quad +2) : (x + 1, 587) = \frac{1}{2}x^2 - 0, 794x + 1, 26 \\ -(\frac{1}{2}x^3 \quad +0, 794x^2) \end{array}$$

$$\hline \begin{array}{r} \quad \quad -0, 794x^2 \quad \quad \quad +2 \\ \quad \quad -(-0, 794x^2 \quad -1, 26x) \end{array}$$

$$\hline \begin{array}{r} \quad \quad \quad \quad 1, 26x \quad +2 \\ \quad \quad \quad \quad -(-1, 26x \quad +2) \end{array}$$

$$\hline \begin{array}{r} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\hline 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 0, 794x + 1, 26 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+0, 794 \pm \sqrt{(-0, 794)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1, 26}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+0, 794 \pm \sqrt{-1, 89}}{1}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$$x_1 = -1, 587; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1, 587$	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1, 587[\cup]0; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-1, 587; 0[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 2x^3 + 2 = 0$$

$$2x^3 + 2 = 0 \quad / -2$$

$$2x^3 = -2 \quad / : 2$$

$$x^3 = \frac{-2}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{-1}$$

$$x = -1$$

Polynomdivision: (-1)

$$\begin{array}{r} (2x^3 \quad \quad \quad +2) : (x+1) = 2x^2 - 2x + 2 \\ -(2x^3 \quad +2x^2) \\ \hline \quad -2x^2 \\ \quad -(-2x^2 \quad -2x) \\ \hline \phantom{} \quad \quad 2x \quad +2 \\ \phantom{} \quad \quad -(2x \quad +2) \\ \hline \phantom{} \phantom{} \phantom{}} \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{-12}}{4}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$x_3 = -1$; 1-fache Nullstelle

$$f''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-1 / -1\frac{1}{2})$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$$x \in]-1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; -1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 6x^2 = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x_4 = 0$; 2-fache Nullstelle

- Krümmung

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$

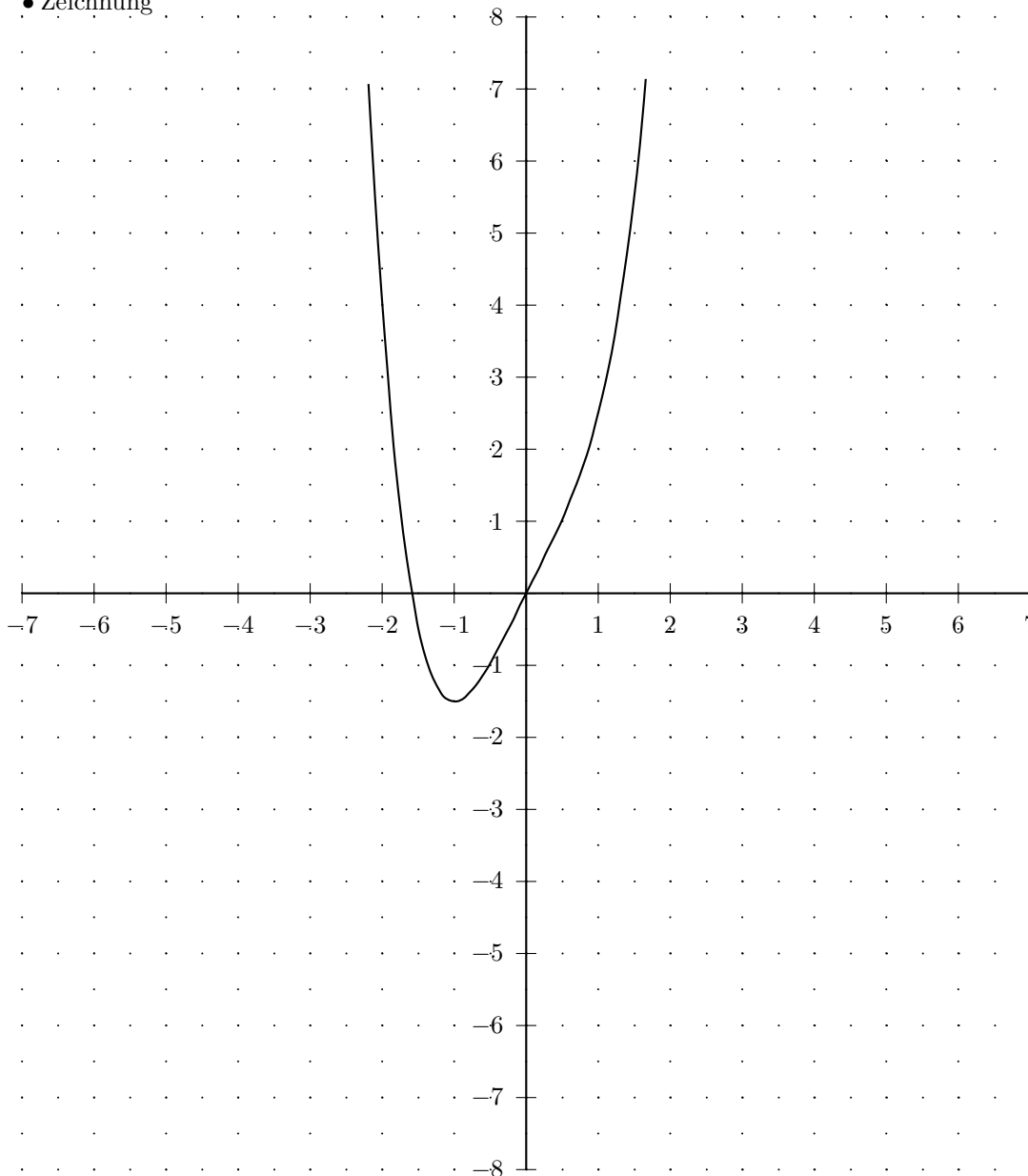
$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$1186\frac{1}{2}$	-684,004	294	-1631,7
$-6\frac{1}{2}$	$879\frac{17}{32}$	-547,254	253,5	-1118,041
-6	636	-430,004	216	-741,6
$-5\frac{1}{2}$	$446\frac{17}{32}$	-330,753	181,5	-473,034
-5	$302\frac{1}{5}$	-248,003	150	-287,5
$-4\frac{1}{2}$	$196\frac{1}{32}$	-180,253	121,5	-164,278
-4	120	-126,002	96	$-86\frac{2}{5}$
$-3\frac{1}{2}$	$68\frac{1}{32}$	-83,752	73,5	-40,272
-3	$34\frac{1}{2}$	-52,002	54	$-15\frac{3}{10}$
$-2\frac{1}{2}$	$14\frac{17}{32}$	-29,252	37,5	$-3\frac{33}{64}$
-2	4	-14,001	24	$\frac{4}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{32}$	-4,751	13,5	1,491
-1	$-1\frac{1}{2}$	-0,001	6	$\frac{9}{10}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{31}{32}$	1,75	1,5	0,247
0	0	2	0	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	2	0	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{32}$	2,25	1,5	0,253
1	$2\frac{1}{2}$	4,001	6	$1\frac{1}{10}$
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{17}{32}$	8,751	13,5	3,009
2	12	18,001	24	$7\frac{1}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$24\frac{17}{32}$	33,252	37,5	$16\frac{1}{64}$
3	$46\frac{1}{2}$	56,002	54	$33\frac{3}{10}$
$3\frac{1}{2}$	$82\frac{1}{32}$	87,752	73,5	64,772
4	136	130,002	96	$118\frac{2}{5}$
$4\frac{1}{2}$	$214\frac{1}{32}$	184,253	121,5	204,778
5	$322\frac{1}{2}$	252,003	150	337,5
$5\frac{1}{2}$	$468\frac{17}{32}$	334,753	181,5	533,534
6	660	434,004	216	813,6
$6\frac{1}{2}$	$905\frac{17}{32}$	551,254	253,5	1202,541
7	$1214\frac{1}{2}$	688,004	294	1729,7

• Zeichnung



Aufgabe (10)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + 2x^2 = -\frac{1}{6}(x + 3,464)x^2(x - 3,464)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x = -\frac{2}{3}(x + 2,449)x(x - 2,449)$$

$$f''(x) = -2x^2 + 4 = -2(x + 1,414)(x - 1,414)$$

$$f'''(x) = -4x$$

$$F(x) = \int (-\frac{1}{6}x^4 + 2x^2)dx = -\frac{1}{30}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =] - \infty, 6[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{6} \cdot \infty^4] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{6} \cdot (-\infty)^4] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{6} \cdot (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^2$$

$$f(-x) = -\frac{1}{6} \cdot x^4 + 2 \cdot x^2$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + 2x^2 = 0$$

$$x^2(-\frac{1}{6}x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{6}x^2 + 2 = 0$$

$$-\frac{1}{6}x^2 + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-\frac{1}{6}x^2 = -2 \quad / : (-\frac{1}{6})$$

$$x^2 = \frac{-2}{-\frac{1}{6}}$$

$$x = \pm\sqrt{12}$$

$$x_1 = 3,464 \quad x_2 = -3,464$$

$$x_1 = -3,464; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{2\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_3 = 3,464; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,464$	$< x <$	0	$< x <$	$3,464$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in] - 3,464; 0[\cup]0; 3,464[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - \infty; -3,464[\cup]3,464; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x = 0$$

$$x(-\frac{2}{3}x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{2}{3}x^2 + 4 = 0$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + 4 = 0 \quad / -4$$

$$-\frac{2}{3}x^2 = -4 \quad / : (-\frac{2}{3})$$

$$x^2 = \frac{-4}{-\frac{2}{3}}$$

$$x = \pm\sqrt{6}$$

$$x_1 = 2,449 \quad x_2 = -2,449$$

$$x_4 = -2,449; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_5 = 0; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_6 = 2,449; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f'''(-2,449) = -8$$

$$f'''(-2,449) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2,449/6)}$$

$$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/0)}$$

$$f''(2,449) = -8$$

$$f''(2,449) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(2,449/6)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,449$	$< x <$	0	$< x <$	$2,449$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x \in]-\infty; -2,449[\cup]0; 2,449[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-2,449; 0[\cup]2,449; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -2x^2 + 4 = 0$$

$$-2x^2 + 4 = 0 \quad / -4$$

$$-2x^2 = -4 \quad / : (-2)$$

$$x^2 = \frac{-4}{-2}$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = 1,414 \quad x_2 = -1,414$$

$$x_7 = -1,414; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_8 = 1,414; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-1,414) = 3\frac{1}{3}$$

$$f'''(-1,414) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(-1,414/3\frac{1}{3})$$

$$f'''(1,414) = 3\frac{1}{3}$$

$$f'''(1,414) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(1,414/3\frac{1}{3})$$

- Krümmung

	$x <$	$-1,414$	$< x <$	$1,414$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x \in]-1,414; 1,414[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

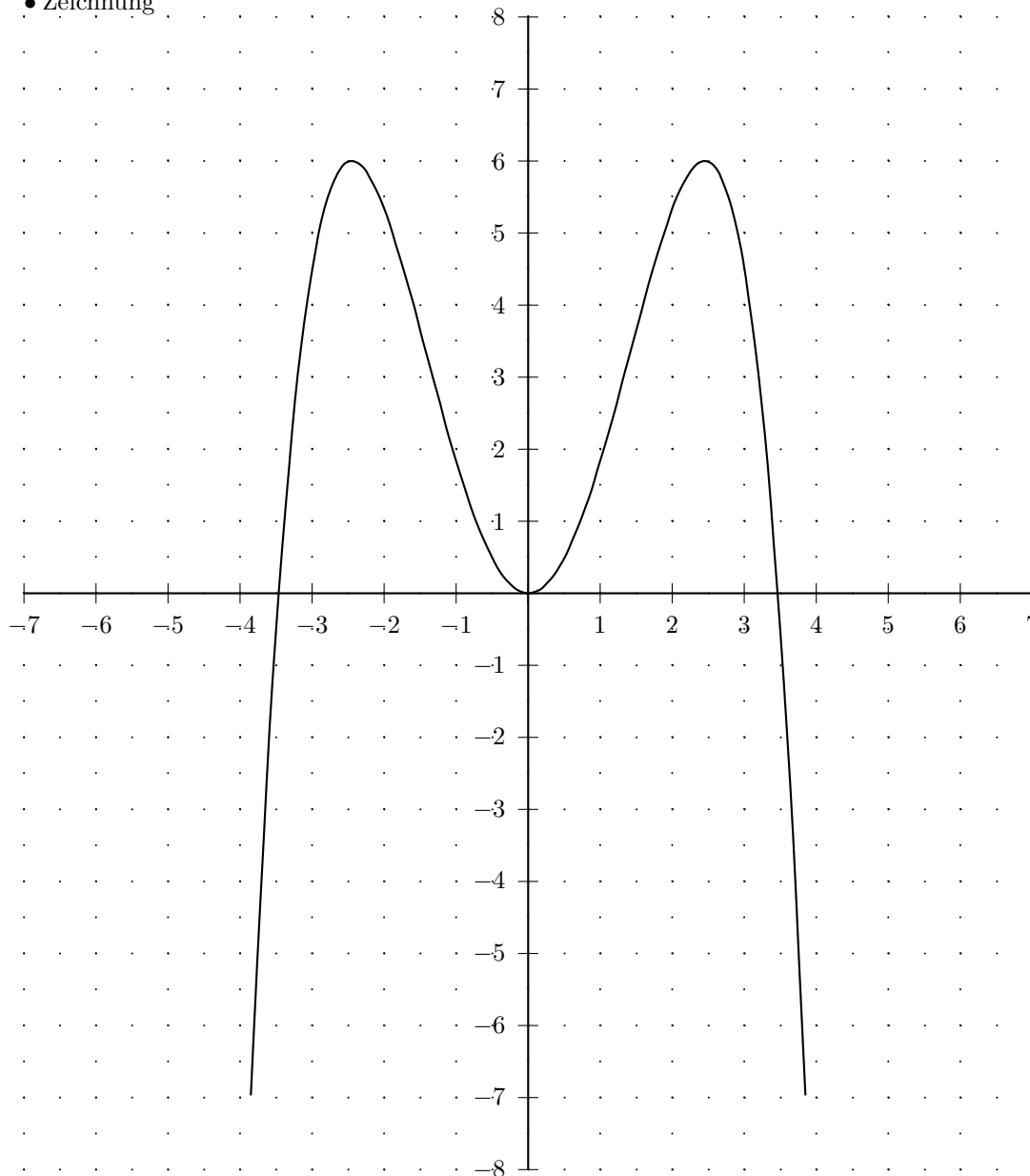
$$x \in]-\infty; -1,414[\cup]1,414; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-302\frac{1}{6}$	200,668	-94	331,567
$-6\frac{1}{2}$	$-213\frac{1}{96}$	157,085	-80,5	203,68
-6	-144	120,001	-68	115,2
$-5\frac{1}{2}$	$-92\frac{1}{96}$	88,918	-56,5	56,845
-5	$-54\frac{1}{6}$	63,334	-46	$20\frac{5}{6}$
$-4\frac{1}{2}$	$-27\frac{27}{32}$	42,751	-36,5	0,759
-4	$-10\frac{2}{3}$	26,667	-28	$-8\frac{8}{15}$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{49}{96}$	14,584	-20,5	-11,076
-3	$4\frac{1}{2}$	6,001	-14	$-9\frac{9}{10}$
$-2\frac{1}{2}$	$5\frac{95}{96}$	0,417	-8,5	-7,161
-2	$5\frac{1}{3}$	-2,666	-4	$-4\frac{4}{15}$
$-1\frac{1}{2}$	$3\frac{21}{32}$	-3,75	-0,5	-1,997
-1	$1\frac{5}{6}$	-3,333	2	$-\frac{19}{30}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{47}{96}$	-1,917	3,5	-0,082
0	0	0	4	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	4	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{47}{96}$	1,917	3,5	0,082
1	$1\frac{5}{6}$	3,333	2	$\frac{19}{30}$
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{21}{32}$	3,75	-0,5	1,997
2	$5\frac{1}{3}$	2,666	-4	$4\frac{4}{15}$
$2\frac{1}{2}$	$5\frac{95}{96}$	-0,417	-8,5	7,161
3	$4\frac{1}{2}$	-6,001	-14	$9\frac{9}{10}$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{49}{96}$	-14,584	-20,5	11,076
4	$-10\frac{2}{3}$	-26,667	-28	$8\frac{8}{15}$
$4\frac{1}{2}$	$-27\frac{27}{32}$	-42,751	-36,5	-0,759
5	$-54\frac{1}{6}$	-63,334	-46	$-20\frac{5}{6}$
$5\frac{1}{2}$	$-92\frac{1}{96}$	-88,918	-56,5	-56,845
6	-144	-120,001	-68	-115,2
$6\frac{1}{2}$	$-213\frac{1}{96}$	-157,085	-80,5	-203,68
7	$-302\frac{1}{6}$	-200,668	-94	-331,567

• Zeichnung



Aufgabe (11)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 5x^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 10)x^2$$

$$f'(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x = 2x(x - 2)(x - 2\frac{1}{2})$$

$$f''(x) = 6x^2 - 18x + 10 = 6(x - 0,736)(x - 2,264)$$

$$f'''(x) = 12x - 18$$

$$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 5x^2)dx = \frac{1}{10}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 1\frac{2}{3}x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]0, \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^4 - 3 \cdot (-x)^3 + 5 \cdot (-x)^2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 5x^2 = 0$$

$$x^2(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-1}}{1}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$x_1 = 0$; 2-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	0	$< x$
$f(x)$	+	0	+

$x \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x = 0$$

$$x(2x^2 - 9x + 10) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2x^2 - 9x + 10 = 0$$

$$2x^2 - 9x + 10 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1/2} = \frac{+9 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{9 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{9+1}{4} \quad x_2 = \frac{9-1}{4}$$

$$x_1 = 2\frac{1}{2} \quad x_2 = 2$$

$$x_2 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 2; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 2\frac{1}{2}; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f''(0) = 10 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(0/0)$$

$$f''(2) = -2$$

$$f''(2) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(2/4)$$

$$f''\left(2\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } \left(2\frac{1}{2}/3, \frac{29}{32}\right)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < 2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$x \in]0; 2[\cup]2\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; 0[\cup]2; 2\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 6x^2 - 18x + 10 = 0$$

$$6x^2 - 18x + 10 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 10}}{2 \cdot 6}$$

$$x_{1/2} = \frac{+18 \pm \sqrt{84}}{12}$$

$$x_{1/2} = \frac{18 \pm 9,165}{12}$$

$$x_1 = \frac{18 + 9,165}{12} \quad x_2 = \frac{18 - 9,165}{12}$$

$$x_1 = 2,264 \quad x_2 = 0,736$$

$$x_5 = 0,736; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_6 = 2,264; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(0,736) = 1,66$$

$$f'''(0,736) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (0,736/1,66)$$

$$f'''(2,264) = 3,951$$

$$f'''(2,264) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (2,264/3,951)$$

- Krümmung

	$x < 0,736$	$0,736$	$0,736 < x < 2,264$	$2,264$	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; 0,736[\cup]2,264; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

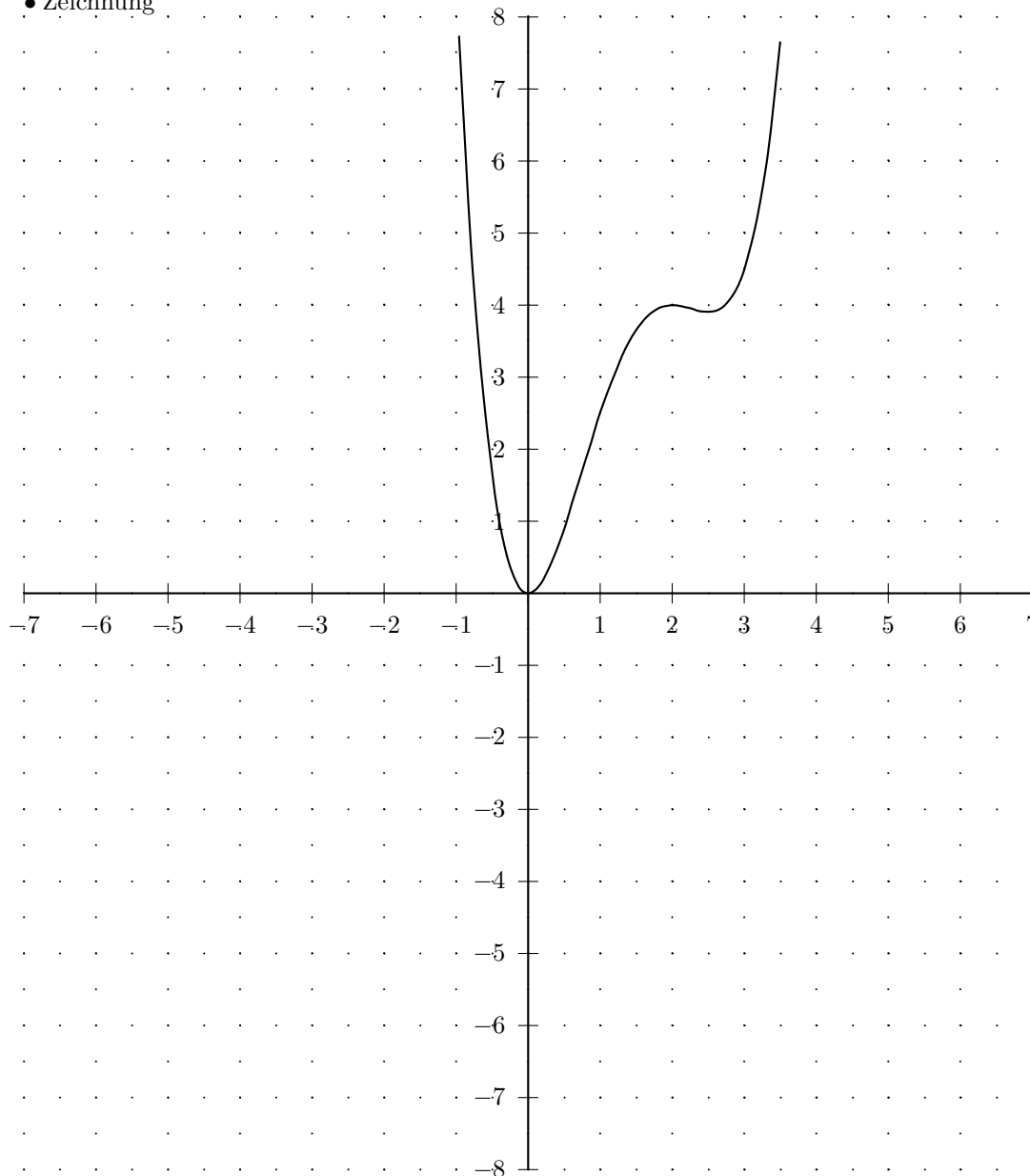
$$x \in]0,736; 2,264[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$2474\frac{1}{2}$	-1197,005	430	-4053,117
$-6\frac{1}{2}$	$1927\frac{21}{32}$	-994,505	380,5	-2956,796
-6	1476	-816,005	334	-2109,6
$-5\frac{1}{2}$	$1107\frac{29}{32}$	-660,004	290,5	-1466,873
-5	$812\frac{1}{2}$	-525,004	250	-989,583
$-4\frac{1}{2}$	$579\frac{21}{32}$	-409,504	212,5	-643,95
-4	400	-312,003	178	$-401\frac{1}{15}$
$-3\frac{1}{2}$	$264\frac{29}{32}$	-231,003	146,5	-236,527
-3	$166\frac{1}{2}$	-165,003	118	$-130\frac{1}{20}$
$-2\frac{1}{2}$	$97\frac{21}{32}$	-112,502	92,5	$-65\frac{5}{48}$
-2	52	-72,002	70	$-28\frac{8}{15}$
$-1\frac{1}{2}$	$23\frac{29}{32}$	-42,002	50,5	-10,181
-1	$8\frac{1}{2}$	-21,002	34	$-2\frac{31}{60}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{21}{32}$	-7,501	20,5	-0,258
0	0	-0,001	10	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-0,001	10	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{29}{32}$	2,999	2,5	0,165
1	$2\frac{1}{2}$	3	-2	$1\frac{1}{60}$
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{21}{32}$	$1\frac{1}{2}$	-3,5	$2\frac{47}{80}$
2	4	0	-2	$4\frac{8}{15}$
$2\frac{1}{2}$	$3\frac{29}{32}$	0,001	2,5	$6\frac{49}{96}$
3	$4\frac{1}{2}$	3,001	10	$8\frac{11}{20}$
$3\frac{1}{2}$	$7\frac{21}{32}$	10,501	20,5	$11\frac{13}{30}$
4	16	24,002	34	$17\frac{1}{15}$
$4\frac{1}{2}$	$32\frac{29}{32}$	45,002	50,5	28,856
5	$62\frac{1}{2}$	75,002	70	52,083
$5\frac{1}{2}$	$109\frac{21}{32}$	115,502	92,5	94,279
6	180	168,003	118	165,6
$6\frac{1}{2}$	$279\frac{29}{32}$	234,003	146,5	279,202
7	$416\frac{1}{2}$	315,003	178	451,617

• Zeichnung



Aufgabe (12)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x = -(x+1)^2x(x-2)$$

$$f'(x) = -4x^3 + 6x + 2 = -4(x+1)(x+0,366)(x-1,366)$$

$$f''(x) = -12x^2 + 6 = -12(x+0,707)(x-0,707)$$

$$f'''(x) = -24x$$

$$F(x) = \int (-x^4 + 3x^2 + 2x)dx = -\frac{1}{5}x^5 + x^3 + x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} =]-\infty, 4,848[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^4] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^4] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -1 \cdot (-x)^4 + 3 \cdot (-x)^2 + 2 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x^3 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x^3 + 3x + 2 = 0$$

$$-x^3 + 3x + 2 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{r} (-x^3 \quad +3x \quad +2) : (x+1) = -x^2 + x + 2 \\ -(-x^3 \quad -x^2) \\ \hline \quad \quad x^2 \quad +3x \quad +2 \\ \quad \quad - (x^2 \quad +x) \\ \hline \quad \quad \quad \quad 2x \quad +2 \\ \quad \quad \quad \quad - (2x \quad +2) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{-2} \quad x_2 = \frac{-1 - 3}{-2}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

$x_1 = -1$; 2-fache Nullstelle

$x_2 = 0$; 1-fache Nullstelle

$x_3 = 2$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	-	0	-	0	+	0	-

$x \in]0; 2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -(\cup] - 1; 0[\cup] 2; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -4x^3 + 6x + 2 = 0$$

$$-4x^3 + 6x + 2 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{r}
 (-4x^3 \quad +6x \quad +2) : (x+1) = -4x^2 + 4x + 2 \\
 \underline{-(-4x^3 \quad -4x^2)} \\
 \quad \quad \quad 4x^2 \quad +6x \quad +2 \\
 \quad \quad \quad \underline{-(4x^2 \quad +4x)} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2x \quad +2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{-(2x \quad +2)} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

$$-4x^2 + 4x + 2 = 0 \\
 x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2}}{2 \cdot (-4)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{-8}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 6,928}{-8}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 6,928}{-8} \quad x_2 = \frac{-4 - 6,928}{-8}$$

$$x_1 = -0,366 \quad x_2 = 1,366$$

$$x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = -0,366; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_6 = 1,366; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-1) = -6$$

$$f''(-1) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(-1/0)$$

$$f''(-0,366) = 4,392 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(-0,366 / -0,348)$$

$$f''(1,366) = -16,392$$

$$f''(1,366) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(1,366/4,848)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -1$	$-1 < x < -0,366$	$-0,366 < x < 1,366$	$1,366 < x$
$f'(x)$	+	0	-	0

$x \in]-\infty; -1[\cup]-0,366; 1,366[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

$x \in]-1; -0,366[\cup]1,366; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -12x^2 + 6 = 0$$

$$-12x^2 + 6 = 0 \quad / -6$$

$$-12x^2 = -6 \quad / : (-12)$$

$$x^2 = \frac{-6}{-12}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = 0,707 \quad x_2 = -0,707$$

$$x_7 = -0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_8 = 0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-0,707) = -0,164$$

$$f'''(-0,707) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(-0,707 / -0,164)$$

$$f'''(0,707) = 2,664$$

$$f'''(0,707) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(0,707/2,664)$$

- Krümmung

	$x < -0,707$	$-0,707 < x < 0,707$	$0,707 < x$
$f''(x)$	-	+	-

$x \in]-0,707; 0,707[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

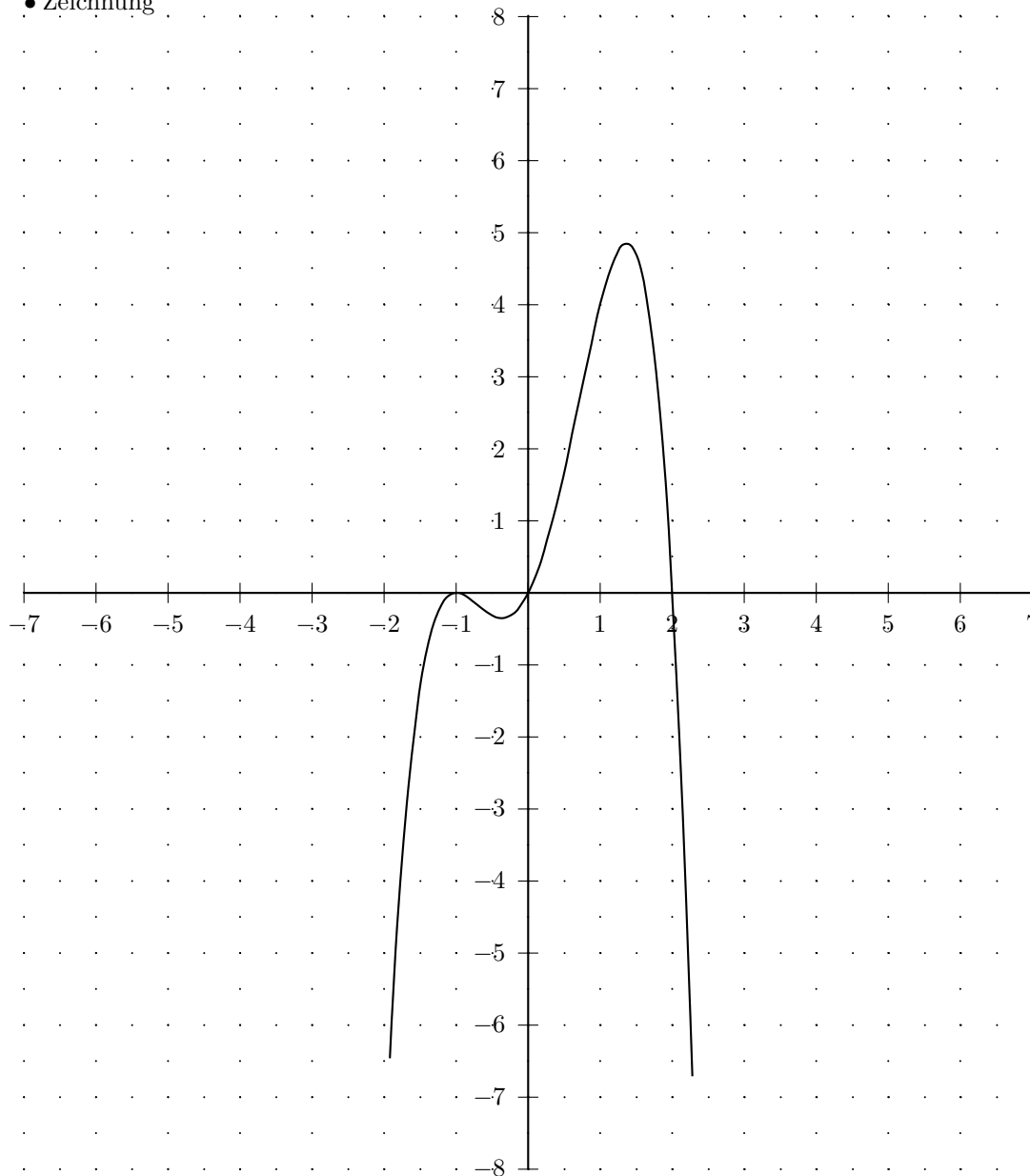
$x \in]-\infty; -0,707[\cup]0,707; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-2268	1332,009	-582,001	3067,4
$-6\frac{1}{2}$	$-1671\frac{5}{16}$	1061,508	-501,001	2088,206
-6	-1200	830,007	-426,001	1375,2
$-5\frac{1}{2}$	$-835\frac{5}{16}$	634,507	-357,001	870,444
-5	-560	472,006	-294,001	525
$-4\frac{1}{2}$	$-358\frac{5}{16}$	339,506	-237,001	298,181
-4	-216	234,005	-186,001	156,8
$-3\frac{1}{2}$	$-120\frac{5}{16}$	152,504	-141,001	74,419
-3	-60	92,004	-102,001	$30\frac{3}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$-25\frac{5}{16}$	49,503	-69,001	$10\frac{5}{32}$
-2	-8	22,002	-42,001	$2\frac{2}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{16}$	6,502	-21,001	0,394
-1	0	0,001	-6,001	$\frac{1}{5}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{16}$	-0,499	2,999	0,131
0	0	2	5,999	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	2	5,999	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{16}$	4,499	2,999	0,369
1	4	3,999	-6,001	$1\frac{4}{5}$
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	-2,502	-21,001	4,106
2	0	-18,002	-42,001	$5\frac{3}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$-15\frac{5}{16}$	-45,503	-69,001	$2\frac{11}{32}$
3	-48	-88,004	-102,001	$-12\frac{3}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$-106\frac{5}{16}$	-148,504	-141,001	-49,919
4	-200	-230,005	-186,001	-124,8
$4\frac{1}{2}$	$-340\frac{5}{16}$	-335,506	-237,001	-257,681
5	-540	-468,006	-294,001	-475
$5\frac{1}{2}$	$-813\frac{5}{16}$	-630,507	-357,001	-809,944
6	-1176	-826,007	-426,001	-1303,2
$6\frac{1}{2}$	$-1645\frac{5}{16}$	-1057,508	-501,001	-2003,706
7	-2240	-1328,009	-582,001	-2969,4

• Zeichnung



Aufgabe (13)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -x^4 + 3x^3 - 4x = -(x+1)x(x-2)^2$$

$$f'(x) = -4x^3 + 9x^2 - 4 = -4(x+0,593)(x-0,843)(x-2)$$

$$f''(x) = -12x^2 + 18x = -12x(x-1\frac{1}{2})$$

$$f'''(x) = -24x + 18$$

$$F(x) = \int (-x^4 + 3x^3 - 4x)dx = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 2x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 1,623[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^4] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^4] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -1 \cdot (-x)^4 + 3 \cdot (-x)^3 - 4 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -x^4 + 3x^3 - 4x = 0$$

$$x(-x^3 + 3x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{r} (-x^3 + 3x^2 - 4) : (x+1) = -x^2 + 4x - 4 \\ -(-x^3 - x^2) \\ \hline 4x^2 - 4 \\ -(4x^2 + 4x) \\ \hline -4x - 4 \\ -(-4x - 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 0}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-4+0}{-2} \quad x_2 = \frac{-4-0}{-2}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2$$

$x_1 = -1$; 1-fache Nullstelle

$x_2 = 0$; 1-fache Nullstelle

$x_3 = 2$; 2-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

$x \in]-1; 0[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -(\cup]0; 2[\cup]2; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -4x^3 + 9x^2 - 4 = 0$$

$$-4x^3 + 9x^2 - 4 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: 2

$$\begin{array}{r}
 (-4x^3 + 9x^2 - 4) : (x - 2) = -4x^2 + x + 2 \\
 \underline{-(-4x^3 + 8x^2)} \\
 x^2 - 4 \\
 \underline{-(x^2 - 2x)} \\
 2x - 4 \\
 \underline{-(2x - 4)} \\
 0
 \end{array}$$

$$-4x^2 + x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2}}{2 \cdot (-4)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{-8}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 5,745}{-8}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5,745}{-8} \quad x_2 = \frac{-1 - 5,745}{-8}$$

$$x_1 = -0,593 \quad x_2 = 0,843$$

$$x_4 = -0,593; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_5 = 0,843; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_6 = 2; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f''(-0,593) = -14,896$$

$$f''(-0,593) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,593/1,623)}$$

$$f''(0,843) = 6,646 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0,843/-2,08)}$$

$$f''(2) = -12$$

$$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/0)}$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -0,593$	$-0,593 < x < 0,843$	$0,843 < x < 2$	$2 < x$
$f'(x)$	+	0	-	0

$x \in]-\infty; -0,593[\cup]0,843; 2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

$x \in]-0,593; 0,843[\cup]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -12x^2 + 18x = 0$$

$$x(-12x + 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -12x + 18 = 0$$

$$-12x + 18 = 0 \quad / -18$$

$$-12x = -18 \quad / : (-12)$$

$$x = \frac{-18}{-12}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

$$x_7 = 0; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_8 = 1\frac{1}{2}; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Wendepunkt:}(0/0)}$$

$$f'''(1\frac{1}{2}) = -\frac{15}{16}$$

$$f'''(1\frac{1}{2}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Wendepunkt:}(1\frac{1}{2}/-\frac{15}{16})}$$

$$f'''(1\frac{1}{2}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Wendepunkt:}(1\frac{1}{2}/-\frac{15}{16})}$$

- Krümmung

	$x < 0$	$0 < x < 1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2} < x$
$f''(x)$	-	0	+

$$x \in]0; 1\frac{1}{2}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

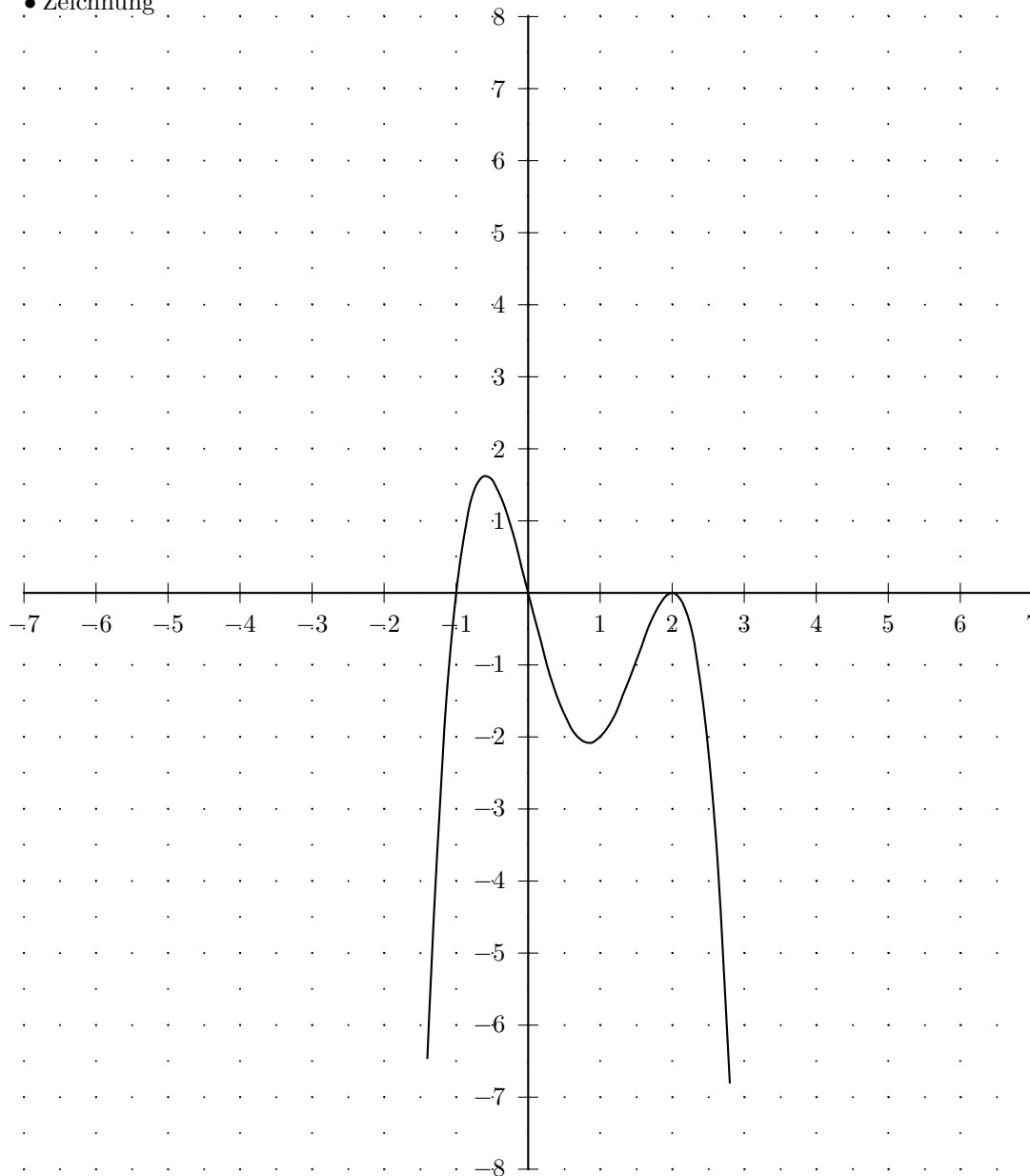
$$x \in]-\infty; 0[\cup]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-3402	1809,009	-714,001	5064,15
$-6\frac{1}{2}$	$-2582\frac{15}{16}$	1474,759	-624,001	3574,878
-6	-1920	1184,008	-540,001	2455,2
$-5\frac{1}{2}$	$-1392\frac{3}{16}$	933,758	-462,001	1632,366
-5	-980	721,007	-390,001	1043,75
$-4\frac{1}{2}$	$-665\frac{7}{16}$	542,756	-324,001	636,103
-4	-432	396,006	-264,001	364,8
$-3\frac{1}{2}$	$-264\frac{11}{16}$	277,755	-210,001	193,091
-3	-150	185,005	-162,001	$91\frac{7}{20}$
$-2\frac{1}{2}$	$-75\frac{15}{16}$	114,754	-120,001	$36\frac{21}{64}$
-2	-32	64,003	-84,001	$10\frac{2}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$-9\frac{3}{16}$	29,753	-54,001	0,816
-1	0	9,002	-30,001	$-1\frac{1}{20}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	-1,248	-12,001	-0,447
0	0	-3,999	-0,001	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-3,999	-0,001	0
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{11}{16}$	-2,25	5,999	-0,459
1	-2	1	5,999	$-1\frac{9}{20}$
$1\frac{1}{2}$	$-15\frac{15}{16}$	2,749	-0,001	-2,222
2	0	-0,002	-12,001	$-2\frac{2}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{16}$	-10,252	-30,001	$-2\frac{47}{64}$
3	-12	-31,003	-54,001	$-5\frac{17}{20}$
$3\frac{1}{2}$	$-35\frac{7}{16}$	-65,253	-84,001	-16,997
4	-80	-116,004	-120,001	-44,8
$4\frac{1}{2}$	$-154\frac{11}{16}$	-186,255	-162,001	-102,009
5	-270	-279,005	-210,001	-206,25
$5\frac{1}{2}$	$-437\frac{15}{16}$	-397,256	-264,001	-380,772
6	-672	-544,006	-324,001	-655,2
$6\frac{1}{2}$	$-987\frac{3}{16}$	-722,257	-390,001	-1066,284
7	-1400	-935,008	-462,001	-1658,65

• Zeichnung



Aufgabe (14)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 4(x+2)x^2(x - \frac{3}{4})$$

$$f'(x) = 16x^3 + 15x^2 - 12x = 16(x+1,453)x(x-0,516)$$

$$f''(x) = 48x^2 + 30x - 12 = 48(x+0,902)(x-0,277)$$

$$f'''(x) = 96x + 30$$

$$F(x) = \int (4x^4 + 5x^3 - 6x^2) dx = \frac{4}{5}x^5 + 1\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-10, 176), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [4 \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [4 \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 4 \cdot (-x)^4 + 5 \cdot (-x)^3 - 6 \cdot (-x)^2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$$

$$x^2(4x^2 + 5x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 4}$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8}$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm 11}{8}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 11}{8} \quad x_2 = \frac{-5 - 11}{8}$$

$$x_1 = \frac{3}{4} \quad x_2 = -2$$

$x_1 = -2$; 1-fache Nullstelle

$x_2 = 0$; 2-fache Nullstelle

$x_3 = \frac{3}{4}$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	$\frac{3}{4}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -2[\cup]\frac{3}{4}; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-2; 0[\cup]0; \frac{3}{4}[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 16x^3 + 15x^2 - 12x = 0$$

$$x(16x^2 + 15x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 16x^2 + 15x - 12 = 0$$

$$16x^2 + 15x - 12 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-12)}}{2 \cdot 16}$$

$$x_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{32}$$

$$x_{1/2} = \frac{-15 \pm 31,512}{32}$$

$$x_1 = \frac{-15 + 31,512}{32} \quad x_2 = \frac{-15 - 31,512}{32}$$

$$x_1 = 0,516 \quad x_2 = -1,453$$

$x_4 = -1,453$; 1-fache Nullstelle

$x_5 = 0$; 1-fache Nullstelle

$x_6 = 0,516$; 1-fache Nullstelle

$f''(-1,453) = 45,802 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt: $(-1,453 / -10,176)$

$f''(0) = -12$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt: $(0/0)$

$f''(0,516) = 16,26 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt: $(0,516 / -0,627)$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -1,453$	$-1,453 < x < 0$	$0 < x < 0,516$	$x > 0,516$
$f'(x)$	-	+	-	+

$x \in]-1,453; 0[\cup]0,516; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -1,453[\cup]0; 0,516[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

- Wendepunkte:

$f''(x) = 48x^2 + 30x - 12 = 0$

$48x^2 + 30x - 12 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 48 \cdot (-12)}}{2 \cdot 48}$

$x_{1/2} = \frac{-30 \pm \sqrt{3204}}{96}$

$x_{1/2} = \frac{-30 \pm 56,604}{96}$

$x_1 = \frac{-30 + 56,604}{96} \quad x_2 = \frac{-30 - 56,604}{96}$

$x_1 = 0,277 \quad x_2 = -0,902$

$x_7 = -0,902$; 1-fache Nullstelle

$x_8 = 0,277$; 1-fache Nullstelle

$f'''(-0,902) = -5,905$

$f'''(-0,902) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: $(-0,902 / -5,905)$

$f'''(0,277) = -0,331$

$f'''(0,277) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: $(0,277 / -0,331)$

- Krümmung

	$x < -0,902$	$-0,902 < x < 0,277$	$x > 0,277$
$f''(x)$	+	-	+

$x \in]-\infty; -0,902[\cup]0,277; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

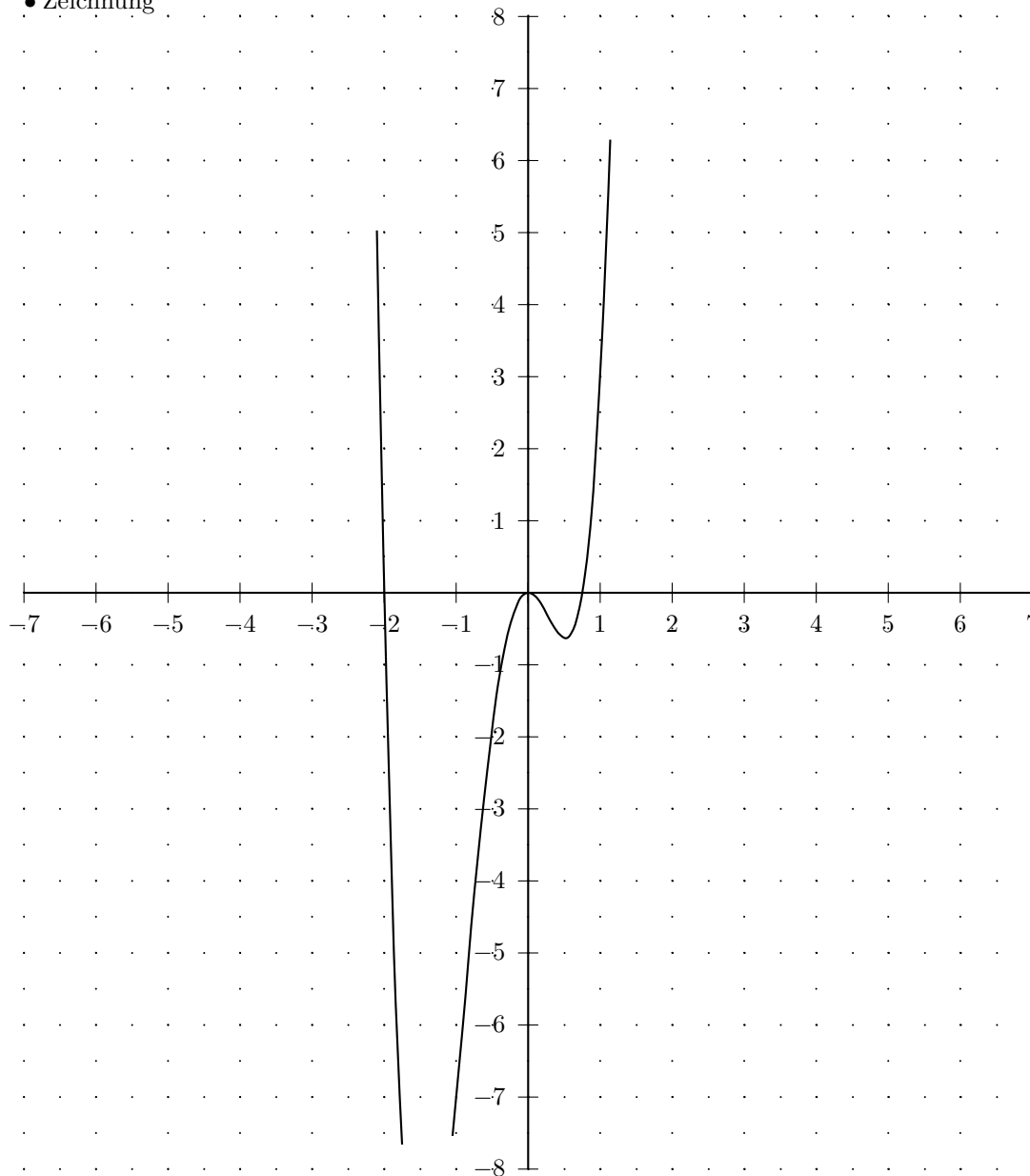
$x \in]-0,902; 0,277[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	7595	-4669,033	2130,002	-9758,35
$-6\frac{1}{2}$	$5513\frac{5}{8}$	-3682,28	1821,002	-6501,747
-6	3888	-2844,028	1536,002	-4168,8
$-5\frac{1}{2}$	$2646\frac{7}{8}$	-2142,275	1275,002	-2549,697
-5	1725	-1565,023	1038,002	-1468,75
$-4\frac{1}{2}$	$1063\frac{1}{8}$	-1100,271	825,002	-781,397
-4	608	-736,018	636,002	-371,2
$-3\frac{1}{2}$	$312\frac{3}{8}$	-460,266	471,002	-146,847
-3	135	-261,013	330,002	-39,15
$-2\frac{1}{2}$	$40\frac{5}{8}$	-126,261	213,002	$1\frac{61}{64}$
-2	0	-44,008	120,002	$10\frac{2}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	-2,256	51,002	7,003
-1	-7	10,997	6,002	$2\frac{9}{20}$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{8}$	7,749	-14,998	0,303
0	0	0,002	-11,998	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0,002	-11,998	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	-0,246	15,002	-0,147
1	3	19,006	66,002	$\frac{1}{20}$
$1\frac{1}{2}$	$23\frac{5}{8}$	69,759	141,002	5,653
2	80	164,011	240,002	$29\frac{3}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$196\frac{7}{8}$	313,764	363,002	$95\frac{45}{64}$
3	405	531,016	510,002	241,65
$3\frac{1}{2}$	$741\frac{1}{8}$	827,769	681,002	522,003
4	1248	1216,021	876,002	1011,2
$4\frac{1}{2}$	$1974\frac{3}{8}$	1707,774	1095,002	1806,553
5	2975	2315,026	1338,002	3031,25
$5\frac{1}{2}$	$4310\frac{5}{8}$	3049,778	1605,002	4837,353
6	6048	3924,031	1896,002	7408,8
$6\frac{1}{2}$	$8259\frac{7}{8}$	4949,783	2211,002	10964,403
7	11025	6139,036	2550,002	15760,85

• Zeichnung



Aufgabe (15)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x+1)^2(x-1)^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4(x+1)x(x-1)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 12(x+0,577)(x-0,577)$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$F(x) = \int (x^4 - 2x^2 + 1)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]0, \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 + 1$$

$$f(-x) = 1 \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$1u^2 - 2u + 1 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$u_{1/2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$u_1 = \frac{2+0}{2} \quad u_2 = \frac{2-0}{2}$$

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$x_1 = -1; \quad \underline{\text{2-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 1; \quad \underline{\text{2-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$f(x)$	+	0	+	0	+

$x \in]-\infty; -(\cup] -1; 1[\cup]1; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0$$

$$x(4x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 - 4 = 0$$

$$4x^2 - 4 = 0 \quad / +4$$

$$4x^2 = 4 \quad / :4$$

$$x^2 = \frac{4}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$x_3 = -1$; 1-fache Nullstelle
 $x_4 = 0$; 1-fache Nullstelle
 $x_5 = 1$; 1-fache Nullstelle
 $f''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:(-1/0)
 $f''(0) = -4$
 $f''(0) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(0/1)
 $f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:(1/0)

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	-	+	-	+

$x \in]-1; 0[\cup]1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -1[\cup]0; 1[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

- Wendepunkte:

$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0$

$12x^2 - 4 = 0 \quad / + 4$

$12x^2 = 4 \quad / : 12$

$x^2 = \frac{4}{12}$

$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

$x_1 = 0,577 \quad x_2 = -0,577$

$x_6 = -0,577$; 1-fache Nullstelle

$x_7 = 0,577$; 1-fache Nullstelle

$f'''(-0,577) = \frac{4}{9}$

$f'''(-0,577) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:(-0,577/ $\frac{4}{9}$)

$f'''(0,577) = \frac{4}{9}$

$f'''(0,577) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:(0,577/ $\frac{4}{9}$)

- Krümmung

	$x < -0,577$	$-0,577 < x < 0,577$	$x > 0,577$
$f''(x)$	+	-	+

$x \in]-\infty; -0,577[\cup]0,577; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

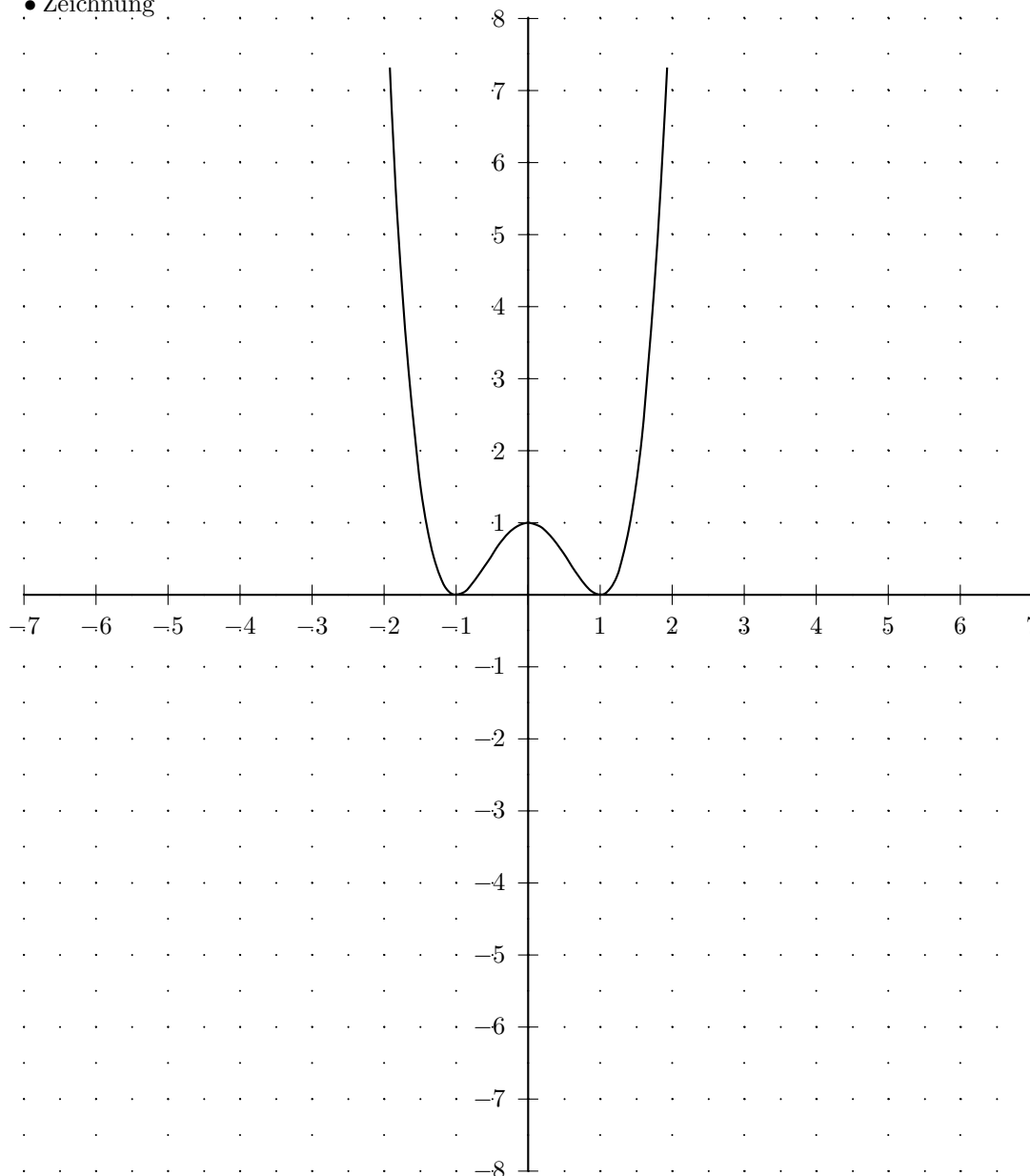
$x \in]-0,577; 0,577[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	2304	-1344,009	584,001	-3139,733
$-6\frac{1}{2}$	$1701\frac{9}{16}$	-1072,508	503,001	-2143,998
-6	1225	-840,007	428,001	-1417,2
$-5\frac{1}{2}$	$855\frac{9}{16}$	-643,507	359,001	-901,152
-5	576	-480,006	296,001	-546,667
$-4\frac{1}{2}$	$370\frac{9}{16}$	-346,506	239,001	-312,806
-4	225	-240,005	188,001	-166,133
$-3\frac{1}{2}$	$126\frac{9}{16}$	-157,504	143,001	-79,96
-3	64	-96,004	104,001	$-33\frac{3}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$27\frac{9}{16}$	-52,503	71,001	$-11\frac{59}{96}$
-2	9	-24,002	44,001	$-3\frac{1}{15}$
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	-7,502	23,001	-0,769
-1	0	-0,001	8,001	$-\frac{8}{15}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	1,499	-0,999	-0,423
0	1	0	-3,999	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	1	0	-3,999	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	-1,499	-0,999	0,423
1	0	0,001	8,001	$\frac{8}{15}$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	7,502	23,001	0,769
2	9	24,002	44,001	$3\frac{1}{15}$
$2\frac{1}{2}$	$27\frac{9}{16}$	52,503	71,001	$11\frac{59}{96}$
3	64	96,004	104,001	$33\frac{3}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$126\frac{9}{16}$	157,504	143,001	79,96
4	225	240,005	188,001	166,133
$4\frac{1}{2}$	$370\frac{9}{16}$	346,506	239,001	312,806
5	576	480,006	296,001	546,667
$5\frac{1}{2}$	$855\frac{9}{16}$	643,507	359,001	901,152
6	1225	840,007	428,001	1417,2
$6\frac{1}{2}$	$1701\frac{9}{16}$	1072,508	503,001	2143,998
7	2304	1344,009	584,001	3139,733

• Zeichnung



Aufgabe (16)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$$

$$f''(x) = 12x^2 + 4 = 12(x^2 + \frac{1}{3})$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$F(x) = \int (x^4 + 2x^2 + 1)dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]1, \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^2 + 1$$

$$f(-x) = 1 \cdot x^4 + 2 \cdot x^2 + 1$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$1u^2 + 2u + 1 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$u_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

$$u_1 = \frac{-2 + 0}{2} \quad u_2 = \frac{-2 - 0}{2}$$

$$u_1 = -1 \quad u_2 = -1$$

$$x^2 = -1x = \pm\sqrt{-1}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$$x^2 = -1x = \pm\sqrt{-1}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichen-tabelle:

kein Vorzeichenwechsel

$x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4x^3 + 4x = 0$$

$$x(4x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 + 4 = 0$$

$$4x^2 + 4 = 0 \quad / -4$$

$$4x^2 = -4 \quad / : 4$$

$$x^2 = \frac{-4}{4}$$

keine Lösung

$$x_1 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(0/1)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in] - \infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 12x^2 + 4 = 0$$

$$12x^2 + 4 = 0 \quad / - 4$$

$$12x^2 = -4 \quad / : 12$$

$$x^2 = \frac{-4}{12}$$

keine Lösung

• Krümmung

kein Vorzeichenwechsel

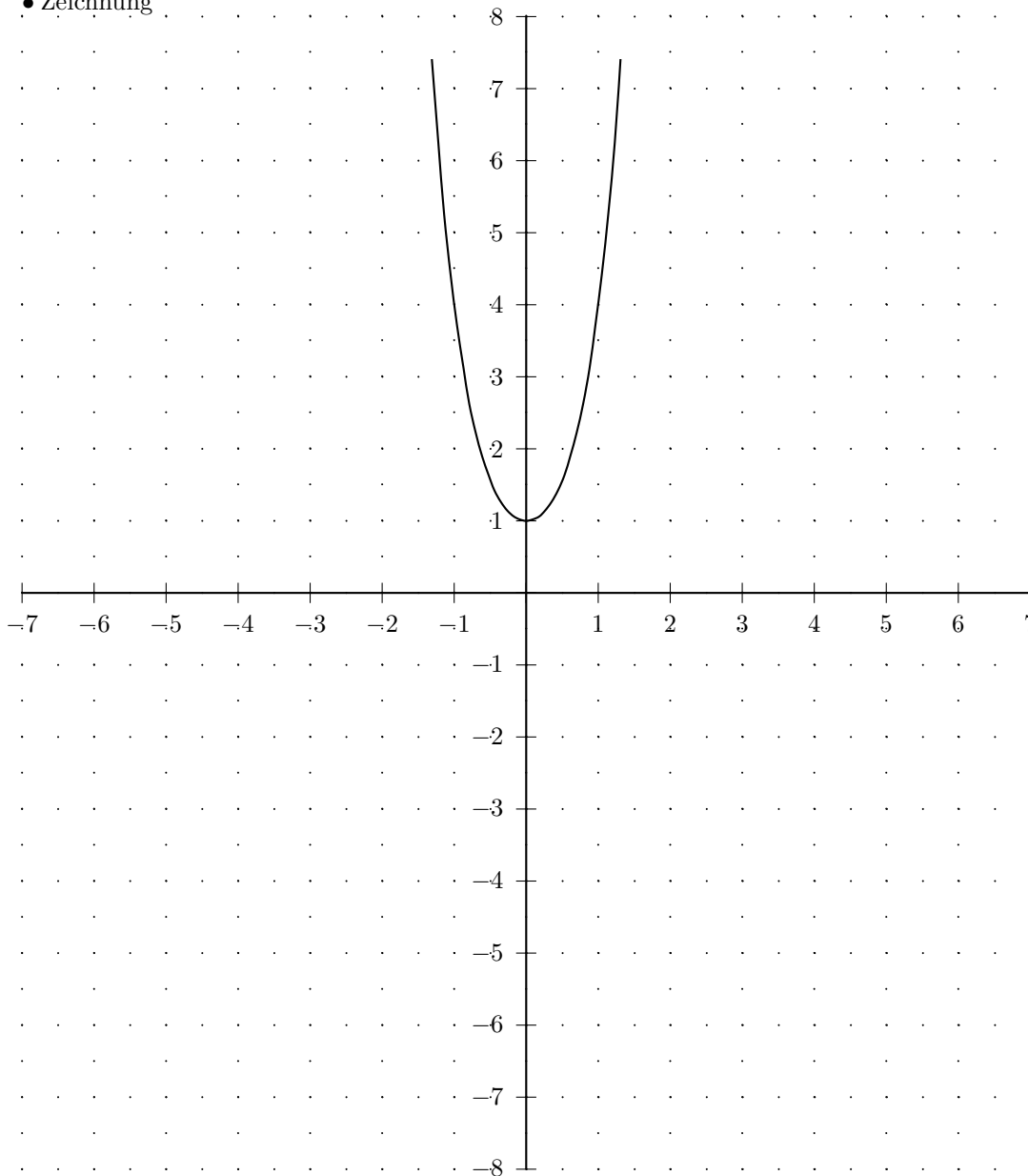
$x \in \mathbb{R} \quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	2500	-1400,009	592,001	-3597,067
$-6\frac{1}{2}$	$1870\frac{9}{16}$	-1124,508	511,001	-2510,165
-6	1369	-888,007	436,001	-1705,2
$-5\frac{1}{2}$	$976\frac{9}{16}$	-687,507	367,001	-1122,985
-5	676	-520,006	304,001	-713,333
$-4\frac{1}{2}$	$451\frac{9}{16}$	-382,506	247,001	-434,306
-4	289	-272,005	196,001	-251,467
$-3\frac{1}{2}$	$175\frac{9}{16}$	-185,504	151,001	-137,127
-3	100	-120,004	112,001	$-69\frac{3}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$52\frac{9}{16}$	-72,503	79,001	$-32\frac{43}{96}$
-2	25	-40,002	52,001	$-13\frac{11}{15}$
$-1\frac{1}{2}$	$10\frac{9}{16}$	-19,502	31,001	-5,269
-1	4	-8,001	16,001	$-1\frac{13}{15}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	-2,501	7,001	-0,59
0	1	0	4,001	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	1	0	4,001	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	2,501	7,001	0,59
1	4	8,001	16,001	$1\frac{13}{15}$
$1\frac{1}{2}$	$10\frac{9}{16}$	19,502	31,001	5,269
2	25	40,002	52,001	$13\frac{11}{15}$
$2\frac{1}{2}$	$52\frac{9}{16}$	72,503	79,001	$32\frac{43}{96}$
3	100	120,004	112,001	$69\frac{3}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$175\frac{9}{16}$	185,504	151,001	137,127
4	289	272,005	196,001	251,467
$4\frac{1}{2}$	$451\frac{9}{16}$	382,506	247,001	434,306
5	676	520,006	304,001	713,333
$5\frac{1}{2}$	$976\frac{9}{16}$	687,507	367,001	1122,985
6	1369	888,007	436,001	1705,2
$6\frac{1}{2}$	$1870\frac{9}{16}$	1124,508	511,001	2510,165
7	2500	1400,009	592,001	3597,067

• Zeichnung



Aufgabe (17)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = (x + 3)(x + 2)(x - 2)(x - 3)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 26x = 4(x + 2,55)x(x - 2,55)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 26 = 12(x + 1,472)(x - 1,472)$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$F(x) = \int (x^4 - 13x^2 + 36)dx = \frac{1}{5}x^5 - 4\frac{1}{3}x^3 + 36x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-6\frac{1}{4}), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 13 \cdot (-x)^2 + 36$$

$$f(-x) = 1 \cdot x^4 - 13 \cdot x^2 + 36$$

$$f(-x) = f(x) \rightarrow \text{Symmetrie zur y-Achse:}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$1u^2 - 13u + 36 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1/2} = \frac{+13 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$u_{1/2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$u_1 = \frac{13 + 5}{2} \quad u_2 = \frac{13 - 5}{2}$$

$$u_1 = 9 \quad u_2 = 4$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

$$x_1 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-2	$< x <$	2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -3[\cup]-2; 2[\cup]3; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-3; -2[\cup]2; 3[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4x^3 - 26x = 0$$

$$x(4x^2 - 26) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 - 26 = 0$$

$$4x^2 - 26 = 0 \quad / + 26$$

$$4x^2 = 26 \quad / : 4$$

$$x^2 = \frac{26}{4}$$

$$x = \pm \sqrt{6\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = 2,55 \quad x_2 = -2,55$$

$$x_5 = -2,55; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_6 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_7 = 2,55; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-2,55) = 52 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-2,55 / -6\frac{1}{4})$$

$$f''(0) = -26$$

$$f''(0) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (0/36)$$

$$f''(2,55) = 52 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (2,55 / -6\frac{1}{4})$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,55$	$< x <$	0	$< x <$	$2,55$	$< x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$x \in]-2,55; 0[\cup]2,55; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; -2,55[\cup]0; 2,55[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 12x^2 - 26 = 0$$

$$12x^2 - 26 = 0 \quad / + 26$$

$$12x^2 = 26 \quad / : 12$$

$$x^2 = \frac{26}{12}$$

$$x = \pm \sqrt{2\frac{1}{6}}$$

$$x_1 = 1,472 \quad x_2 = -1,472$$

$$x_8 = -1,472; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_9 = 1,472; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-1,472) = 12\frac{19}{36}$$

$$f'''(-1,472) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-1,472 / 12\frac{19}{36})$$

$$f'''(1,472) = 12\frac{19}{36}$$

$$f'''(1,472) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (1,472 / 12\frac{19}{36})$$

- Krümmung

	$x <$	$-1,472$	$< x <$	$1,472$	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; -1,472[\cup]1,472; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

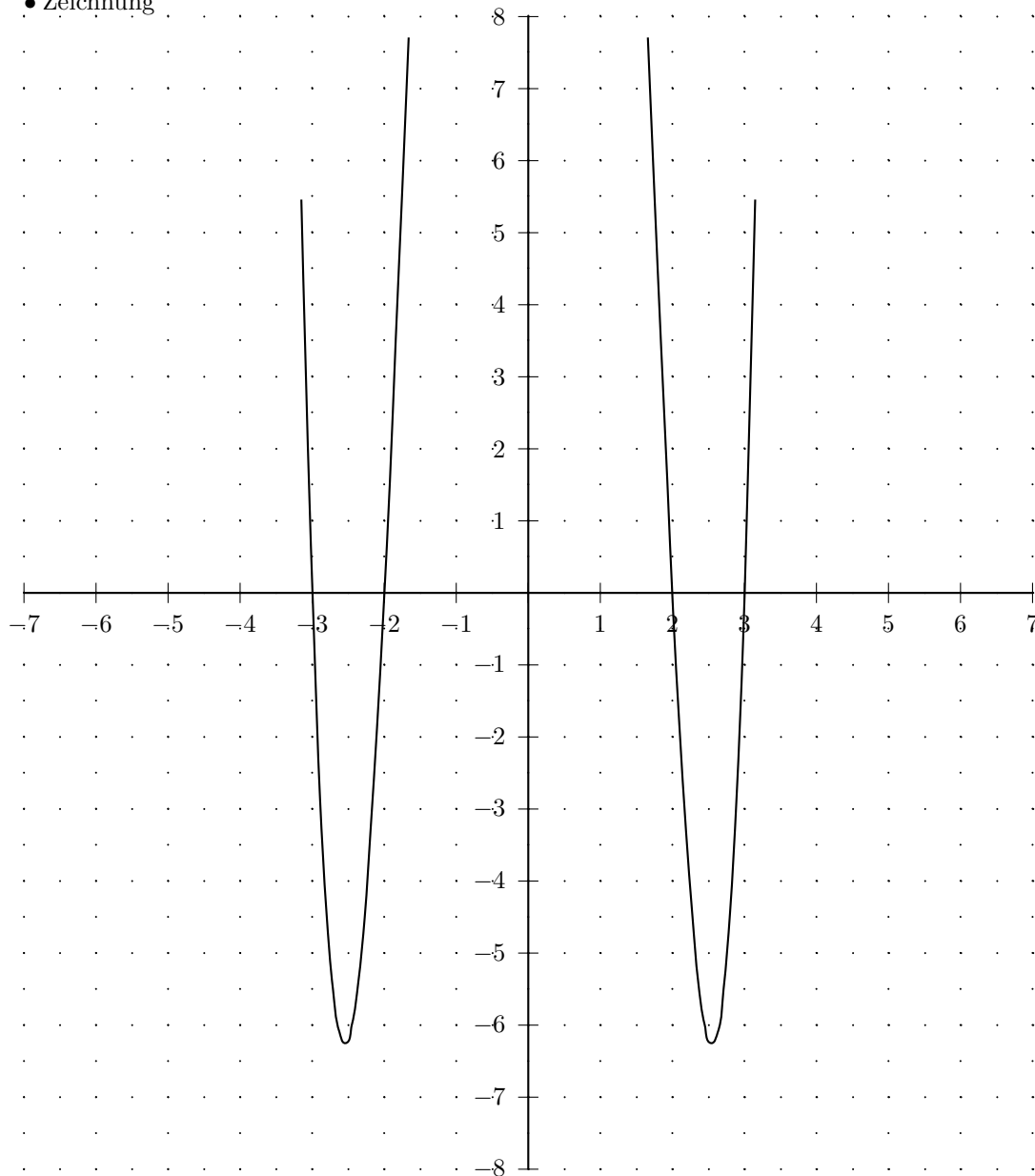
$$x \in]-1,472; 1,472[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	1800	-1190,009	562,001	-2127,067
$-6\frac{1}{2}$	$1271\frac{13}{16}$	-929,508	481,001	-1364,54
-6	864	-708,007	406,001	-835,2
$-5\frac{1}{2}$	$557\frac{13}{16}$	-522,507	337,001	-483,61
-5	336	-370,006	274,001	-263,333
$-4\frac{1}{2}$	$182\frac{13}{16}$	-247,506	217,001	-136,181
-4	84	-152,005	166,001	-71,467
$-3\frac{1}{2}$	$26\frac{13}{16}$	-80,504	121,001	-45,252
-3	0	-30,004	82,001	$-39\frac{3}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	2,497	49,001	$-41\frac{79}{96}$
-2	0	19,998	22,001	$-43\frac{11}{15}$
$-1\frac{1}{2}$	$11\frac{13}{16}$	25,498	1,001	-40,894
-1	24	21,999	-13,999	$-31\frac{13}{15}$
$-\frac{1}{2}$	$32\frac{13}{16}$	12,499	-22,999	-17,465
0	36	0	-25,999	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	36	0	-25,999	0
$\frac{1}{2}$	$32\frac{13}{16}$	-12,499	-22,999	17,465
1	24	-21,999	-13,999	$31\frac{13}{15}$
$1\frac{1}{2}$	$11\frac{13}{16}$	-25,498	1,001	40,894
2	0	-19,998	22,001	$43\frac{11}{15}$
$2\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	-2,497	49,001	$41\frac{79}{96}$
3	0	30,004	82,001	$39\frac{3}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$26\frac{13}{16}$	80,504	121,001	45,252
4	84	152,005	166,001	71,467
$4\frac{1}{2}$	$182\frac{13}{16}$	247,506	217,001	136,181
5	336	370,006	274,001	263,333
$5\frac{1}{2}$	$557\frac{13}{16}$	522,507	337,001	483,61
6	864	708,007	406,001	835,2
$6\frac{1}{2}$	$1271\frac{13}{16}$	929,508	481,001	1364,54
7	1800	1190,009	562,001	2127,067

• Zeichnung



Aufgabe (18)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7 = (x + 2,974)(x + 1,081)(x - 1,131)(x - 1,925)$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 14x - 1 = 4(x + 2,254)(x + 0,07)(x - 1,574)$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 14 = 12(x + 1,359)(x - 0,859)$$

$$f'''(x) = 24x + 6$$

$$F(x) = \int (x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7)dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 2\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-11, 949), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 + 1 \cdot (-x)^3 - 7 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x) + 7$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7 = 0$$

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7$$

NumerischeSuche :

$$x_1 = -2,974; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -1,081; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 1,131; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 1,925; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2,974$	$< x <$	$-1,081$	$< x <$	$1,131$	$< x <$	$1,925$	$< x$
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; -2,974[\cup]-1,081; 1,131[\cup]1,925; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-2,974; -1,081[\cup]1,131; 1,925[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 14x - 1 = 0$$

$$4x^3 + 3x^2 - 14x - 1 = 0$$

NumerischeSuche :

$$x_5 = -2,254; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_6 = -0,07; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_7 = 1,574; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-2,254) = 33,43 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(-2,254 / -11,949)$$

$$f''(-0,07) = -14,363$$

$$f''(-0,07) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(-0,07 / 7,035)$$

$$f''(1,574) = 25,183 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(1,574 / -1,879)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,254$	$< x <$	$-0,07$	$< x <$	$1,574$	$< x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$x \in]-2,254; -0,07[\cup]1,574; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -2,254[\cup]-0,07; 1,574[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 14 = 0$$

$$12x^2 + 6x - 14 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-14)}}{2 \cdot 12}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{708}}{24}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm 26,608}{24}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 26,608}{24} \quad x_2 = \frac{-6 - 26,608}{24}$$

$$x_1 = 0,859 \quad x_2 = -1,359$$

$$x_8 = -1,359; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_9 = 0,859; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-1,359) = -3,664$$

$$f'''(-1,359) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-1,359 / -3,664)$$

$$f'''(0,859) = 2,157$$

$$f'''(0,859) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (0,859/2,157)$$

• Kruemmung

	$x <$	$-1,359$	$< x <$	$0,859$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x \in]-\infty; -1,359[\cup]0,859; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

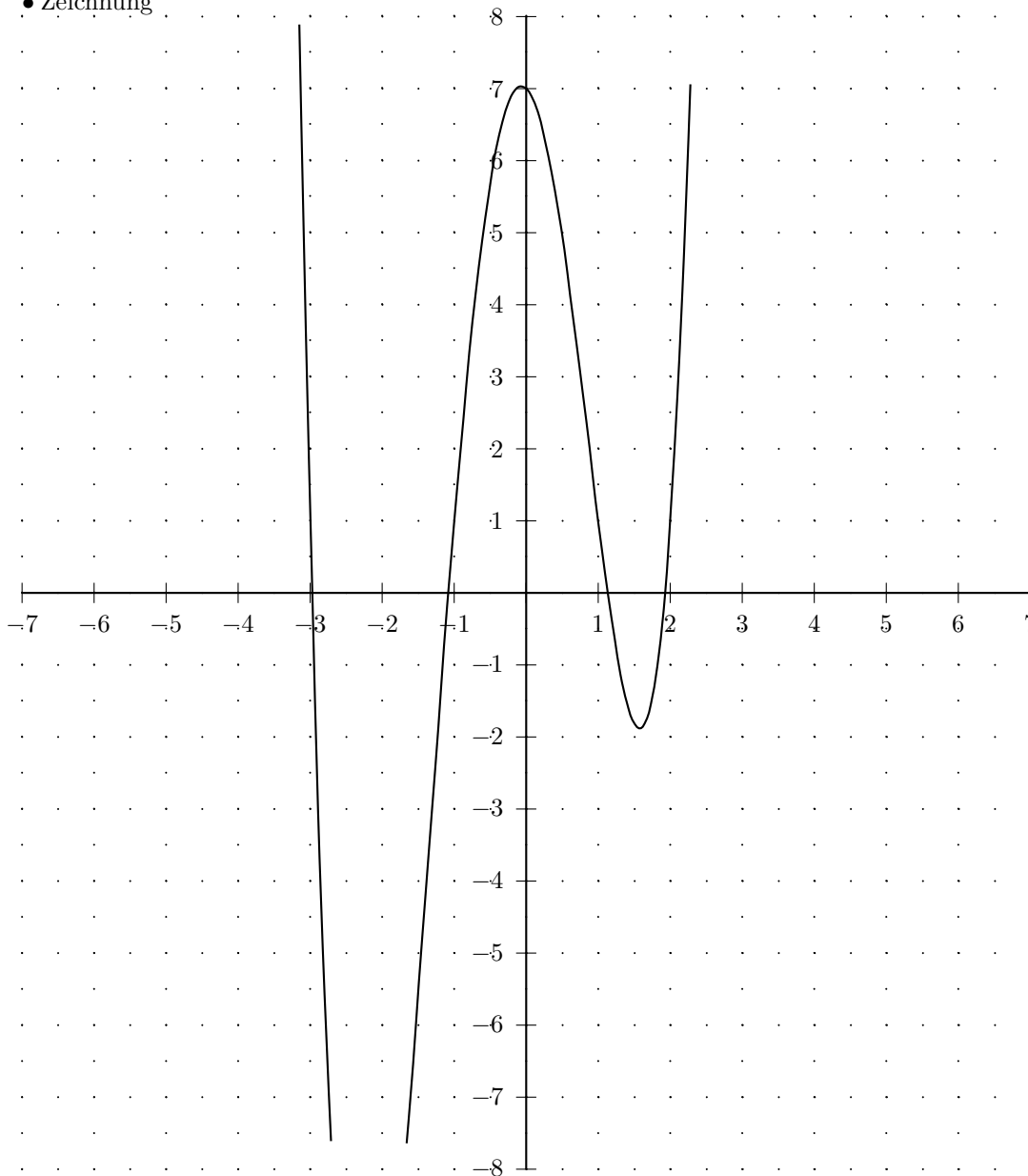
$$x \in]-1,359; 0,859[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	1729	-1128,008	532,001	-2034,317
$-6\frac{1}{2}$	$1228\frac{3}{16}$	-881,758	454,001	-1300,149
-6	841	-673,007	382,001	-787,2
$-5\frac{1}{2}$	$549\frac{7}{16}$	-498,756	316,001	-443,22
-5	337	-356,006	256,001	-224,583
$-4\frac{1}{2}$	$188\frac{11}{16}$	-241,755	202,001	-95,541
-4	91	-153,005	154,001	-27,467
$-3\frac{1}{2}$	$31\frac{15}{16}$	-86,754	112,001	1,889
-3	1	-40,003	76,001	$9\frac{3}{20}$
$-2\frac{1}{2}$	$-10\frac{13}{16}$	-9,753	46,001	6,068
-2	-11	6,998	22,001	$\frac{4}{15}$
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{9}{16}$	13,248	4,001	-4,003
-1	1	11,999	-7,999	$-5\frac{7}{60}$
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{16}$	6,25	-13,999	-3,324
0	7	-1	-13,999	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	7	-1	-13,999	0
$\frac{1}{2}$	$4\frac{15}{16}$	-6,749	-7,999	3,105
1	1	-7,998	4,001	$4\frac{37}{60}$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{13}{16}$	-1,748	22,001	4,284
2	1	15,003	46,001	$3\frac{11}{15}$
$2\frac{1}{2}$	$15\frac{7}{16}$	45,253	76,001	7,214
3	49	92,004	112,001	$22\frac{7}{20}$
$3\frac{1}{2}$	$110\frac{11}{16}$	158,255	154,001	60,893
4	211	247,005	202,001	139,467
$4\frac{1}{2}$	$361\frac{15}{16}$	361,256	256,001	280,322
5	577	504,006	316,001	512,083
$5\frac{1}{2}$	$871\frac{3}{16}$	678,257	382,001	870,501
6	1261	887,008	454,001	1399,2
$6\frac{1}{2}$	$1764\frac{7}{16}$	1133,258	532,001	2150,43
7	2401	1420,009	616,001	3185,817

• Zeichnung



Aufgabe (19)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 4\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 10x - 12 = 4\frac{1}{2}(x^2 + 2,32x + 1,613)(x - 1,653)$$

$$f'(x) = 13\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10 = 13\frac{1}{2}(x + 1\frac{1}{9})(x - \frac{2}{3})$$

$$f''(x) = 27x + 6 = 27(x + \frac{2}{9})$$

$$f'''(x) = 27$$

$$F(x) = \int(4\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 10x - 12)dx = 1\frac{1}{8}x^4 + x^3 - 5x^2 - 12x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [4\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [4\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 4\frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 - 10 \cdot (-x) - 12$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 4\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 10x - 12 = 0$$

$$4\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 10x - 12 = 0$$

NumerischeSuche :

$$x_1 = 1,653; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	1,653	$< x$
$f(x)$	-	0	+

$$x \in]1,653; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in]-\infty; 1,653[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 13\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10 = 0$$

$$13\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 13\frac{1}{2} \cdot (-10)}}{2 \cdot 13\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{576}}{27}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm 24}{27}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 24}{27} \quad x_2 = \frac{-6 - 24}{27}$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = -1\frac{1}{9}$$

$$x_2 = -1\frac{1}{9}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = \frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-1\frac{1}{9}) = -24$$

$$f''(-1\frac{1}{9}) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1\frac{1}{9} / -3\frac{29}{81})$$

$$f''(\frac{2}{3}) = 24 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (\frac{2}{3} / -16)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1\frac{1}{9}$	$< x <$	$\frac{2}{3}$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; -1\frac{1}{9}[\cup]\frac{2}{3}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-1\frac{1}{9}; \frac{2}{3}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 27x + 6 = 0$$

$$27x + 6 = 0 \quad / -6$$

$$27x = -6 \quad / : 27$$

$$x = \frac{-6}{27}$$

$$x = -\frac{2}{9}$$

$$x_4 = -\frac{2}{9}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-\frac{2}{9}) = -9\frac{55}{81}$$

$$f'''(-\frac{2}{9}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-\frac{2}{9} / -9\frac{55}{81})$$

- Krümmung

	$x <$	$-\frac{2}{9}$	$< x$
$f''(x)$	-	0	+

$$x \in]-\frac{2}{9}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

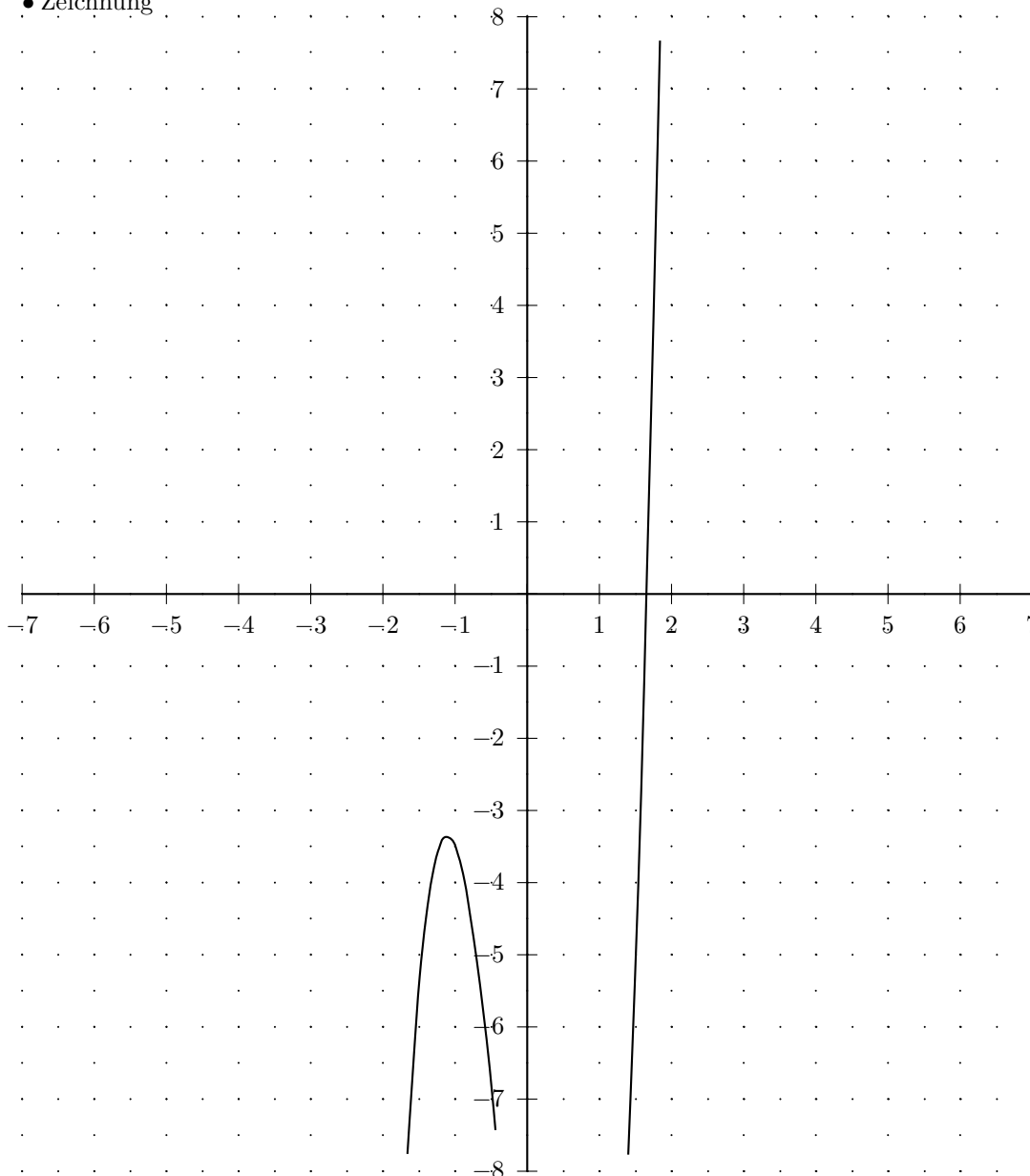
$$x \in]-\infty; -\frac{2}{9}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$-1338\frac{1}{2}$	609,501	-183	$2197\frac{1}{8}$
$-6\frac{1}{2}$	$-1056\frac{1}{16}$	521,376	$-169\frac{1}{2}$	1600,32
-6	-816	440,001	-156	1134
$-5\frac{1}{2}$	$-614\frac{15}{16}$	365,376	$-142\frac{1}{2}$	777,82
-5	$-449\frac{1}{2}$	297,501	-129	$513\frac{1}{8}$
$-4\frac{1}{2}$	$-316\frac{3}{16}$	236,376	$-115\frac{1}{2}$	322,945
-4	-212	182,001	-102	192
$-3\frac{1}{2}$	$-133\frac{3}{16}$	134,376	$-88\frac{1}{2}$	106,695
-3	$-76\frac{1}{2}$	93,501	-75	$55\frac{1}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	$-38\frac{9}{16}$	59,376	$-61\frac{1}{2}$	27,07
-2	-16	32,001	-48	14
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{7}{16}$	11,376	$-34\frac{1}{2}$	9,07
-1	$-3\frac{1}{2}$	-2,499	-21	$7\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{2}$	$-6\frac{13}{16}$	-9,624	$-7\frac{1}{2}$	4,695
0	-12	-9,999	6	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-12	-9,999	6	0
$\frac{1}{2}$	$-15\frac{11}{16}$	-3,624	$19\frac{1}{2}$	$-7,055$
1	$-14\frac{1}{2}$	9,501	33	$-14\frac{7}{8}$
$1\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{16}$	29,376	$46\frac{1}{2}$	-20,18
2	16	56,001	60	-18
$2\frac{1}{2}$	$52\frac{1}{16}$	89,376	$73\frac{1}{2}$	-1,68
3	$106\frac{1}{2}$	129,501	87	$37\frac{1}{8}$
$3\frac{1}{2}$	$182\frac{11}{16}$	176,376	$100\frac{1}{2}$	108,445
4	284	230,001	114	224
$4\frac{1}{2}$	$413\frac{13}{16}$	290,376	$127\frac{1}{2}$	397,195
5	$575\frac{1}{2}$	357,501	141	$643\frac{1}{8}$
$5\frac{1}{2}$	$772\frac{7}{16}$	431,376	$154\frac{1}{2}$	978,57
6	1008	512,001	168	1422
$6\frac{1}{2}$	$1285\frac{9}{16}$	599,376	$181\frac{1}{2}$	1993,57
7	$1608\frac{1}{2}$	693,501	195	$2715\frac{1}{8}$

• Zeichnung



8 Funktionen höheren Grades

8.1 Aufgaben

- (1) $f(x) = -2x^5$
- (2) $f(x) = -\frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4$
- (3) $f(x) = x^5 - 3x^4$
- (4) $f(x) = 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x$
- (5) $f(x) = x^5 - 10x^3 + 9x$
- (6) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x^2$
- (7) $f(x) = -\frac{1}{6}x^5 + 2x^3$
- (8) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - 3x^4 + 5x^3$
- (9) $f(x) = -x^5 + 3x^3 + 2x^2$

- (10) $f(x) = -x^5 + 3x^4 - 4x^2$
- (11) $f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3$
- (12) $f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 1$
- (13) $f(x) = 2x^6 - 2x^5$
- (14) $f(x) = -x^6 + 2x^5 - x^4$
- (15) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$
- (16) $f(x) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$
- (17) $f(x) = -\frac{1}{2}x^6 + 3x^5 - 4\frac{1}{2}x^4$

8.2 Lösungen

Aufgabe (1)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -2x^5$$

$$f'(x) = -10x^4$$

$$f''(x) = -40x^3$$

$$f'''(x) = -120x^2$$

$$F(x) = \int (-2x^5) dx = -\frac{1}{3}x^6 + c$$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ Wertebereich: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^5] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^5] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -2 \cdot (-x)^5$$

$$f(-x) = -(-2 \cdot x^5)$$

$$f(-x) = -f(x) \rightarrow \text{Symmetrie zum Ursprung:}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -2x^5 = 0$$

$$x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_1 = 0; \quad \underline{\text{5-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	0	$< x$
$f(x)$	+	0	-

$$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$$

$$\underline{x \in]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -10x^4 = 0$$

$$x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{\text{4-fache Nullstelle}}$$

$$f''(0) = 0$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Terrassenpunkt: (0/0)}}$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$< x$
$f'(x)$	-	0	-

$$\underline{x \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = -40x^3 = 0$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x_3 = 0; \quad \underline{\text{3-fache Nullstelle}}$$

• Krümmung

	$x < 0$	0	$< x$
$f''(x)$	+	0	-

$$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$$

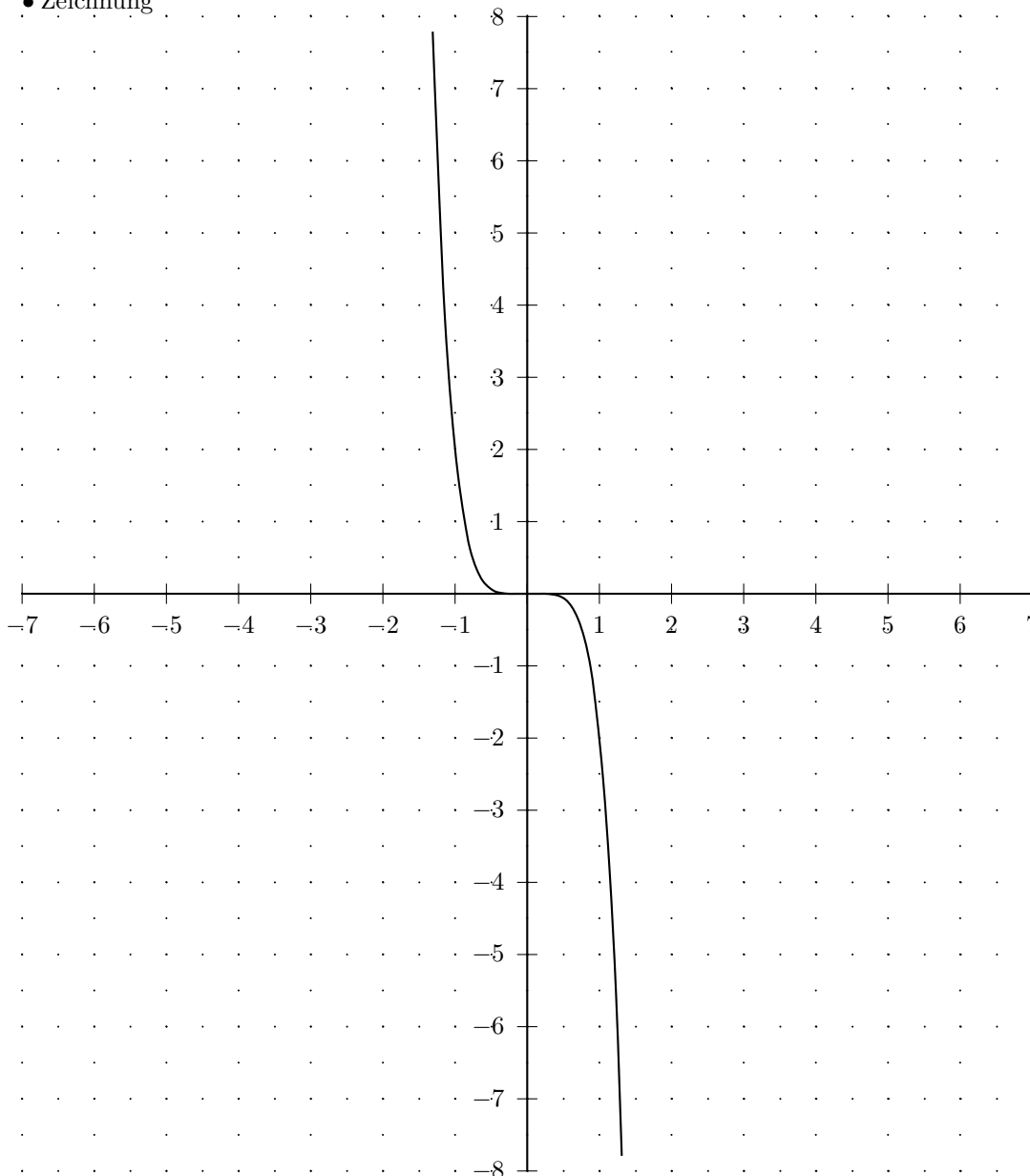
$$\underline{x \in]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	33614	-24010,3	13720,043	-39216,334
$-6\frac{1}{2}$	$23205\frac{13}{16}$	-17850,884	10985,04	-25139,631
-6	15552	-12960,221	8640,037	-15552
$-5\frac{1}{2}$	$10065\frac{11}{16}$	-9150,81	6655,034	-9226,88
-5	6250	-6250,153	5000,031	-5208,333
$-4\frac{1}{2}$	$3690\frac{9}{16}$	-4100,749	3645,028	-2767,922
-4	2048	-2560,098	2560,024	-1365,333
$-3\frac{1}{2}$	$1050\frac{7}{16}$	-1500,7	1715,021	-612,755
-3	486	-810,055	1080,018	-243
$-2\frac{1}{2}$	$195\frac{5}{16}$	-390,663	625,015	-81,38
-2	64	-160,025	320,012	$-21\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{16}$	-50,639	135,009	$-3\frac{51}{64}$
-1	2	-10,006	40,006	$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	-0,627	5,003	-0,005
0	0	0	0	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{16}$	-0,627	-5,003	-0,005
1	-2	-10,006	-40,006	$-\frac{1}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$-15\frac{3}{16}$	-50,639	-135,009	$-3\frac{51}{64}$
2	-64	-160,025	-320,012	$-21\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$-195\frac{5}{16}$	-390,663	-625,015	-81,38
3	-486	-810,055	-1080,018	-243
$3\frac{1}{2}$	$-1050\frac{7}{16}$	-1500,7	-1715,021	-612,755
4	-2048	-2560,098	-2560,024	-1365,333
$4\frac{1}{2}$	$-3690\frac{9}{16}$	-4100,749	-3645,028	-2767,922
5	-6250	-6250,153	-5000,031	-5208,333
$5\frac{1}{2}$	$-10065\frac{11}{16}$	-9150,81	-6655,034	-9226,88
6	-15552	-12960,221	-8640,037	-15552
$6\frac{1}{2}$	$-23205\frac{13}{16}$	-17850,884	-10985,04	-25139,631
7	-33614	-24010,3	-13720,043	-39216,334

• Zeichnung



Aufgabe (2)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4 = -\frac{1}{4}x^4(x - 2\frac{2}{3})$$

$$f'(x) = -1\frac{1}{4}x^4 + 2\frac{2}{3}x^3 = -1\frac{1}{4}x^3(x - 2\frac{2}{3})$$

$$f''(x) = -5x^3 + 8x^2 = -5x^2(x - 1\frac{3}{5})$$

$$f'''(x) = -15x^2 + 16x$$

$$F(x) = \int(-\frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4)dx = -\frac{1}{24}x^6 + \frac{2}{15}x^5 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot \infty^5] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^5] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{4} \cdot (-x)^5 + \frac{2}{3} \cdot (-x)^4$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4 = 0$$

$$x^4(-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0 \quad / -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{4}x = -\frac{2}{3} \quad / : (-\frac{1}{4})$$

$$x = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{4}}$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$x_1 = 0$; 4-fache Nullstelle

$x_2 = 2\frac{2}{3}$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	0	$0 < x < 2\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3} < x$
$f(x)$	+	0	+	-

$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 2\frac{2}{3}[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]2\frac{2}{3}; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -1\frac{1}{4}x^4 + 2\frac{2}{3}x^3 = 0$$

$$x^3(-1\frac{1}{4}x + 2\frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -1\frac{1}{4}x + 2\frac{2}{3} = 0$$

$$-1\frac{1}{4}x + 2\frac{2}{3} = 0 \quad / -2\frac{2}{3}$$

$$-1\frac{1}{4}x = -2\frac{2}{3} \quad / : (-1\frac{1}{4})$$

$$x = \frac{-2\frac{2}{3}}{-1\frac{1}{4}}$$

$$x = 2\frac{2}{15}$$

$x_3 = 0$; 3-fache Nullstelle

$x_4 = 2\frac{2}{15}$; 1-fache Nullstelle

$f''(0) = 0$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$

Extremwert:(0/0)

$f''(2\frac{2}{15}) = -12,136$

$$f''\left(2\frac{2}{15}\right) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } \left(2\frac{2}{15}/2, 762\right)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$0 < x < 2\frac{2}{15}$	$2\frac{2}{15}$	$x > 2\frac{2}{15}$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

$$x \in]0; 2\frac{2}{15}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; 0[\cup]2\frac{2}{15}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -5x^3 + 8x^2 = 0$$

$$x^2(-5x + 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -5x + 8 = 0$$

$$-5x + 8 = 0 \quad / -8$$

$$-5x = -8 \quad / : (-5)$$

$$x = \frac{-8}{-5}$$

$$x = 1\frac{3}{5}$$

$$x_5 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

$$x_6 = 1\frac{3}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(1\frac{3}{5}) = 1,748$$

$$f'''(1\frac{3}{5}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (1\frac{3}{5}/1, 748)$$

- Krümmung

	$x < 0$	0	$0 < x < 1\frac{3}{5}$	$1\frac{3}{5}$	$x > 1\frac{3}{5}$
$f''(x)$	+	0	+	0	-

$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1\frac{3}{5}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

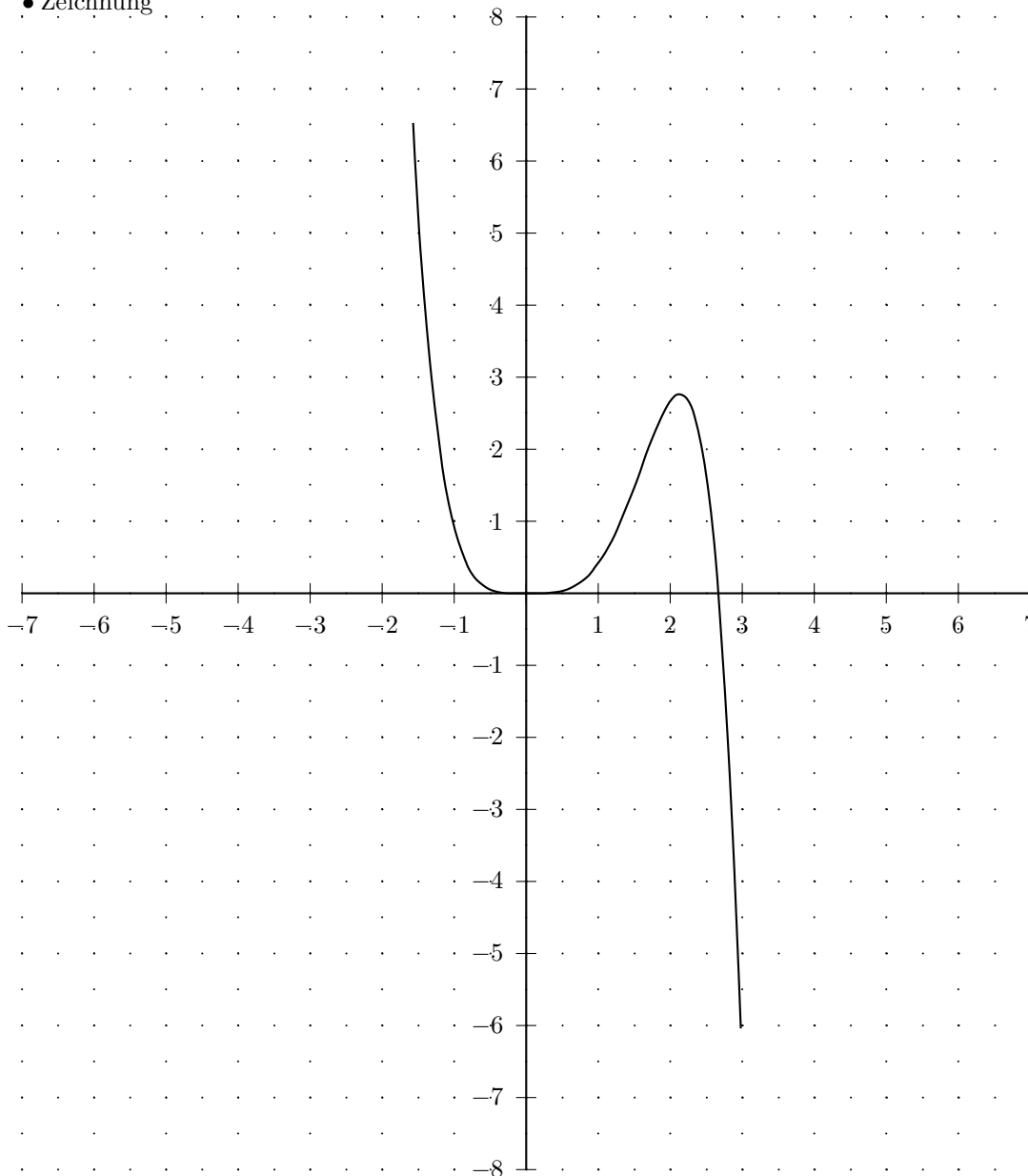
$$x \in]1\frac{3}{5}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$5802\frac{5}{12}$	-3915,96	2107,006	-7142,975
$-6\frac{1}{2}$	4090,768	-2963,699	1711,13	-4689,508
-6	2808	-2196,032	1368,005	-2980,8
$-5\frac{1}{2}$	1868,253	-1587,522	1073,88	-1824,406
-5	$1197\frac{11}{12}$	$-1114\frac{37}{61}$	825,004	-1067,708
$-4\frac{1}{2}$	734,695	-755,597	617,629	-592,028
-4	$426\frac{2}{3}$	-490,682	448,003	-307,2
$-3\frac{1}{2}$	231,346	-301,924	312,378	-146,624
-3	$114\frac{3}{4}$	-173,259	207,003	$-62\frac{31}{40}$
$-2\frac{1}{2}$	50,456	-90,502	128,127	-23,193
-2	$18\frac{2}{3}$	-41,338	72,002	$-6\frac{14}{15}$
$-1\frac{1}{2}$	5,273	-15,331	34,877	-1,487
-1	$\frac{11}{12}$	-3,918	13,001	$-\frac{7}{40}$
$-\frac{1}{2}$	0,049	-0,412	2,626	-0,005
0	0	0	0	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0,034	0,255	1,375	0,004
1	$\frac{5}{12}$	1,417	3	0,092
$1\frac{1}{2}$	1,477	2,671	1,124	0,538
2	$2\frac{2}{3}$	1,332	-8,001	$1\frac{3}{5}$
$2\frac{1}{2}$	1,628	-7,164	-28,127	2,848
3	$-6\frac{3}{4}$	-29,254	-63,002	$2\frac{1}{40}$
$3\frac{1}{2}$	-31,263	-73,251	-116,377	-6,565
4	$-85\frac{1}{3}$	-149,342	-192,003	-34,133
$4\frac{1}{2}$	-187,945	-269,59	-293,628	-99,953
5	$-364\frac{7}{12}$	-447,932	-425,003	-234,375
$5\frac{1}{2}$	-648,169	-700,18	-589,879	-482,314
6	-1080	-1044,023	-792,004	-907,2
$6\frac{1}{2}$	-1710,685	-1499,022	-1035,13	-1595,4
7	$-2601\frac{1}{12}$	-2086,615	-1323,005	-2661,108

• Zeichnung



Aufgabe (3)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^5 - 3x^4 = x^4(x - 3)$$

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 = 5x^3(x - 2\frac{2}{5})$$

$$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 = 20x^2(x - 1\frac{4}{5})$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 72x$$

$$F(x) = \int (x^5 - 3x^4)dx = \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^5] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^5] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^5 - 3 \cdot (-x)^4$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^5 - 3x^4 = 0$$

$$x^4(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x - 3 = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad / + 3$$

$$x = 3$$

$x_1 = 0$; 4-fache Nullstelle

$x_2 = 3$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichen-tabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
$f(x)$	-	-	+

$x \in]3; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 3[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 = 0$$

$$x^3(5x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 5x - 12 = 0$$

$$5x - 12 = 0 \quad / + 12$$

$$5x = 12 \quad / : 5$$

$$x = \frac{12}{5}$$

$$x = 2\frac{2}{5}$$

$x_3 = 0$; 3-fache Nullstelle

$x_4 = 2\frac{2}{5}$; 1-fache Nullstelle

$$f''(0) = 0$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow$$

Extremwert:(0/0)

$$f''(2\frac{2}{5}) = 69\frac{3}{25} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(2\frac{2}{5} / -19,907)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	$0 < x < 2\frac{2}{5}$	$2\frac{2}{5} < x$
$f'(x)$	+	-	+

$x \in]-\infty; 0[\cup]2\frac{2}{5}; \infty[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]0; 2\frac{2}{5}[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 = 0$$

$$x^2(20x - 36) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 20x - 36 = 0$$

$$20x - 36 = 0 \quad / + 36$$

$$20x = 36 \quad / : 20$$

$$x = \frac{36}{20}$$

$$x = 1\frac{4}{5}$$

$$x_5 = 0; \quad \underline{\text{2-fache Nullstelle}}$$

$$x_6 = 1\frac{4}{5}; \quad \underline{\text{1-fache Nullstelle}}$$

$$f'''(1\frac{4}{5}) = -12,597$$

$$f'''(1\frac{4}{5}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Wendepunkt: } (1\frac{4}{5} / -12,597)}$$

• Krümmung

	$x <$	0	$< x <$	$1\frac{4}{5}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$$\underline{x \in]1\frac{4}{5}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$$

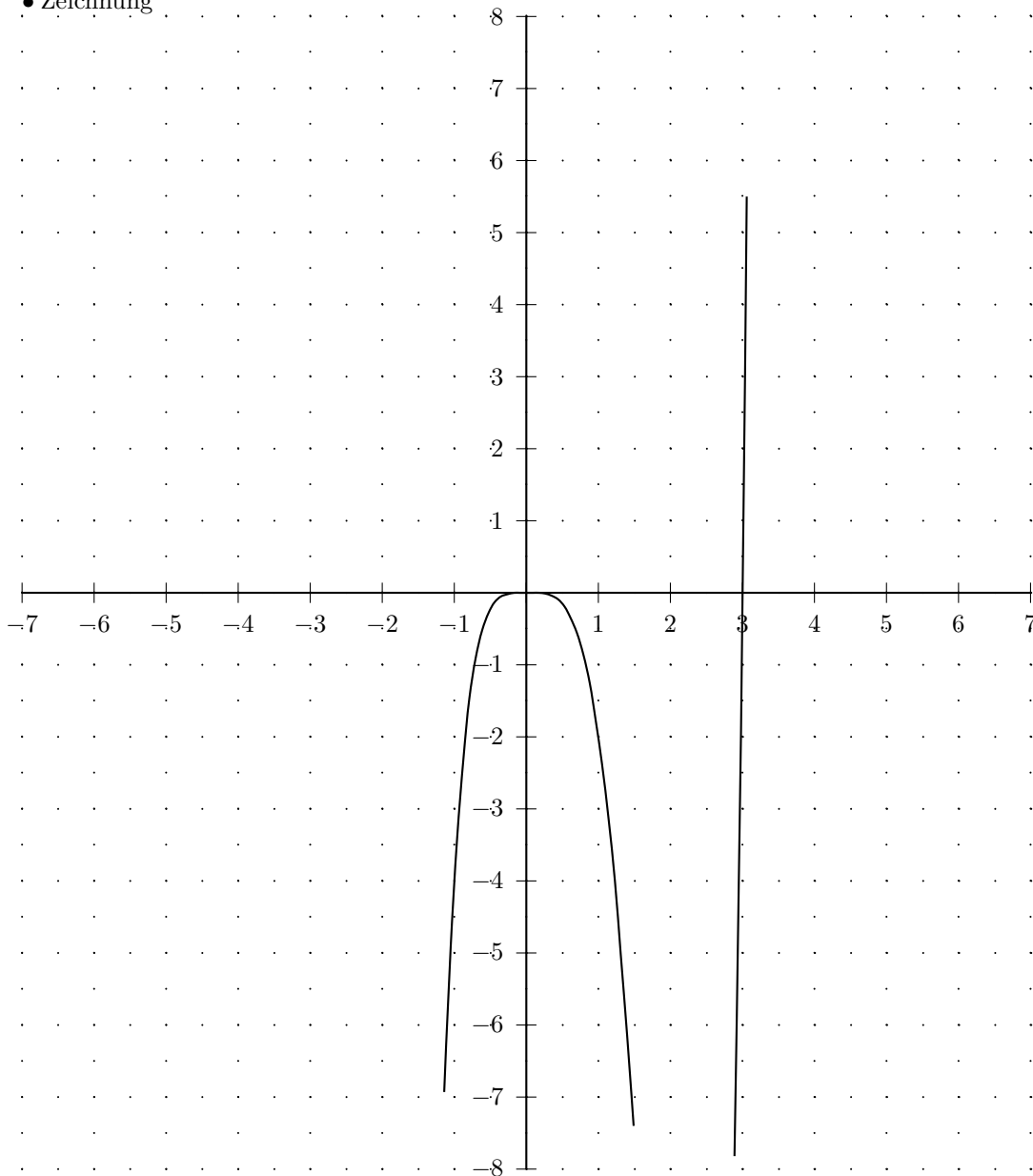
$$\underline{x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1\frac{4}{5}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-24010	16121,176	-8624,023	29692,367
$-6\frac{1}{2}$	$-16958\frac{3}{32}$	12220,966	-7013,522	19531,559
-6	-11664	9072,132	-5616,02	12441,6
$-5\frac{1}{2}$	$-7778\frac{1}{32}$	6571,925	-4416,519	7633,146
-5	-5000	4625,095	-3400,017	4479,167
$-4\frac{1}{2}$	$-3075\frac{15}{32}$	3143,891	-2551,516	2491,13
-4	-1792	2048,064	-1856,014	1297,067
$-3\frac{1}{2}$	$-975\frac{13}{32}$	1264,863	-1298,513	621,509
-3	-486	729,039	-864,011	267,3
$-2\frac{1}{2}$	$-214\frac{27}{32}$	382,841	-537,509	99,284
-2	-80	176,02	-304,008	$29\frac{13}{15}$
$-1\frac{1}{2}$	$-22\frac{25}{32}$	65,825	-148,506	6,455
-1	-4	17,007	-56,005	$\frac{23}{30}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{32}$	1,815	-11,503	0,021
0	0	0	-0,002	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	-0,002	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{32}$	-1,189	-6,5	-0,016
1	-2	-7,001	-15,999	$-\frac{13}{30}$
$1\frac{1}{2}$	$-7\frac{19}{32}$	-15,186	-13,497	-2,658
2	-16	-15,995	16,004	$-8\frac{8}{15}$
$2\frac{1}{2}$	$-19\frac{17}{32}$	7,822	87,506	-17,904
3	0	81,017	216,007	-24,3
$3\frac{1}{2}$	$75\frac{1}{32}$	235,837	416,509	-8,754
4	256	512,034	704,01	68,267
$4\frac{1}{2}$	$615\frac{3}{32}$	956,858	1093,512	$276\frac{61}{77}$
5	1250	1625,058	1600,013	729,167
$5\frac{1}{2}$	$2287\frac{21}{32}$	2578,885	2238,515	1593,734
6	3888	3888,088	3024,017	3110,4
$6\frac{1}{2}$	$6247\frac{23}{32}$	5629,918	3971,518	5608,072
7	9604	7889,124	5096,02	9523,967

• Zeichnung



Aufgabe (4)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x = 2(x+1)x(x^2 + \frac{1}{2})(x-2)$$

$$f'(x) = 10x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 2x - 2 = 10(x^2 + 0,039x + 0,189)(x + 0,691)(x - 1,53)$$

$$f''(x) = 40x^3 - 24x^2 - 18x - 2 = 40(x + 0,319)(x + 0,147)(x - 1,066)$$

$$f'''(x) = 120x^2 - 48x - 18$$

$$F(x) = \int (2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}x^6 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [2 \cdot \infty^5] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [2 \cdot (-\infty)^5] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 2 \cdot (-x)^5 - 2 \cdot (-x)^4 - 3 \cdot (-x)^3 - 1 \cdot (-x)^2 - 2 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2 = 0$$

$$2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{r} (2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2) : (x + 1) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2 \\ \underline{-(2x^4 + 2x^3)} \\ -4x^3 - 3x^2 - x - 2 \\ \underline{-(-4x^3 - 4x^2)} \\ x^2 - x - 2 \\ \underline{-(x^2 + x)} \\ -2x - 2 \\ \underline{-(-2x - 2)} \\ 0 \end{array}$$

$$2x^3 - 4x^2 + x - 2 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: 2

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) : (x - 2) = 2x^2 + 1 \\ \underline{-(2x^3 - 4x^2)} \\ x - 2 \\ \underline{-(x - 2)} \\ 0 \end{array}$$

$$2x^2 + 1 = 0 \quad / -1$$

$$2x^2 = -1 \quad / : 2$$

$$x^2 = \frac{-1}{2}$$

keine Lösung

$$x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$x \in]-1; 0[\cup]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in]-\infty; -1[\cup]0; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 10x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$10x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 2x - 2$$

NumerischeSuche :

$$x_4 = -0,691; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 1,53; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-0,691) = -14,198$$

$$f''(-0,691) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(-0,691/1,123)$$

$$f''(1,53) = 57,484 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(1,53/-10,337)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-0,691$	$< x <$	$1,53$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; -0,691[\cup]1,53; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-0,691; 1,53[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 40x^3 - 24x^2 - 18x - 2 = 0$$

$$40x^3 - 24x^2 - 18x - 2 = 0$$

NumerischeSuche :

$$x_6 = -0,319; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_7 = -0,147; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_8 = 1,066; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-0,319) = 0,607$$

$$f'''(-0,319) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(-0,319/0,607)$$

$$f'''(-0,147) = 0,281$$

$$f'''(-0,147) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(-0,147/0,281)$$

$$f'''(1,066) = -6,733$$

$$f'''(1,066) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(1,066/-6,733)$$

• Krümmung

	$x <$	$-0,319$	$< x <$	$-0,147$	$< x <$	$1,066$	$< x$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$x \in]-0,319; -0,147[\cup]1,066; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

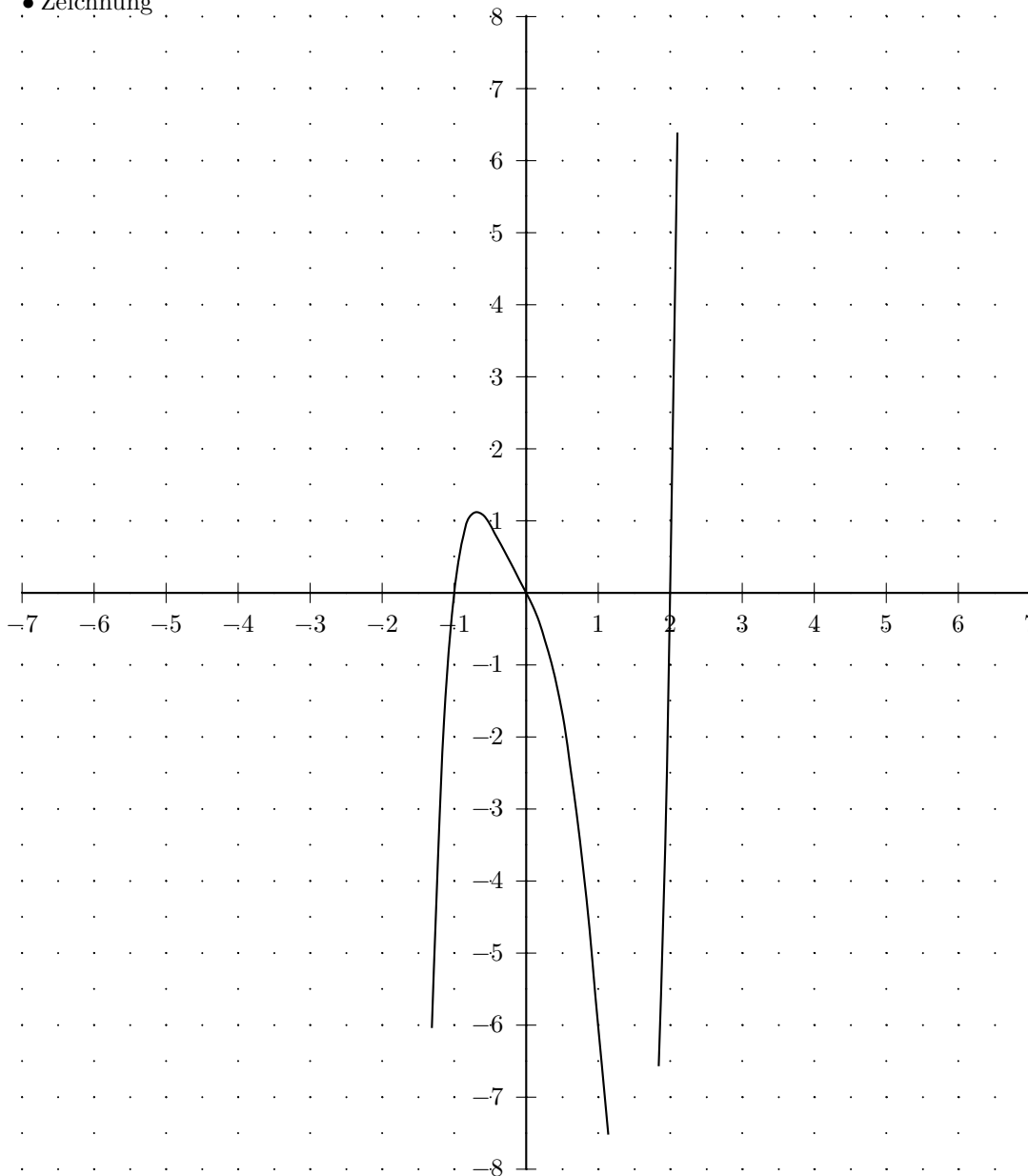
$$x \in]-\infty; -0,319[\cup]-0,147; 1,066[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-37422	26325,316	-14772,044	44203,717
$-6\frac{1}{2}$	$-25981\frac{5}{16}$	19678,649	-11884,041	28491,288
-6	-17520	14374,234	-9398 $\frac{3}{79}$	17726,4
$-5\frac{1}{2}$	$-11415\frac{15}{16}$	10218,573	-7284,035	10578,929
-5	-7140	7033,164	-5512,032	6006,25
$-4\frac{1}{2}$	$-4248\frac{9}{16}$	4654,509	-4052,029	3208,613
-4	-2376	2934,107	-2874,026	1588,267
$-3\frac{1}{2}$	$-1227\frac{3}{16}$	1738,458	-1948,023	712,338
-3	-570	949,062	-1244,02	279,45
$-2\frac{1}{2}$	$-227\frac{13}{16}$	462,418	-732,017	90,104
-2	-72	190,028	-382,013	$20\frac{4}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$-14\frac{7}{16}$	58,392	-164,01	$1\frac{73}{80}$
-1	0	9,008	-48,007	$-\frac{41}{60}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$	-1,623	-4,004	$-\frac{19}{80}$
0	0	-2,001	-2,001	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-2,001	-2,001	0
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{11}{16}$	-5,626	-11,998	-0,346
1	-6	-10,997	-3,995	$-2\frac{3}{20}$
$1\frac{1}{2}$	$-10\frac{5}{16}$	-1,616	52,008	$-6\frac{33}{80}$
2	0	54,019	186,011	$-10\frac{2}{15}$
$2\frac{1}{2}$	$59\frac{1}{16}$	202,406	428,014	1,563
3	228	505,047	808,017	67,05
$3\frac{1}{2}$	$602\frac{7}{16}$	1038,441	1356,02	263,579
4	1320	1894,087	2102,023	726,4
$4\frac{1}{2}$	$2567\frac{13}{16}$	3178,487	3076,026	1671,638
5	4590	5013,14	4308,029	3422,917
$5\frac{1}{2}$	$7695\frac{3}{16}$	7534,546	5828,032	6441,738
6	12264	10894,205	7666,036	11361,6
$6\frac{1}{2}$	$18756\frac{9}{16}$	15258,617	9852,039	19025,88
7	27720	20809,282	12416,042	30529,451

• Zeichnung



Aufgabe (5)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^5 - 10x^3 + 9x = (x + 3)(x + 1)x(x - 1)(x - 3)$$

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 9 = 5(x + 2,384)(x + 0,563)(x - 0,563)(x - 2,384)$$

$$f''(x) = 20x^3 - 60x = 20(x + 1,732)x(x - 1,732)$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 60$$

$$F(x) = \int (x^5 - 10x^3 + 9x)dx = \frac{1}{6}x^6 - 2\frac{1}{2}x^4 + 4\frac{1}{2}x^2 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^5] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^5] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^5 - 10 \cdot (-x)^3 + 9 \cdot (-x)$$

$$f(-x) = -(1 \cdot x^5 - 10 \cdot x^3 + 9 \cdot x)$$

$$f(-x) = -f(x) \rightarrow \text{Symmetrie zum Ursprung:}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^5 - 10x^3 + 9x = 0$$

$$x(x^4 - 10x^2 + 9) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$1u^2 - 10u + 9 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$u_{1/2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$u_1 = \frac{10 + 8}{2} \quad u_2 = \frac{10 - 8}{2}$$

$$u_1 = 9 \quad u_2 = 1$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$x_1 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	1	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in] - 3; -(\cup] 0; 1[\cup] 3; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - \infty; -3[\cup] - 1; 0[\cup] 1; 3[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 9 = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$5u^2 - 30u + 9 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9}}{2 \cdot 5}$$

$$u_{1/2} = \frac{+30 \pm \sqrt{720}}{10}$$

$$u_{1/2} = \frac{30 \pm 26,833}{10}$$

$$u_1 = \frac{30 + 26,833}{10} \quad u_2 = \frac{30 - 26,833}{10}$$

$$u_1 = 5,683 \quad u_2 = 0,317$$

$$x^2 = 5,683$$

$$x = \pm\sqrt{5,683}$$

$$x_1 = 2,384 \quad x_2 = -2,384$$

$$x^2 = 0,317$$

$$x = \pm\sqrt{0,317}$$

$$x_1 = 0,563 \quad x_2 = -0,563$$

$$x_6 = -2,384; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_7 = -0,563; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_8 = 0,563; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_9 = 2,384; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-2,384) = -127,937$$

$$f''(-2,384) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(-2,384/37,03)$$

$$f''(-0,563) = 30,202 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(-0,563/-3,339)$$

$$f''(0,563) = -30,202$$

$$f''(0,563) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(0,563/3,339)$$

$$f''(2,384) = 127,937 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(2,384/-37,03)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,384$	$< x <$	$-0,563$	$< x <$	$0,563$	$< x <$	$2,384$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; -2,384[\cup]-0,563; 0,563[\cup]2,384; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

$x \in]-2,384; -0,563[\cup]0,563; 2,384[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 20x^3 - 60x = 0$$

$$x(20x^2 - 60) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 20x^2 - 60 = 0$$

$$20x^2 - 60 = 0 \quad / + 60$$

$$20x^2 = 60 \quad / : 20$$

$$x^2 = \frac{60}{20}$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

$$x_1 = 1,732 \quad x_2 = -1,732$$

$$x_{10} = -1,732; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_{11} = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_{12} = 1,732; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-1,732) = 20,785$$

$$f'''(-1,732) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(-1,732/20,785)$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(0/0)$$

$$f'''(1,732) = -20,785$$

$$f'''(1,732) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(1,732/-20,785)$$

• Krümmung

	$x <$	$-1,732$	$< x <$	0	$< x <$	$1,732$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-1,732; 0[\cup]1,732; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

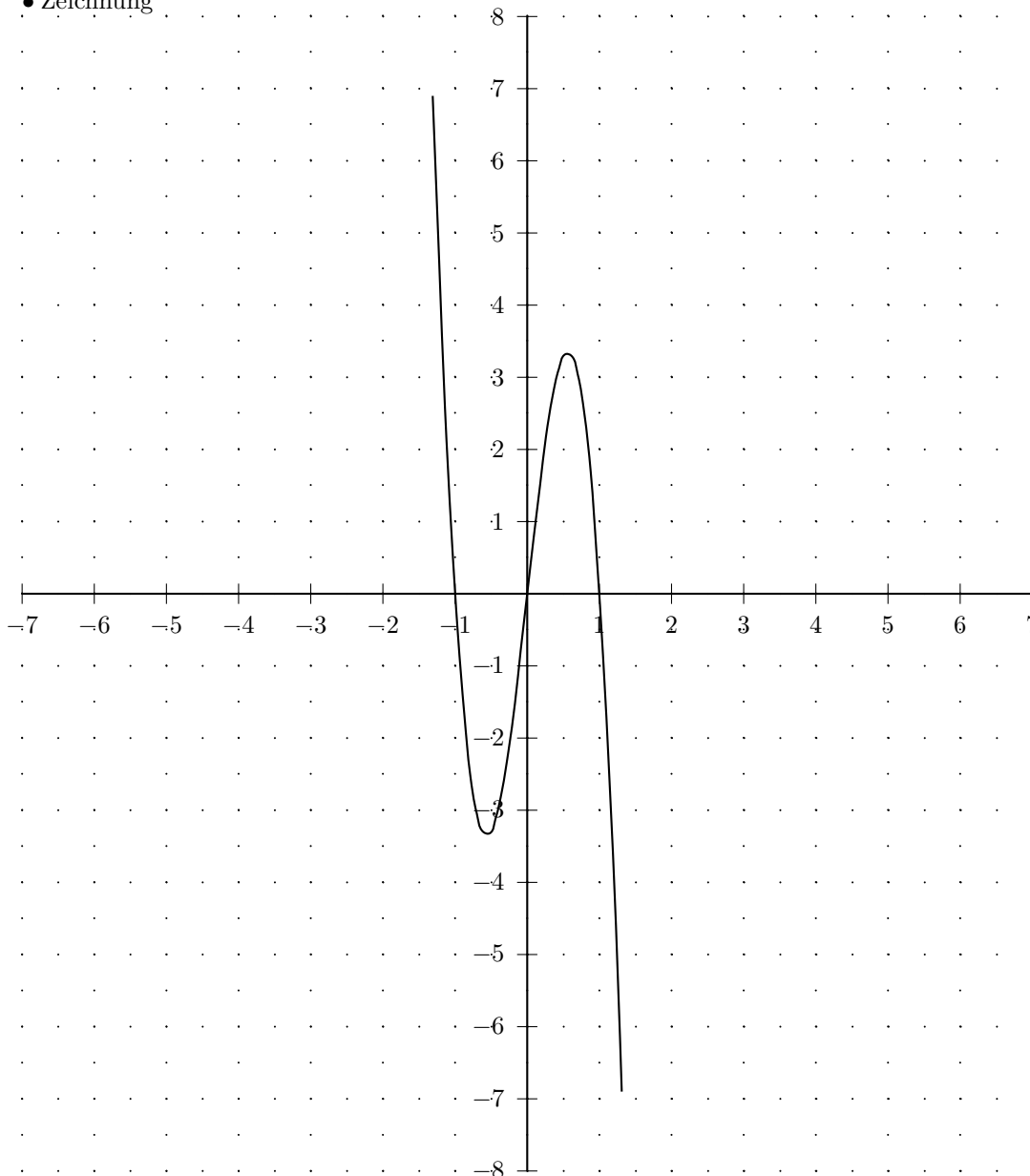
$x \in]-\infty; -1,732[\cup]0; 1,732[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-13440	10544,147	-6440,021	13826,167
$-6\frac{1}{2}$	$-8915\frac{5}{32}$	7666,939	-5102,52	8297,284
-6	-5670	5409,107	-3960,018	4698
$-5\frac{1}{2}$	$-3418\frac{19}{32}$	3676,902	-2997,517	2461,909
-5	-1920	2384,074	-2200,015	1154,167
$-4\frac{1}{2}$	$-974\frac{17}{32}$	1451,871	-1552,514	449,93
-4	-420	809,046	-1040,012	114,667
$-3\frac{1}{2}$	$-127\frac{31}{32}$	391,847	-647,511	-13,654
-3	0	144,025	-360,009	-40,5
$-2\frac{1}{2}$	$36\frac{3}{32}$	16,829	-162,508	-28,841
-2	30	-30,991	-40,006	$-11\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$12\frac{21}{32}$	-33,184	22,495	-0,633
-1	0	-16	39,997	$2\frac{1}{6}$
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{9}{32}$	1,81	27,498	0,971
0	0	8,997	0	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	8,997	0	0
$\frac{1}{2}$	$3\frac{9}{32}$	1,81	-27,498	0,971
1	0	-16	-39,997	$2\frac{1}{6}$
$1\frac{1}{2}$	$-12\frac{21}{32}$	-33,184	-22,495	-0,633
2	-30	-30,991	40,006	$-11\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$-36\frac{3}{32}$	16,829	162,508	-28,841
3	0	144,025	360,009	-40,5
$3\frac{1}{2}$	$127\frac{31}{32}$	391,847	647,511	-13,654
4	420	809,046	1040,012	114,667
$4\frac{1}{2}$	$974\frac{17}{32}$	1451,871	1552,514	449,93
5	1920	2384,074	2200,015	1154,167
$5\frac{1}{2}$	$3418\frac{19}{32}$	3676,902	2997,517	2461,909
6	5670	5409,107	3960,018	4698
$6\frac{1}{2}$	$8915\frac{5}{32}$	7666,939	5102,52	8297,284
7	13440	10544,147	6440,021	13826,167

• Zeichnung



Aufgabe (6)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 1, 587x + 2, 52)(x + 1, 587)x^2$$

$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 + 4x = 2\frac{1}{2}(x^2 - 1, 17x + 1, 368)(x + 1, 17)x$$

$$f''(x) = 10x^3 + 4 = 10(x^2 - 0, 737x + 0, 543)(x + 0, 737)$$

$$f'''(x) = 30x^2$$

$$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^5 + 2x^2)dx = \frac{1}{12}x^6 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^5] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^5] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^5 + 2 \cdot (-x)^2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x^2 = 0$$

$$x^2(\frac{1}{2}x^3 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^3 + 2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^3 + 2 = 0 \quad \frac{1}{2}x^3 + 2 = 0 \quad / -2$$

$$\frac{1}{2}x^3 = -2 \quad / : \frac{1}{2}$$

$$x^3 = \frac{-2}{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{-4}$$

$$x = -1, 587$$

Polynomdivision: $(-1, 587)$

$$\begin{array}{r} (\frac{1}{2}x^3 \quad \quad \quad +2) : (x + 1, 587) = \frac{1}{2}x^2 - 0, 794x + 1, 26 \\ -(\frac{1}{2}x^3 \quad +0, 794x^2) \\ \hline \quad -0, 794x^2 \quad \quad \quad +2 \\ \quad -(-0, 794x^2 \quad -1, 26x) \\ \hline \quad \quad \quad 1, 26x \quad +2 \\ \quad \quad \quad -(1, 26x \quad +2) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 0, 794x + 1, 26 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+0, 794 \pm \sqrt{(-0, 794)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1, 26}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+0, 794 \pm \sqrt{-1, 89}}{1}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$$x_1 = -1, 587; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{2\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1, 587$	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$$x \in] -1, 587; 0[\cup] 0; \infty[\quad \underline{f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$$

$$x \in] -\infty; -1, 587[\quad \underline{f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 + 4x = 0$$

$$x(2\frac{1}{2}x^3 + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2\frac{1}{2}x^3 + 4 = 0$$

$$2\frac{1}{2}x^3 + 4 = 0 \quad / -4$$

$$2\frac{1}{2}x^3 = -4 \quad / : 2\frac{1}{2}$$

$$x^3 = \frac{-4}{2\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{-1\frac{3}{5}}$$

$$x = -1, 17$$

Polynomdivision: $(-1, 17)$

$$\begin{array}{r} (2\frac{1}{2}x^3) : (x + 1, 17) = 2\frac{1}{2}x^2 - 2,924x + 3,42 \\ -(2\frac{1}{2}x^3) \\ \hline \phantom{2\frac{1}{2}x^3} + 2,924x^2 \\ \phantom{2\frac{1}{2}x^3} - 2,924x^2 \\ \hline \phantom{2\frac{1}{2}x^3} - 3,42x \\ \phantom{2\frac{1}{2}x^3} \\ \hline \phantom{2\frac{1}{2}x^3} + 4 \\ \phantom{2\frac{1}{2}x^3} - (3,42x + 4) \\ \hline \phantom{2\frac{1}{2}x^3} \\ \phantom{2\frac{1}{2}x^3} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2\frac{1}{2}x^2 - 2,924x + 3,42 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+2,924 \pm \sqrt{(-2,924)^2 - 4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 3,42}}{2 \cdot 2\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2,924 \pm \sqrt{-25,65}}{5}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$$x_3 = -1, 17; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-1, 17) = -12$$

$$f''(-1, 17) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1, 17/1, 642)$$

$$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (0/0)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -1, 17$	$-1, 17 < x < 0$	$0 < x$
$f'(x)$	+	0	-

$$x \in] - \infty; -1, 17[\cup] 0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in] -1, 17; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = 10x^3 + 4 = 0$$

$$10x^3 + 4 = 0 \quad / -4$$

$$10x^3 = -4 \quad / : 10$$

$$x^3 = \frac{-4}{10}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{2}{5}}$$

$$x = -0, 737$$

Polynomdivision: $(-0, 737)$

$$\begin{array}{r} (10x^3) : (x + 0, 737) = 10x^2 - 7,368x + 5,429 \\ -(10x^3) \\ \hline + 7,368x^2 \\ - 7,368x^2 \\ \hline - 5,429x \\ \\ \hline + 4 \\ - (5,429x + 4) \\ \hline \\ \\ \hline 0 \end{array}$$

$$10x^2 - 7,368x + 5,429 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+7,368 \pm \sqrt{(-7,368)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 5,429}}{2 \cdot 10}$$

$$x_{1/2} = \frac{+7,368 \pm \sqrt{-162,865}}{20}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$$x_5 = -0,737; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-0,737) = 0,977$$

$$f'''(-0,737) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(-0,737/0,977)$

• Krümmung

	$x <$	$-0,737$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in] -0,737; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

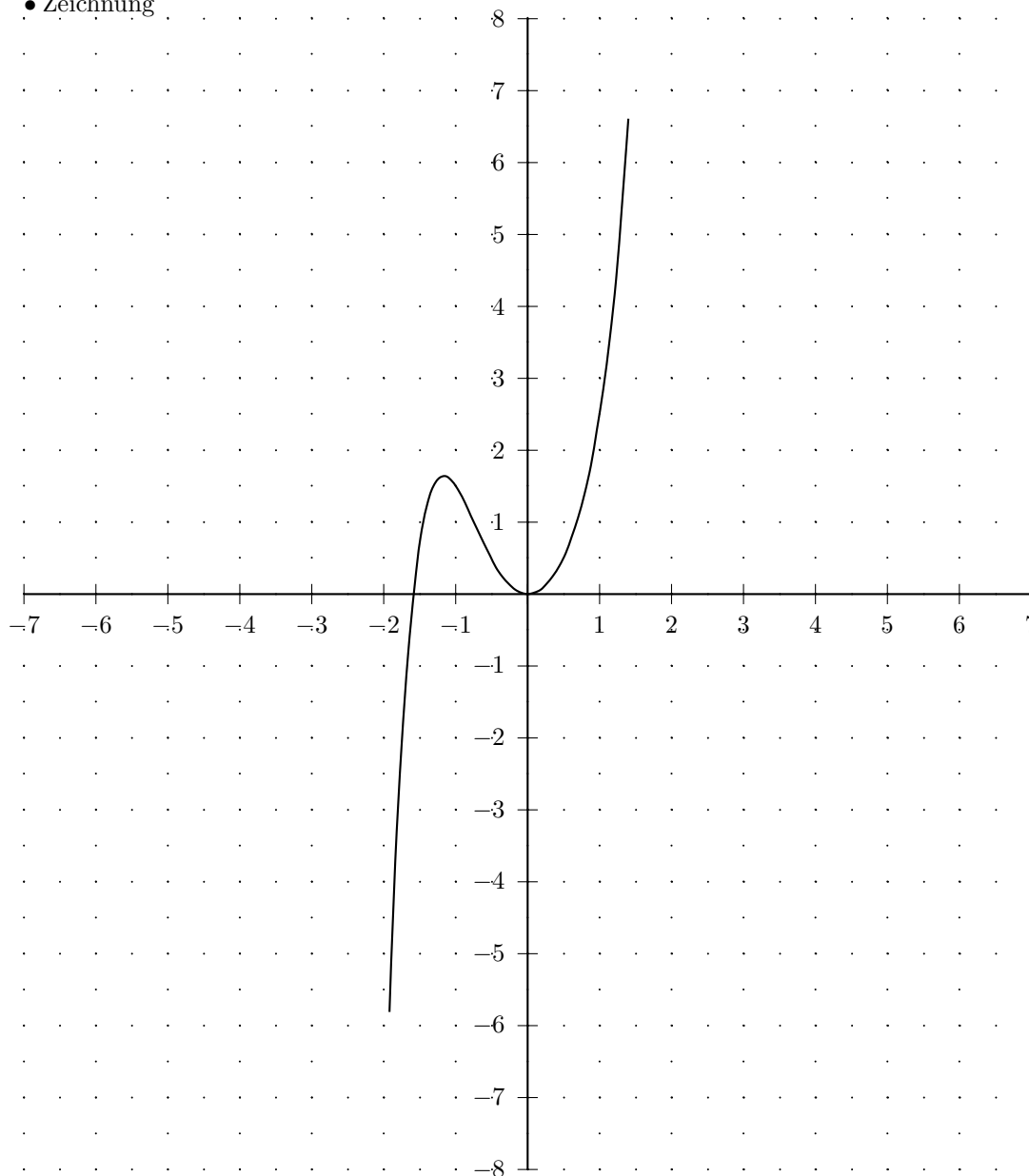
$x \in] -\infty; -0,737[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-8305 $\frac{1}{2}$	5974,575	-3426,011	9575,417
-6 $\frac{1}{2}$	-5716 $\frac{61}{64}$	4436,721	-2742,26	6101,824
-6	-3816	3216,055	-2156,009	3744
-5 $\frac{1}{2}$	-2455 $\frac{59}{64}$	2265,703	-1659,758	2195,803
-5	-1512 $\frac{1}{2}$	1542,538	-1246,008	1218,75
-4 $\frac{1}{2}$	-882 $\frac{9}{64}$	1007,187	-907,257	631,23
-4	-480	624,025	-636,006	298,667
-3 $\frac{1}{2}$	-238 $\frac{7}{64}$	361,175	-424,755	124,605
-3	-103 $\frac{1}{2}$	190,514	-266,005	42,75
-2 $\frac{1}{2}$	-36 $\frac{21}{64}$	87,666	-152,254	9,928
-2	-8	32,006	-76,003	0
-1 $\frac{1}{2}$	$\frac{45}{64}$	6,66	-29,752	-1,301
-1	1 $\frac{1}{2}$	-1,498	-6,002	- $\frac{7}{12}$
- $\frac{1}{2}$	$\frac{31}{64}$	-1,843	2,749	-0,082
0	0	0	4	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	4	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{33}{64}$	2,157	5,251	0,085
1	2 $\frac{1}{2}$	6,502	14,002	$\frac{3}{4}$
1 $\frac{1}{2}$	8 $\frac{19}{64}$	18,66	37,752	3,199
2	24	48,006	84,003	10 $\frac{2}{3}$
2 $\frac{1}{2}$	61 $\frac{21}{64}$	107,666	160,254	30,762
3	139 $\frac{1}{2}$	214,514	274,005	78,75
3 $\frac{1}{2}$	287 $\frac{7}{64}$	389,175	432,755	181,772
4	544	656,025	644,006	384
4 $\frac{1}{2}$	963 $\frac{9}{64}$	1043,187	915,257	752,73
5	1612 $\frac{1}{2}$	1582,538	1254,008	1385,417
5 $\frac{1}{2}$	2576 $\frac{59}{64}$	2309,703	1667,758	2417,637
6	3960	3264,055	2164,009	4032
6 $\frac{1}{2}$	5885 $\frac{61}{64}$	4488,721	2750,26	6467,991
7	8501 $\frac{1}{2}$	6030,575	3434,011	10032,75

• Zeichnung



Aufgabe (7)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^5 + 2x^3 = -\frac{1}{6}(x + 3,464)x^3(x - 3,464)$$

$$f'(x) = -\frac{5}{6}x^4 + 6x^2 = -\frac{5}{6}(x + 2,683)x^2(x - 2,683)$$

$$f''(x) = -3\frac{1}{3}x^3 + 12x = -3\frac{1}{3}(x + 1,897)x(x - 1,897)$$

$$f'''(x) = -10x^2 + 12$$

$$F(x) = \int(-\frac{1}{6}x^5 + 2x^3)dx = -\frac{1}{36}x^6 + \frac{1}{2}x^4 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{6} \cdot \infty^5] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{6} \cdot (-\infty)^5] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{6} \cdot (-x)^5 + 2 \cdot (-x)^3$$

$$f(-x) = -(-\frac{1}{6} \cdot x^5 + 2 \cdot x^3)$$

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^5 + 2x^3 = 0$$

$$x^3(-\frac{1}{6}x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{6}x^2 + 2 = 0$$

$$-\frac{1}{6}x^2 + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-\frac{1}{6}x^2 = -2 \quad / : (-\frac{1}{6})$$

$$x^2 = \frac{-2}{-\frac{1}{6}}$$

$$x = \pm\sqrt{12}$$

$$x_1 = 3,464 \quad x_2 = -3,464$$

$$x_1 = -3,464; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_2 = 0; \quad \underline{3\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_3 = 3,464; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,464$	$< x <$	0	$< x <$	$3,464$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3,464[\cup]0; 3,464[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-3,464; 0[\cup]3,464; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{5}{6}x^4 + 6x^2 = 0$$

$$x^2(-\frac{5}{6}x^2 + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{5}{6}x^2 + 6 = 0$$

$$-\frac{5}{6}x^2 + 6 = 0 \quad / -6$$

$$-\frac{5}{6}x^2 = -6 \quad / : (-\frac{5}{6})$$

$$x^2 = \frac{-6}{-\frac{5}{6}}$$

$$x = \pm\sqrt{7\frac{1}{5}}$$

$$x_1 = 2,683 \quad x_2 = -2,683$$

$$x_4 = -2,683; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_5 = 0; \quad \underline{2\text{-fache Nullstelle}}$$

$$x_6 = 2,683; \quad \underline{1\text{-fache Nullstelle}}$$

$$f'''(-2,683) = 32,199 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt: } (-2,683 / -15,456)}$$

$$f''(0) = 0$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow$$

Terrassenpunkt: (0/0)

$$f''(2,683) = -32,199$$

$$f''(2,683) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (2,683/15,456)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,683$	$< x <$	0	$< x <$	$2,683$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$$x \in]-2,683; 0[\cup]0; 2,683[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; -2,683[\cup]2,683; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -3\frac{1}{3}x^3 + 12x = 0$$

$$x(-3\frac{1}{3}x^2 + 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -3\frac{1}{3}x^2 + 12 = 0$$

$$-3\frac{1}{3}x^2 + 12 = 0 \quad / -12$$

$$-3\frac{1}{3}x^2 = -12 \quad / : \left(-3\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 = \frac{-12}{-3\frac{1}{3}}$$

$$x = \pm \sqrt{3\frac{3}{5}}$$

$$x_1 = 1,897 \quad x_2 = -1,897$$

$$x_7 = -1,897; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_8 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_9 = 1,897; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-1,897) = -9,563$$

$$f'''(-1,897) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (-1,897 / -9,563)$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (0/0)$$

$$f'''(1,897) = 9,563$$

$$f'''(1,897) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (1,897/9,563)$$

- Krümmung

	$x <$	$-1,897$	$< x <$	0	$< x <$	$1,897$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x \in]-\infty; -1,897[\cup]0; 1,897[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

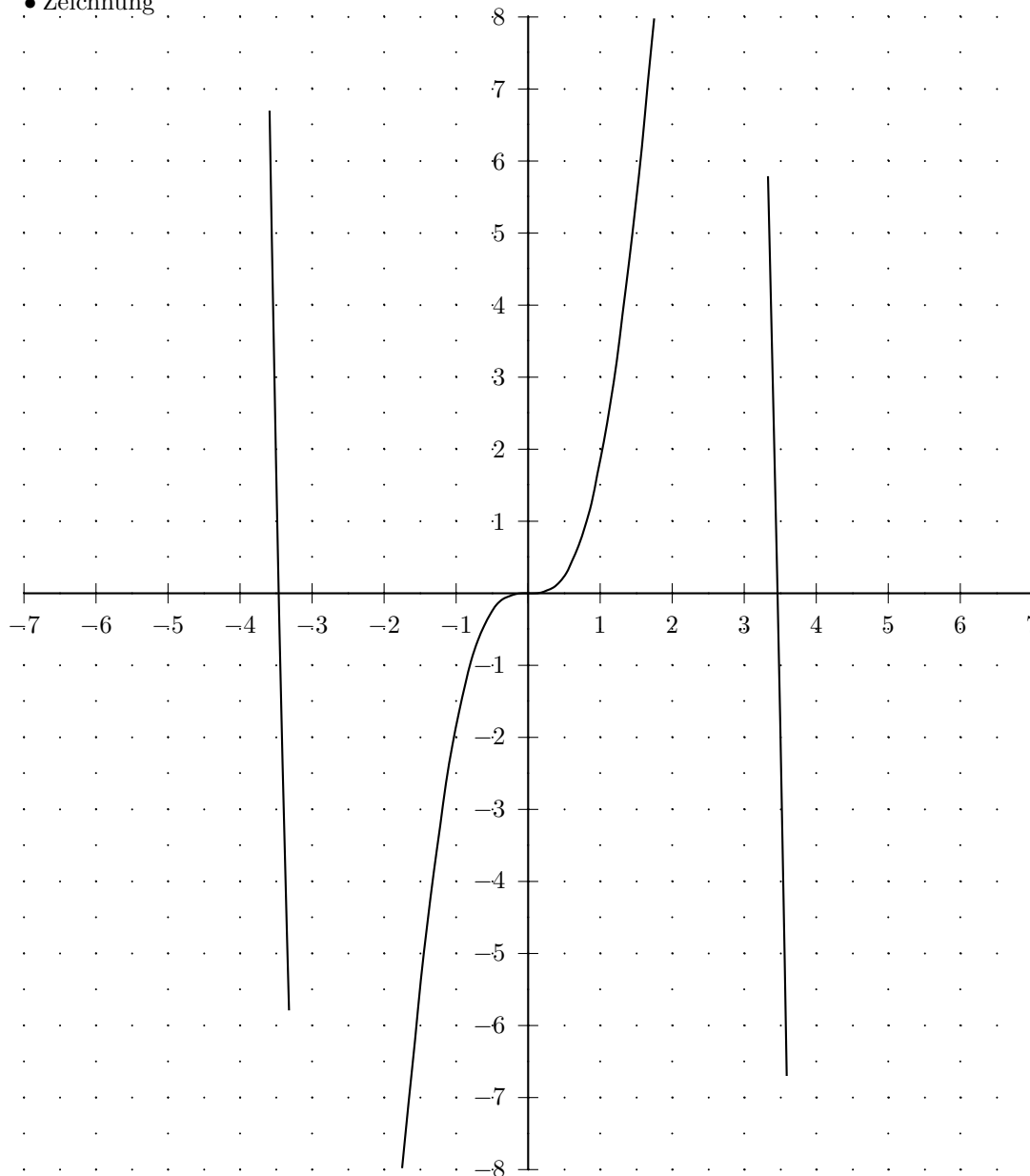
$$x \in]-1,897; 0[\cup]1,897; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	$2115\frac{1}{6}$	-1706,858	1059,337	-2067,528
$-6\frac{1}{2}$	1384,568	-1234,073	837,42	-1202,438
-6	864	-864,018	648,003	-648
$-5\frac{1}{2}$	506,057	-581,067	488,586	-311,375
-5	$270\frac{5}{6}$	-370,845	356,669	-121,528
$-4\frac{1}{2}$	$125\frac{19}{64}$	-220,228	249,752	-25,629
-4	$42\frac{2}{3}$	-117,341	165,335	14,222
$-3\frac{1}{2}$	1,786	-51,558	100,918	23,968
-3	$-13\frac{1}{2}$	-13,504	54,002	$20\frac{1}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	-14,974	4,945	22,085	12,75
-2	$-10\frac{2}{3}$	10,665	2,668	$6\frac{2}{9}$
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{31}{64}$	9,281	-6,749	2,215
-1	$-1\frac{5}{6}$	5,167	-8,666	$\frac{17}{36}$
$-\frac{1}{2}$	-0,245	1,448	-5,583	0,031
0	0	0,001	0	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0,001	0	0
$\frac{1}{2}$	0,245	1,448	5,583	0,031
1	$1\frac{5}{6}$	5,167	8,666	$\frac{17}{36}$
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{31}{64}$	9,281	6,749	2,215
2	$10\frac{2}{3}$	10,665	-2,668	$6\frac{2}{9}$
$2\frac{1}{2}$	14,974	4,945	-22,085	12,75
3	$13\frac{1}{2}$	-13,504	-54,002	$20\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$	-1,786	-51,558	-100,918	23,968
4	$-42\frac{2}{3}$	-117,341	-165,335	14,222
$4\frac{1}{2}$	$-125\frac{19}{64}$	-220,228	-249,752	-25,629
5	$-270\frac{5}{6}$	-370,845	-356,669	-121,528
$5\frac{1}{2}$	-506,057	-581,067	-488,586	-311,375
6	-864	-864,018	-648,003	-648
$6\frac{1}{2}$	-1384,568	-1234,073	-837,42	-1202,438
7	$-2115\frac{1}{6}$	-1706,858	-1059,337	-2067,528

• Zeichnung



Aufgabe (8)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^5 - 3x^4 + 5x^3 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 10)x^3$$

$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 - 12x^3 + 15x^2 = 2\frac{1}{2}(x^2 - 4\frac{4}{5}x + 6)x^2$$

$$f''(x) = 10x^3 - 36x^2 + 30x = 10x(x - 1,31)(x - 2,29)$$

$$f'''(x) = 30x^2 - 72x + 30$$

$$F(x) = \int (\frac{1}{2}x^5 - 3x^4 + 5x^3) dx = \frac{1}{12}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + 1\frac{1}{4}x^4 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^5] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^5] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^5 - 3 \cdot (-x)^4 + 5 \cdot (-x)^3$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^5 - 3x^4 + 5x^3 = 0$$

$$x^3(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-1}}{1}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$x_1 = 0$; 3-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 - 12x^3 + 15x^2 = 0$$

$$x^2(2\frac{1}{2}x^2 - 12x + 15) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2\frac{1}{2}x^2 - 12x + 15 = 0$$

$$2\frac{1}{2}x^2 - 12x + 15 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 15}}{2 \cdot 2\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{-6}}{5}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$x_2 = 0$; 2-fache Nullstelle

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = 0 \Rightarrow$$

Terrassenpunkt: (0/0)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 10x^3 - 36x^2 + 30x = 0$$

$$x(10x^2 - 36x + 30) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 10x^2 - 36x + 30 = 0$$

$$10x^2 - 36x + 30 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 30}}{2 \cdot 10}$$

$$x_{1/2} = \frac{+36 \pm \sqrt{96}}{20}$$

$$x_{1/2} = \frac{36 \pm 9,798}{20}$$

$$x_1 = \frac{36 + 9,798}{20} \quad x_2 = \frac{36 - 9,798}{20}$$

$$x_1 = 2,29 \quad x_2 = 1,31$$

$$x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 1,31; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 2,29; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt:(0/0)

$$f'''(1,31) = 4,335$$

$$f'''(1,31) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt:(1,31/4,335)

$$f'''(2,29) = 9,031$$

$$f'''(2,29) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt:(2,29/9,031)

• Krümmung

	$x < 0$	$0 < x < 1,31$	$1,31 < x < 2,29$	$2,29 < x$
$f''(x)$	-	0	+	0

$x \in]0; 1,31[\cup]2,29; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

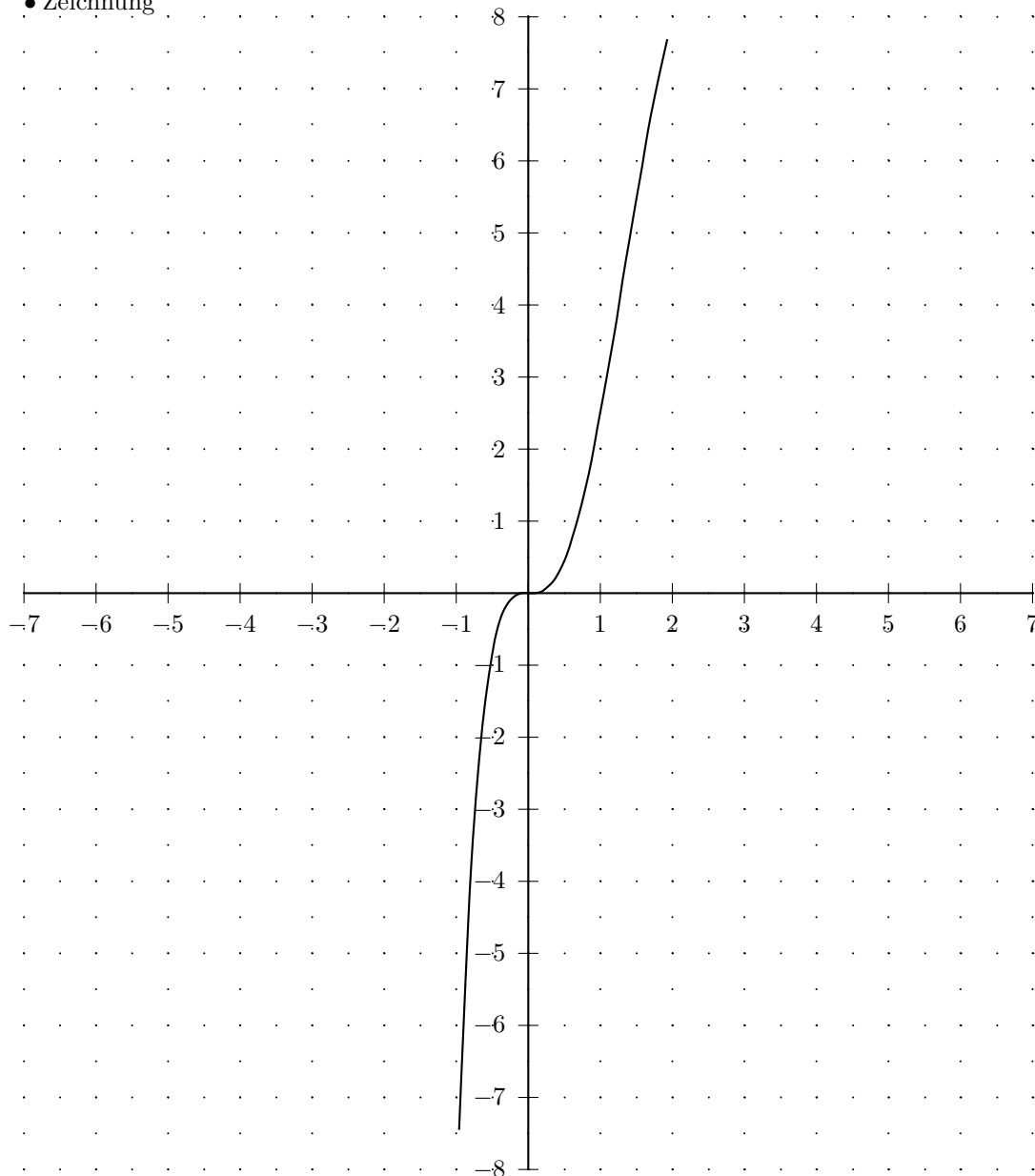
$x \in]-\infty; 0[\cup]1,31; 2,29[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-17321 $\frac{1}{2}$	10853,602	-5404,013	22889,534
-6 $\frac{1}{2}$	-12529 $\frac{49}{64}$	8391,996	-4462,262	15477,98
-6	-8856	6372,079	-3636,011	10173,6
-5 $\frac{1}{2}$	-6093 $\frac{31}{64}$	4737,974	-2917,76	6470,254
-5	-4062 $\frac{1}{2}$	3437,558	-2300,009	3958,333
-4 $\frac{1}{2}$	-2608 $\frac{29}{64}$	2422,455	-1775,259	2311,727
-4	-1600	1648,041	-1336,008	1275,733
-3 $\frac{1}{2}$	-927 $\frac{11}{64}$	1073,439	-974,757	655,898
-3	-499 $\frac{1}{2}$	661,526	-684,006	307,8
-2 $\frac{1}{2}$	-244 $\frac{9}{64}$	378,927	-456,256	127,767
-2	-104	196,015	-284,005	44 $\frac{8}{15}$
-1 $\frac{1}{2}$	-35 $\frac{55}{64}$	86,917	-159,754	11,834
-1	-8 $\frac{1}{2}$	29,507	-76,003	1 $\frac{14}{15}$
- $\frac{1}{2}$	- $\frac{53}{64}$	5,41	-25,253	0,098
0	0	0,002	-0,002	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0,002	-0,002	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{29}{64}$	2,406	7,249	0,061
1	2 $\frac{1}{2}$	5,499	4	$\frac{11}{15}$
1 $\frac{1}{2}$	5 $\frac{31}{64}$	5,906	-2,25	2,721
2	8	4	-3,999	6 $\frac{2}{15}$
2 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{49}{64}$	3 $\frac{89}{98}$	6,252	10,579
3	13 $\frac{1}{2}$	13,504	36,003	16 $\frac{1}{5}$
3 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{51}{64}$	44,414	92,754	25,636
4	64	112,011	184,004	46,933
4 $\frac{1}{2}$	148 $\frac{5}{64}$	235,422	317,255	97,39
5	312 $\frac{1}{2}$	437,521	500,006	208,333
5 $\frac{1}{2}$	603 $\frac{7}{64}$	744,934	739,757	430,842
6	1080	1188,035	1044,007	842,4
6 $\frac{1}{2}$	1819 $\frac{25}{64}$	1800,949	1420,258	1554,492
7	2915 $\frac{1}{2}$	2621,551	1876,009	2721,133

• Zeichnung



Aufgabe (9)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -x^5 + 3x^3 + 2x^2 = -(x+1)^2 x^2 (x-2)$$

$$f'(x) = -5x^4 + 9x^2 + 4x = -5(x+1)(x+0,525)x(x-1,525)$$

$$f''(x) = -20x^3 + 18x + 4 = -20(x+0,808)(x+0,237)(x-1,045)$$

$$f'''(x) = -60x^2 + 18$$

$$F(x) = \int (-x^5 + 3x^3 + 2x^2) dx = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^5] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^5] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -1 \cdot (-x)^5 + 3 \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 0$$

$$x^2(-x^3 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x^3 + 3x + 2 = 0$$

$$-x^3 + 3x + 2 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{r} (-x^3 \quad +3x \quad +2) : (x+1) = -x^2 + x + 2 \\ -(-x^3 \quad -x^2) \\ \hline \quad \quad x^2 \quad +3x \quad +2 \\ \quad \quad - (x^2 \quad +x) \\ \hline \quad \quad \quad \quad 2x \quad +2 \\ \quad \quad \quad \quad - (2x \quad +2) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{-2} \quad x_2 = \frac{-1 - 3}{-2}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

$x_1 = -1$; 2-fache Nullstelle

$x_2 = 0$; 2-fache Nullstelle

$x_3 = 2$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -(\cup] - 1; 0[\cup] 0; 2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]2; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -5x^4 + 9x^2 + 4x = 0$$

$$x(-5x^3 + 9x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -5x^3 + 9x + 4 = 0$$

$$-5x^3 + 9x + 4 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{r}
 (-5x^3 + 9x + 4) : (x + 1) = -5x^2 + 5x + 4 \\
 \underline{-(-5x^3 - 5x^2)} \\
 5x^2 + 9x + 4 \\
 \underline{-(5x^2 + 5x)} \\
 4x + 4 \\
 \underline{-(4x + 4)} \\
 0
 \end{array}$$

$$-5x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 4}}{2 \cdot (-5)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{105}}{-10}$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm 10,247}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 10,247}{-10} \quad x_2 = \frac{-5 - 10,247}{-10}$$

$$x_1 = -0,525 \quad x_2 = 1,525$$

$$x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = -0,525; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_6 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_7 = 1,525; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(-1/0)$$

$$f''(-0,525) = -2,555$$

$$f''(-0,525) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(-0,525/0,157)$$

$$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(0/0)$$

$$f''(1,525) = -39,445$$

$$f''(1,525) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(1,525/7,043)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -1$	$-1 < x < -0,525$	$-0,525 < x < 0$	$0 < x < 1,525$	$x > 1,525$
$f'(x)$	-	+	0	-	+

$$x \in]-1; -0,525[\cup]0; 1,525[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; -1[\cup]-0,525; 0[\cup]1,525; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -20x^3 + 18x + 4 = 0$$

$$-20x^3 + 18x + 4 = 0$$

NumerischeSuche :

$$x_8 = -0,808; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_9 = -0,237; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_{10} = 1,045; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-0,808) = 0,068$$

$$f'''(-0,808) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(-0,808/0,068)$$

$$f'''(-0,237) = 0,073$$

$$f'''(-0,237) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(-0,237/0,073)$$

$$f'''(1,045) = 4,359$$

$$f'''(1,045) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(1,045/4,359)$$

- Krümmung

	$x < -0,808$	$-0,808 < x < -0,237$	$-0,237 < x < 1,045$	$x > 1,045$
$f''(x)$	+	-	+	-

$$x \in]-\infty; -0,808[\cup]-0,237; 1,045[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

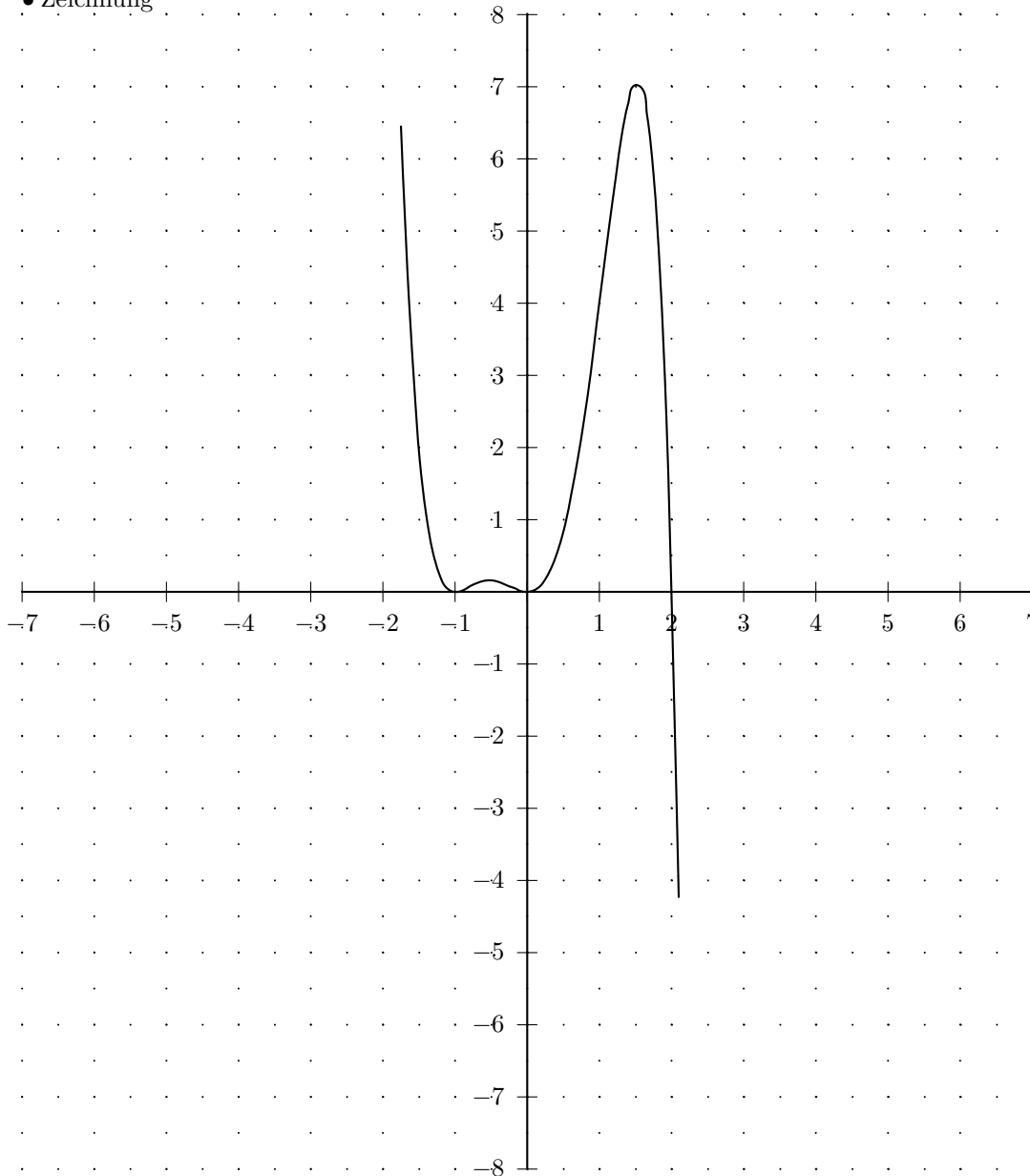
$x \in]-0,808; -0,237[\cup]1,045; \infty[$ $f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	15876	-11592,149	6738,021	-18036,084
$-6\frac{1}{2}$	$10863\frac{17}{32}$	-8571,191	5379,52	-11414,102
-6	7200	-6180,109	4216,018	-6948
$-5\frac{1}{2}$	$4594\frac{7}{32}$	-4325,154	3232,517	-4038,06
-5	2800	-2920,076	2414,015	-2218,75
$-4\frac{1}{2}$	$1612\frac{13}{32}$	-1886,124	1745,514	-1137,164
-4	864	-1152,048	1212,012	-533,333
$-3\frac{1}{2}$	$421\frac{3}{32}$	-654,099	798,511	-222,414
-3	180	-336,027	490,009	-78,75
$-2\frac{1}{2}$	$63\frac{9}{32}$	-149,081	271,508	-21,81
-2	16	-52,011	128,006	-4
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{31}{32}$	-11,068	44,505	-0,352
-1	0	-0,002	6,003	$-\frac{1}{12}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{32}$	-0,062	-2,498	-0,039
0	0	0,001	4	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0,001	4	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{32}$	3,938	10,498	0,128
1	4	7,998	1,997	$1\frac{1}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{32}$	0,932	-36,505	4,148
2	0	-36,011	-120,006	$6\frac{2}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$-38\frac{9}{32}$	-129,081	-263,508	-0,977
3	-144	-312,027	-482,009	-42,75
$3\frac{1}{2}$	$-372\frac{3}{32}$	-626,099	-790,511	-165,247
4	-800	-1120,048	-1204,012	-448
$4\frac{1}{2}$	$-1531\frac{13}{32}$	-1850,124	-1737,514	-1015,664
5	-2700	-2880,076	-2406,015	-2052,083
$5\frac{1}{2}$	$-4473\frac{7}{32}$	-4281,154	-3224,517	-3816,227
6	-7056	-6132,109	-4208,018	-6660
$6\frac{1}{2}$	$-10694\frac{17}{32}$	-8519,191	-5371,52	-11047,935
7	-15680	-11536,149	-6730,021	-17578,75

• Zeichnung



Aufgabe (10)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -x^5 + 3x^4 - 4x^2 = -(x+1)x^2(x-2)^2$$

$$f'(x) = -5x^4 + 12x^3 - 8x = -5(x+0,717)x(x-1,117)(x-2)$$

$$f''(x) = -20x^3 + 36x^2 - 8 = -20(x+0,424)(x-0,57)(x-1,654)$$

$$f'''(x) = -60x^2 + 72x$$

$$F(x) = \int (-x^5 + 3x^4 - 4x^2) dx = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^5] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^5] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -1 \cdot (-x)^5 + 3 \cdot (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -x^5 + 3x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(-x^3 + 3x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$(-x^3$	$+3x^2$	-4	$) : (x+1) = -x^2 + 4x - 4$
$-(-x^3$	$-x^2$		
	$4x^2$	-4	
	$-(4x^2$	$+4x)$	
		$-4x$	-4
		$-(-4x$	$-4)$
			0

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 0}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-4+0}{-2} \quad x_2 = \frac{-4-0}{-2}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2$$

$x_1 = -1$; 1-fache Nullstelle

$x_2 = 0$; 2-fache Nullstelle

$x_3 = 2$; 2-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$

$x \in] - \infty; - (f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - 1; 0[\cup] 0; 2[\cup] 2; \infty[f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -5x^4 + 12x^3 - 8x = 0$$

$$x(-5x^3 + 12x^2 - 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -5x^3 + 12x^2 - 8 = 0$$

$$-5x^3 + 12x^2 - 8 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: 2

$$\begin{array}{r} (-5x^3 + 12x^2 - 8) : (x - 2) = -5x^2 + 2x + 4 \\ \underline{-(-5x^3 + 10x^2)} \\ 2x^2 - 8 \\ \underline{-(2x^2 - 4x)} \\ 4x - 8 \\ \underline{-(4x - 8)} \\ 0 \end{array}$$

$$-5x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 4}}{2 \cdot (-5)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{84}}{-10}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 9,165}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 9,165}{-10} \quad x_2 = \frac{-2 - 9,165}{-10}$$

$$x_1 = -0,717 \quad x_2 = 1,117$$

$$x_4 = -0,717; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_6 = 1,117; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_7 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f''(-0,717) = 17,839 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(-0,717 / -1,074)$$

$$f''(0) = -8$$

$$f''(0) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(0/0)$$

$$f''(1,117) = 9,041 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(1,117 / -2,059)$$

$$f''(2) = -24$$

$$f''(2) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(2/0)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -0,717$	$< x < 0$	$0 < x < 1,117$	$< x < 2$	$< x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

$$x \in]-0,717; 0[\cup]1,117; 2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; -0,717[\cup]0; 1,117[\cup]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -20x^3 + 36x^2 - 8 = 0$$

$$-20x^3 + 36x^2 - 8 = 0$$

NumerischeSuche :

$$x_8 = -0,424; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_9 = 0,57; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_{10} = 1,654; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-0,424) = -0,609$$

$$f'''(-0,424) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(-0,424 / -0,609)$$

$$f'''(0,57) = -1,044$$

$$f'''(0,57) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(0,57 / -1,044)$$

$$f'''(1,654) = -0,87$$

$$f'''(1,654) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt:}(1,654 / -0,87)$$

- Krümmung

	$x < -0,424$	$< x < 0,57$	$< x < 1,654$	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	0

$$x \in]-\infty; -0,424[\cup]0,57; 1,654[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

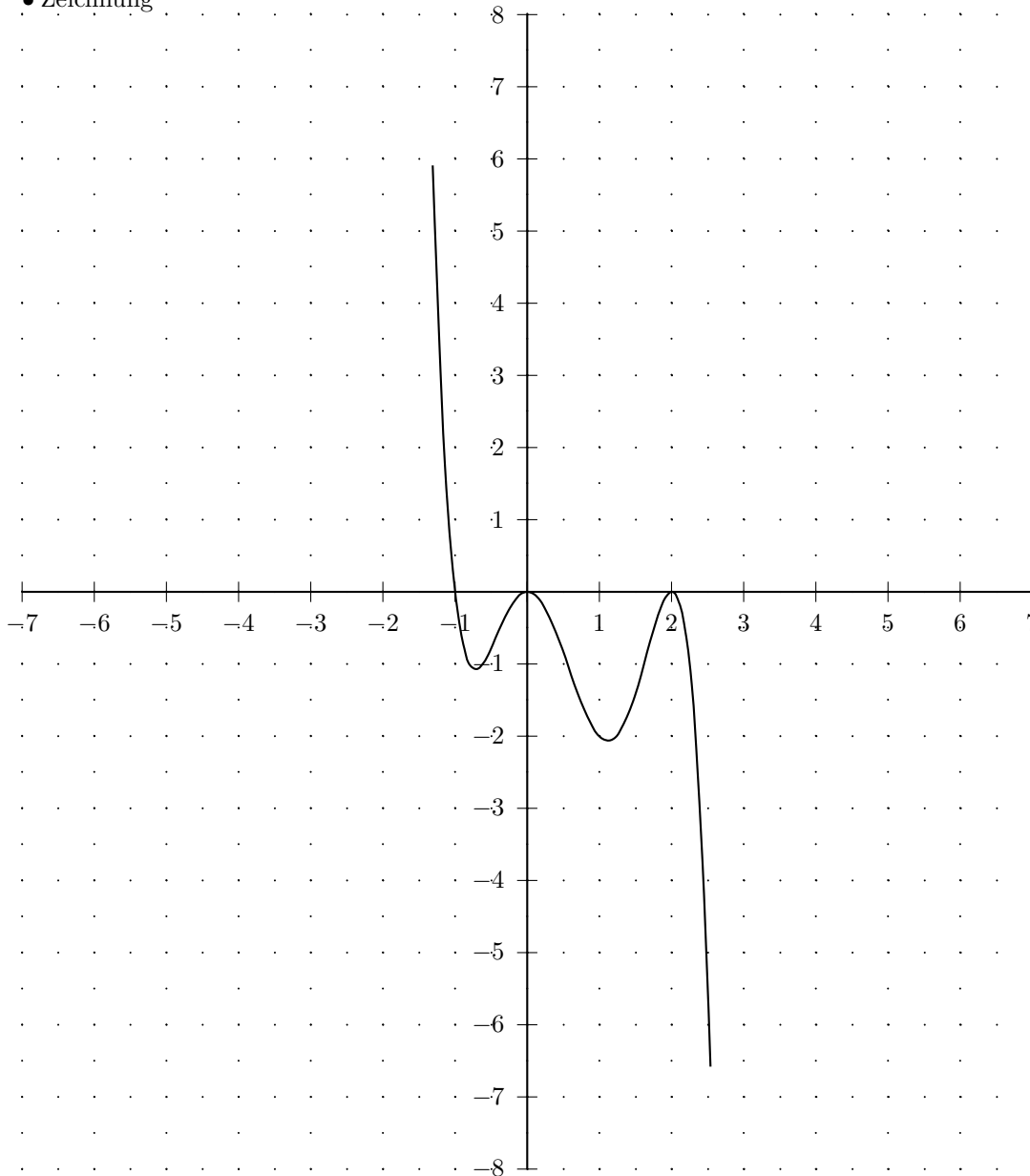
$x \in]-0,424; 0,57[\cup]1,654; \infty[$ $f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	23814	-16065,176	8616,023	-29235,034
$-6\frac{1}{2}$	$16789\frac{3}{32}$	-12168,966	7005,522	-19165,392
-6	11520	-9024,132	5608,02	-12153,6
$-5\frac{1}{2}$	$7657\frac{1}{32}$	-6527,925	4408,519	-7411,313
-5	4900	-4585,095	3392,017	-4312,5
$-4\frac{1}{2}$	$2994\frac{15}{32}$	-3107,891	2543,516	-2369,63
-4	1728	-2016,064	1848,014	-1211,733
$-3\frac{1}{2}$	$926\frac{13}{32}$	-1236,863	1290,513	-564,342
-3	450	-705,039	856,011	-231,3
$-2\frac{1}{2}$	$189\frac{27}{32}$	-362,841	529,509	-78,451
-2	64	-160,02	296,008	$-19\frac{1}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$13\frac{25}{32}$	-53,825	140,506	-1,955
-1	0	-9,007	48,005	$\frac{17}{30}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{25}{32}$	2,185	3,503	0,145
0	0	0	-7,998	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	-7,998	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{32}$	-2,811	-1,5	-0,151
1	-2	-0,999	7,999	$-\frac{9}{10}$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{13}{32}$	3,186	5,497	-1,842
2	0	-0,005	-24,004	$-2\frac{2}{15}$
$2\frac{1}{2}$	$-5\frac{15}{32}$	-27,822	-95,506	-2,93
3	-36	-105,017	-224,007	-11,7
$3\frac{1}{2}$	$-124\frac{1}{32}$	-263,837	-424,509	-48,413
4	-320	-544,034	-712,01	-153,6
$4\frac{1}{2}$	$-696\frac{3}{32}$	-992,858	-1101,512	-398,292
5	-1350	-1665,058	-1608,013	-895,833
$5\frac{1}{2}$	$-2408\frac{21}{32}$	-2622,885	-2246,515	-1815,567
6	-4032	-3936,088	-3032,017	-3398,4
$6\frac{1}{2}$	$-6416\frac{23}{32}$	-5681,918	-3979,518	-5974,238
7	-9800	-7945,124	-5104,02	-9981,3

• Zeichnung



Aufgabe (11)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 = 4(x+2)x^3(x - \frac{3}{4})$$

$$f'(x) = 20x^4 + 20x^3 - 18x^2 = 20(x+1,572)x^2(x-0,572)$$

$$f''(x) = 80x^3 + 60x^2 - 36x = 80(x+1,144)x(x-0,394)$$

$$f'''(x) = 240x^2 + 120x - 36$$

$$F(x) = \int (4x^5 + 5x^4 - 6x^3)dx = \frac{2}{3}x^6 + x^5 - 1\frac{1}{2}x^4 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [4 \cdot \infty^5] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [4 \cdot (-\infty)^5] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 4 \cdot (-x)^5 + 5 \cdot (-x)^4 - 6 \cdot (-x)^3$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 = 0$$

$$x^3(4x^2 + 5x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 4}$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8}$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm 11}{8}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 11}{8} \quad x_2 = \frac{-5 - 11}{8}$$

$$x_1 = \frac{3}{4} \quad x_2 = -2$$

$x_1 = -2$; 1-fache Nullstelle

$x_2 = 0$; 3-fache Nullstelle

$x_3 = \frac{3}{4}$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	$\frac{3}{4}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in] -2; 0[\cup] \frac{3}{4}; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in] -\infty; -2[\cup] 0; \frac{3}{4}[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 20x^4 + 20x^3 - 18x^2 = 0$$

$$x^2(20x^2 + 20x - 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 20x^2 + 20x - 18 = 0$$

$$20x^2 + 20x - 18 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-18)}}{2 \cdot 20}$$

$$x_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{1840}}{40}$$

$$x_{1/2} = \frac{-20 \pm 42,895}{40}$$

$$x_1 = \frac{-20 + 42,895}{40} \quad x_2 = \frac{-20 - 42,895}{40}$$

$$x_1 = 0,572 \quad x_2 = -1,572$$

$x_4 = -1,572$; 1-fache Nullstelle

$x_5 = 0$; 2-fache Nullstelle

$x_6 = 0,572$; 1-fache Nullstelle

$f''(-1,572) = -106,053$

$f''(-1,572) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt: $(-1,572/15, 443)$

$f''(0) = 0$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$

Terrassenpunkt: $(0/0)$

$f''(0,572) = 14,053 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt: $(0,572/ - 0,343)$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -1,572$	$< x < 0$	$< x < 0,572$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	+

$x \in]-\infty; -1,572[\cup]0,572; \infty[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-1,572; 0[\cup]0; 0,572[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

- Wendepunkte:

$f''(x) = 80x^3 + 60x^2 - 36x = 0$

$x(80x^2 + 60x - 36) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 80x^2 + 60x - 36 = 0$

$80x^2 + 60x - 36 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot 80 \cdot (-36)}}{2 \cdot 80}$

$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{15120}}{160}$

$x_{1/2} = \frac{-60 \pm 122,963}{160}$

$x_1 = 0,394 \quad x_2 = -1,144$

$x_7 = -1,144$; 1-fache Nullstelle

$x_8 = 0$; 1-fache Nullstelle

$x_9 = 0,394$; 1-fache Nullstelle

$f'''(-1,144) = 9,7$

$f'''(-1,144) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: $(-1,144/9,7)$

$f'''(0) = 0$

$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: $(0/0)$

$f'''(0,394) = -0,208$

$f'''(0,394) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: $(0,394/ - 0,208)$

- Krümmung

	$x < -1,144$	$< x < 0$	$< x < 0,394$	$< x$
$f''(x)$	-	+	-	+

$x \in]-1,144; 0[\cup]0,394; \infty[$ $f''(x) > 0$ linksgekrümmt

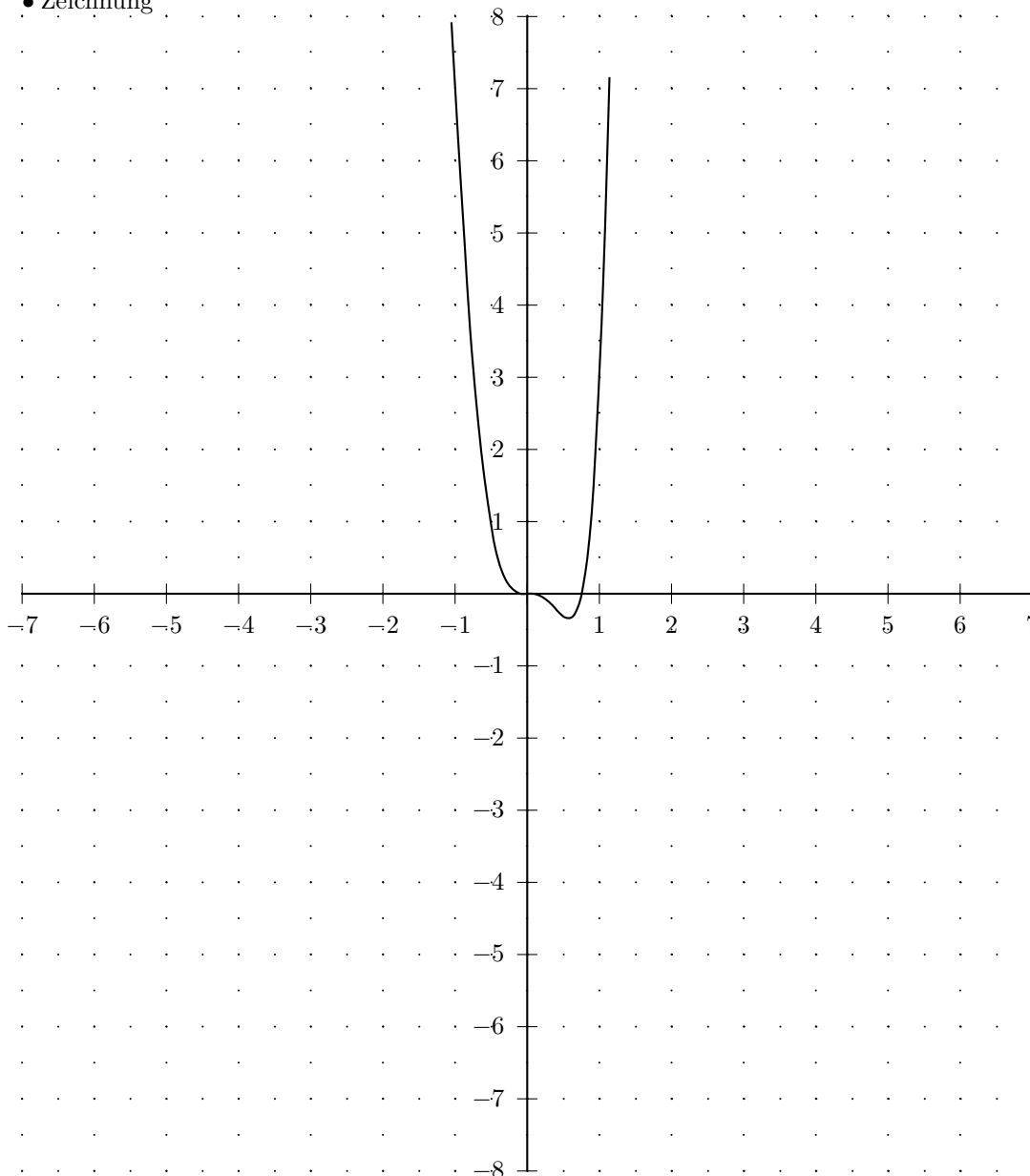
$x \in]-\infty; -1,144[\cup]0; 0,394[$ $f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-53165	40278,556	-24248,083	58024,168
$-6\frac{1}{2}$	$-35838\frac{9}{16}$	29448,726	-19201,077	35998,761
-6	-23328	20952,402	-14904,07	21384,001
$-5\frac{1}{2}$	$-14557\frac{13}{16}$	14429,585	-11297,064	12048,323
-5	-8625	9550,274	-8320,058	6354,167
$-4\frac{1}{2}$	$-4784\frac{1}{16}$	6014,469	-5913,052	3075,469
-4	-2432	3552,17	-4016,046	1322,667
$-3\frac{1}{2}$	$-1093\frac{5}{16}$	1923,377	-2569,04	475,198
-3	-405	918,09	-1512,034	121,5
$-2\frac{1}{2}$	$-101\frac{9}{16}$	356,309	-785,028	6,51
-2	0	88,035	-328,021	$-13\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{16}$	-6,733	-81,015	$-7\frac{19}{32}$
-1	7	-17,996	15,991	$-1\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$	-5,752	22,997	$-\frac{11}{96}$
0	0	-0,002	0,003	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	-0,002	0,003	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{16}$	-0,746	7,009	$-\frac{5}{96}$
1	3	22,017	104,015	$\frac{1}{6}$
$1\frac{1}{2}$	$35\frac{7}{16}$	128,285	351,021	$7\frac{19}{32}$
2	160	408,059	808,028	50,667
$2\frac{1}{2}$	$492\frac{3}{16}$	981,34	1535,034	201,823
3	1215	1998,127	2592,04	607,5
$3\frac{1}{2}$	$2593\frac{15}{16}$	3638,42	4039,046	1525,635
4	4992	6112,219	5936,052	3370,667
$4\frac{1}{2}$	$8884\frac{11}{16}$	9659,524	8343,058	6766,031
5	14875	14550,335	11320,064	12604,167
$5\frac{1}{2}$	$23708\frac{7}{16}$	21084,652	14927,07	22114,011
6	36288	29592,476	19224,077	36936,001
$6\frac{1}{2}$	$53689\frac{3}{16}$	40433,806	24271,083	59204,574
7	77175	53998,641	30128,089	91638,168

• Zeichnung



Aufgabe (12)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 1 = 4(x^2 - 1,307x + 0,492)(x^2 + 0,546x + 0,253)(x + 2,011)$$

$$f'(x) = 20x^4 + 20x^3 - 18x^2 = 20(x + 1,572)x^2(x - 0,572)$$

$$f''(x) = 80x^3 + 60x^2 - 36x = 80(x + 1,144)x(x - 0,394)$$

$$f'''(x) = 240x^2 + 120x - 36$$

$$F(x) = \int (4x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 1)dx = \frac{2}{3}x^6 + x^5 - 1\frac{1}{2}x^4 + x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [4 \cdot \infty^5] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [4 \cdot (-\infty)^5] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 4 \cdot (-x)^5 + 5 \cdot (-x)^4 - 6 \cdot (-x)^3 + 1$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 1 = 0$$

NumerischeSuche :

$$x_1 = -2,011; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2,011$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$$x \in] -2,011; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in] -\infty; -2,011[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 20x^4 + 20x^3 - 18x^2 = 0$$

$$x^2(20x^2 + 20x - 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 20x^2 + 20x - 18 = 0$$

$$20x^2 + 20x - 18 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-18)}}{2 \cdot 20}$$

$$x_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{1840}}{40}$$

$$x_{1/2} = \frac{-20 \pm 42,895}{40}$$

$$x_1 = \frac{-20 + 42,895}{40} \quad x_2 = \frac{-20 - 42,895}{40}$$

$$x_1 = 0,572 \quad x_2 = -1,572$$

$$x_2 = -1,572; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_3 = 0; \quad 2\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 0,572; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f''(-1,572) = -106,053$$

$$f''(-1,572) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1,572/16,443)$$

$$f''(0) = 1$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Terrassenpunkt: } (0/1)$$

$$f''(0,572) = 14,053 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (0,572/0,657)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,572$	$< x <$	0	$< x <$	$0,572$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1,572[\cup]0,572; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-1,572; 0[\cup]0; 0,572[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 80x^3 + 60x^2 - 36x = 0$$

$$x(80x^2 + 60x - 36) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 80x^2 + 60x - 36 = 0$$

$$80x^2 + 60x - 36 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot 80 \cdot (-36)}}{2 \cdot 80}$$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{15120}}{160}$$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm 122,963}{160}$$

$$x_1 = \frac{-60 + 122,963}{160} \quad x_2 = \frac{-60 - 122,963}{160}$$

$$x_1 = 0,394 \quad x_2 = -1,144$$

$$x_5 = -1,144; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_6 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_7 = 0,394; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f'''(-1,144) = 10,7$$

$$f'''(-1,144) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(-1,144/10,7)$

$$f'''(0) = 1$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(0/1)$

$$f'''(0,394) = 0,792$$

$$f'''(0,394) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(0,394/0,792)$

• Krümmung

	$x <$	$-1,144$	$< x <$	0	$< x <$	$0,394$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-1,144; 0[\cup]0,394; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

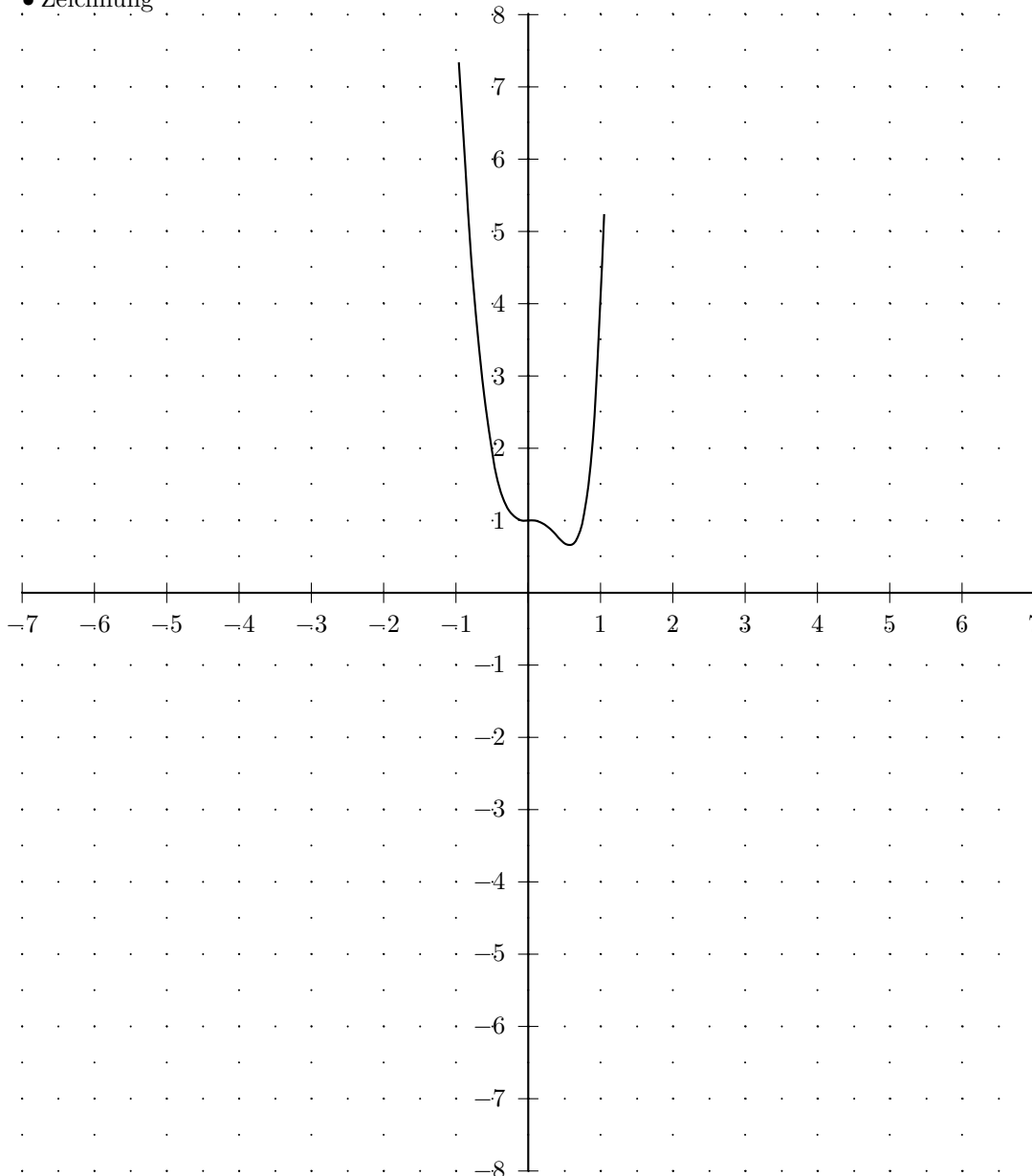
$x \in]-\infty; -1,144[\cup]0; 0,394[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-53164	40278,556	-24248,083	58017,168
$-6\frac{1}{2}$	$-35837\frac{9}{16}$	29448,726	-19201,077	35992,261
-6	-23327	20952,402	-14904,07	21378,001
$-5\frac{1}{2}$	$-14556\frac{13}{16}$	14429,585	-11297,064	12042,823
-5	-8624	9550,274	-8320,058	6349,167
$-4\frac{1}{2}$	$-4783\frac{1}{16}$	6014,469	-5913,052	3070,969
-4	-2431	3552,17	-4016,046	1318,667
$-3\frac{1}{2}$	$-1092\frac{5}{16}$	1923,377	-2569,04	471,698
-3	-404	918,09	-1512,034	118,5
$-2\frac{1}{2}$	$-100\frac{9}{16}$	356,309	-785,028	4,01
-2	1	88,035	-328,021	$-15\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$16\frac{3}{16}$	-6,733	-81,015	$-9\frac{3}{32}$
-1	8	-17,996	15,991	$-2\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{15}{16}$	-5,752	22,997	$-\frac{59}{96}$
0	1	-0,002	0,003	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	1	-0,002	0,003	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$	-0,746	7,009	$\frac{43}{96}$
1	4	22,017	104,015	$1\frac{1}{6}$
$1\frac{1}{2}$	$36\frac{7}{16}$	128,285	351,021	$9\frac{3}{32}$
2	161	408,059	808,028	52,667
$2\frac{1}{2}$	$493\frac{3}{16}$	981,34	1535,034	204,323
3	1216	1998,127	2592,04	610,5
$3\frac{1}{2}$	$2594\frac{15}{16}$	3638,42	4039,046	1529,135
4	4993	6112,219	5936,052	3374,667
$4\frac{1}{2}$	$8885\frac{11}{16}$	9659,524	8343,058	6770,531
5	14876	14550,335	11320,064	12609,167
$5\frac{1}{2}$	$23709\frac{7}{16}$	21084,652	14927,07	22119,511
6	36289	29592,476	19224,077	36942,001
$6\frac{1}{2}$	$53690\frac{3}{16}$	40433,806	24271,083	59211,074
7	77176	53998,641	30128,089	91645,168

• Zeichnung



Aufgabe (13)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = 2x^6 - 2x^5 = 2x^5(x - 1)$$

$$f'(x) = 12x^5 - 10x^4 = 2x^4(x - \frac{5}{6})$$

$$f''(x) = 60x^4 - 40x^3 = 20x^3(x - \frac{2}{3})$$

$$f'''(x) = 240x^3 - 120x^2$$

$$F(x) = \int (2x^6 - 2x^5)dx = \frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^6 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-0, 134), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [2 \cdot \infty^6] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [2 \cdot (-\infty)^6] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 2 \cdot (-x)^6 - 2 \cdot (-x)^5$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 2x^6 - 2x^5 = 0$$

$$x^5(2x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2x - 2 = 0$$

$$2x - 2 = 0 \quad / + 2$$

$$2x = 2 \quad / : 2$$

$$x = \frac{2}{2}$$

$$x = 1$$

$x_1 = 0$; 5-fache Nullstelle

$x_2 = 1$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f(x)$	+	-	+

$x \in]-\infty; 0[\cup]1; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]0; 1[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 12x^5 - 10x^4 = 0$$

$$x^4(12x - 10) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 12x - 10 = 0$$

$$12x - 10 = 0 \quad / + 10$$

$$12x = 10 \quad / : 12$$

$$x = \frac{10}{12}$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$x_3 = 0$; 4-fache Nullstelle

$x_4 = \frac{5}{6}$; 1-fache Nullstelle

$$f''(0) = 0$$

$$f''(\frac{5}{6}) = 0 \Rightarrow$$

Terrassenpunkt:(0/0)

$$f''(\frac{5}{6}) = 5,787 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(\frac{5}{6} / -0, 134)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6} < x$
$f'(x)$	-	+

$x \in]\frac{5}{6}; \infty[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; \frac{5}{6}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 60x^4 - 40x^3 = 0$$

$$x^3(60x - 40) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 60x - 40 = 0$$

$$60x - 40 = 0 \quad / + 40$$

$$60x = 40 \quad / : 60$$

$$x = \frac{40}{60}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$x_5 = 0; \quad \text{3-fache Nullstelle}$$

$$x_6 = \frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(\frac{2}{3}) = -0,088$$

$$f'''(\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Wendepunkt: } (\frac{2}{3} / -0,088)$$

• Krümmung

	$x < 0$	0	$0 < x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

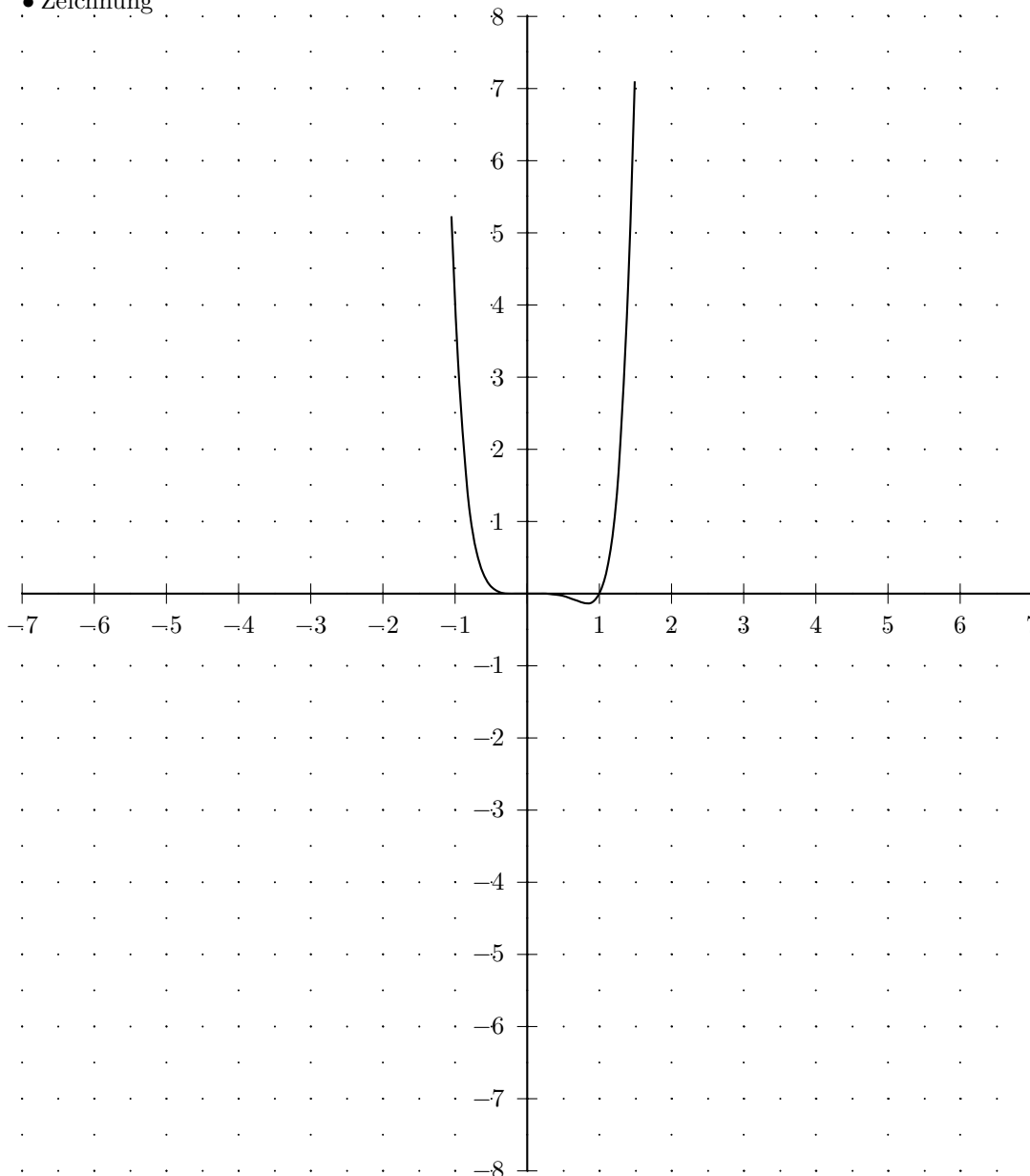
$$x \in]0; \frac{2}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	268912	-225698,502	157780,943	-274514,345
$-6\frac{1}{2}$	$174043\frac{19}{32}$	-157089,123	118089,566	-165203,291
-6	108864	-106274,867	86400,698	-95533,718
$-5\frac{1}{2}$	$65426\frac{31}{32}$	-69546,973	61559,34	-52725,032
-5	37500	-43751,684	42500,49	-27529,763
$-4\frac{1}{2}$	$20298\frac{3}{32}$	-26245,24	28249,15	-13444,193
-4	10240	-14848,882	17920,319	-6046,476
$-3\frac{1}{2}$	$4726\frac{31}{32}$	-7803,85	10718,997	-2451,021
-3	1944	-3726,386	5940,184	-867,857
$-2\frac{1}{2}$	$683\frac{19}{32}$	-1562,73	2968,88	-255,766
-2	192	-544,123	1280,086	-57,905
$-1\frac{1}{2}$	$37\frac{31}{32}$	-141,805	438,801	$-8\frac{19}{28}$
-1	4	-22,018	100,025	$-\frac{13}{21}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{32}$	-1,003	8,758	-0,007
0	0	0	0	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{4}$	-1,248	-0,003
1	0	2,006	20,012	$-\frac{1}{21}$
$1\frac{1}{2}$	$7\frac{19}{32}$	40,528	168,782	1,085
2	64	224,074	640,061	15,238
$2\frac{1}{2}$	$292\frac{31}{32}$	781,403	1718,85	93,006
3	972	2106,276	3780,147	381,857
$3\frac{1}{2}$	$2626\frac{3}{32}$	4802,45	7288,954	1225,51
4	6144	9728,686	12800,27	3315,81
$4\frac{1}{2}$	$12916\frac{31}{32}$	18043,742	20959,095	7908,349
5	25000	31251,378	32500,429	17113,096
$5\frac{1}{2}$	$45295\frac{19}{32}$	51245,353	48249,272	34271,271
6	77760	80354,426	69120,625	64429,718
$6\frac{1}{2}$	$127631\frac{31}{32}$	121387,355	96119,487	114924,03
7	201684	177677,902	130340,858	196081,677

• Zeichnung



Aufgabe (14)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -x^6 + 2x^5 - x^4 = -x^4(x-1)^2$$

$$f'(x) = -6x^5 + 10x^4 - 4x^3 = -6x^3(x - \frac{2}{3})(x-1)$$

$$f''(x) = -30x^4 + 40x^3 - 12x^2 = -30x^2(x-0,456)(x-0,877)$$

$$f'''(x) = -120x^3 + 120x^2 - 24x$$

$$F(x) = \int (-x^6 + 2x^5 - x^4) dx = -\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 0[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^6] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^6] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -1 \cdot (-x)^6 + 2 \cdot (-x)^5 - 1 \cdot (-x)^4$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -x^6 + 2x^5 - x^4 = 0$$

$$x^4(-x^2 + 2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 0}{-2} \quad x_2 = \frac{-2 - 0}{-2}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1$$

$$x_1 = 0; \quad 4\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 1; \quad 2\text{-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f(x)$	-	0	-	0	-

$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -6x^5 + 10x^4 - 4x^3 = 0$$

$$x^3(-6x^2 + 10x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -6x^2 + 10x - 4 = 0$$

$$-6x^2 + 10x - 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-6)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{4}}{-12}$$

$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm 2}{-12}$$

$$x_{1/2} = \frac{-12}{-12}$$

$$x_1 = \frac{-10 + 2}{-12} \quad x_2 = \frac{-10 - 2}{-12}$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = 1$$

$$x_3 = 0; \quad 3\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = \frac{2}{3}; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 1; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f''(0) = 0$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow$$

Extremwert:(0/0)

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{27} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}\left(\frac{2}{3} / -0,022\right)$$

$$f''(1) = -2$$

$$f''(1) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(1/0)$$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$0 < x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

$$x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{2}{3}; 1[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]0; \frac{2}{3}[\cup]1; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = -30x^4 + 40x^3 - 12x^2 = 0$$

$$x^2(-30x^2 + 40x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -30x^2 + 40x - 12 = 0$$

$$-30x^2 + 40x - 12 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot (-30) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-30)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-40 \pm \sqrt{160}}{-60}$$

$$x_{1/2} = \frac{-40 \pm 12,649}{-60}$$

$$x_1 = \frac{-40 + 12,649}{-60} \quad x_2 = \frac{-40 - 12,649}{-60}$$

$$x_1 = 0,456 \quad x_2 = 0,877$$

$$x_6 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

$$x_7 = 0,456; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_8 = 0,877; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(0,456) = -0,013$$

$$f'''(0,456) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt:(0,456/ -0,013)

$$f'''(0,877) = -0,009$$

$$f'''(0,877) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt:(0,877/ -0,009)

• Krümmung

	$x < 0$	0	$0 < x < 0,456$	$0,456$	$0 < x < 0,877$	$0,877$	$x > 0,877$
$f''(x)$	-	0	-	0	+	0	-

$$x \in]0,456; 0,877[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

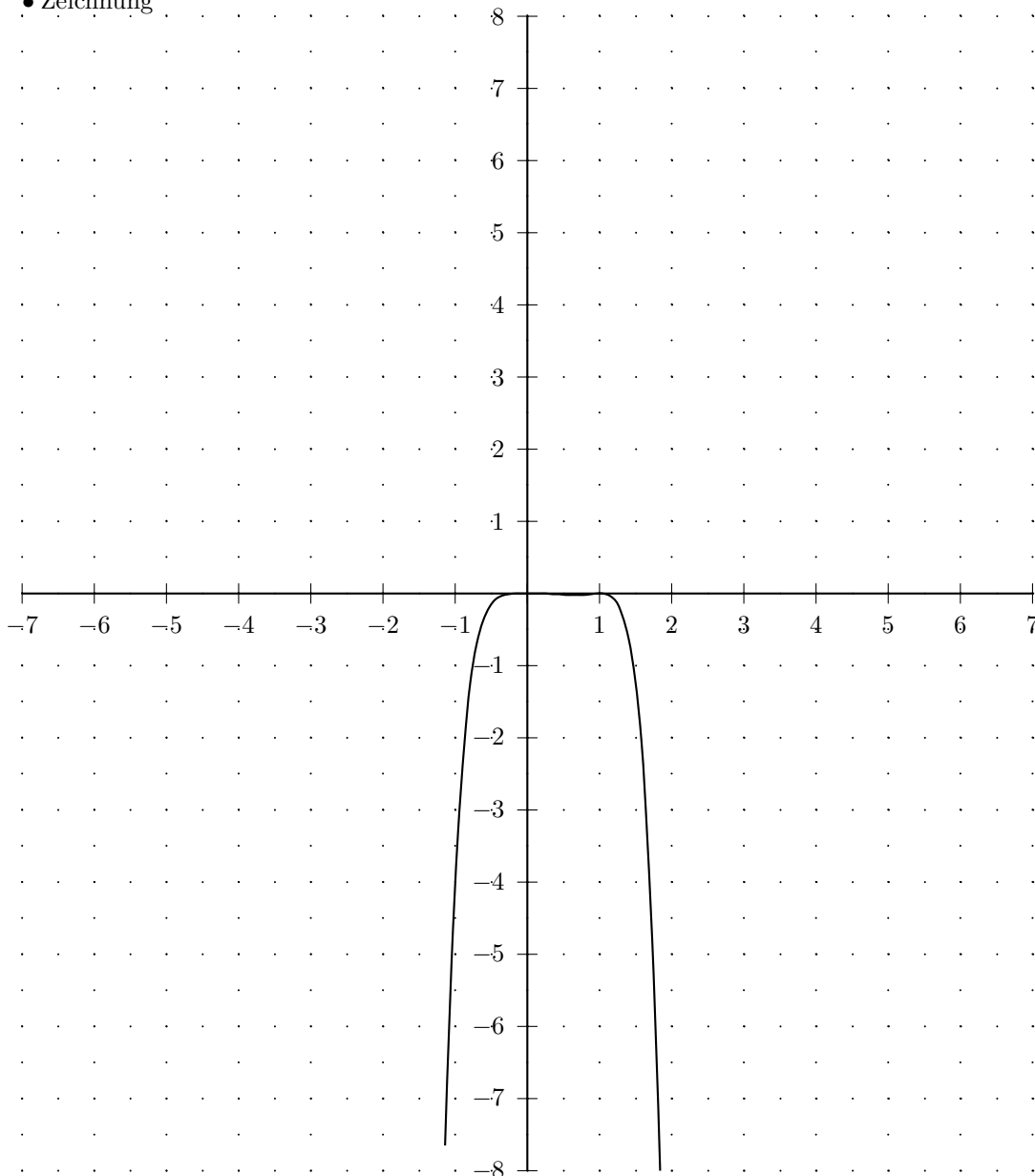
$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 0,456[\cup]0,877; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-153664	126226,41	-86338,494	160226,74
$-6\frac{1}{2}$	$-100409\frac{49}{64}$	88568,511	-65044,304	$97492\frac{3}{71}$
-6	-63504	60481,551	-47952,368	57098,059
$-5\frac{1}{2}$	$-38661\frac{25}{64}$	40014,399	-34470,187	31982,525
-5	-22500	25500,925	-24050,261	16994,048
$-4\frac{1}{2}$	$-12404\frac{25}{64}$	15537,5	-16190,089	8475,113
-4	-6400	8960,495	-10432,172	3910,705
$-3\frac{1}{2}$	$-3038\frac{49}{64}$	4823,779	-6364,01	1636,932
-3	-1296	2376,224	-3618,102	604,029
$-2\frac{1}{2}$	$-478\frac{33}{64}$	1039,2	-1871,948	188,105
-2	-144	384,076	-848,05	46,019
$-1\frac{1}{2}$	$-31\frac{41}{64}$	109,724	-313,905	7,756
-1	-4	20,013	-82,016	0,676
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{64}$	1,315	-9,881	0,013
0	0	0	-0,001	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	-0,001	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{64}$	-0,062	0,125	-0,002
1	0	-0,001	-2,004	-0,01
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{17}{64}$	-8,446	$-43\frac{55}{62}$	-0,163
2	-16	-64,027	-208,025	-3,352
$2\frac{1}{2}$	$-87\frac{57}{64}$	-257,873	-621,918	-25,344
3	-324	-756,114	-1458,065	-118,029
$3\frac{1}{2}$	$-937\frac{57}{64}$	-1822,379	-2933,967	-411,421
4	-2304	-3840,299	-5312,123	-1180,038
$4\frac{1}{2}$	$-5023\frac{17}{64}$	-7336,002	-8900,034	-2939,27
5	-10000	-13000,619	-14050,2	-6577,381
$5\frac{1}{2}$	$-18530\frac{1}{64}$	-21712,778	-21160,12	-13528,764
6	-32400	-34561,11	-30672,295	-25994,059
$6\frac{1}{2}$	$-53998\frac{9}{64}$	-52866,744	-43074,224	-47212,781
7	-86436	-78205,809	-58898,408	-81794,071

• Zeichnung



Aufgabe (15)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x+1)^3(x-1)^3$$

$$f'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 6x = 6(x+1)^2x(x-1)^2$$

$$f''(x) = 30x^4 - 36x^2 + 6 = 30(x+1)(x+0,447)(x-0,447)(x-1)$$

$$f'''(x) = 120x^3 - 72x$$

$$F(x) = \int (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) dx = \frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-1), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^6] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^6] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^6 - 3 \cdot (-x)^4 + 3 \cdot (-x)^2 - 1$$

$$f(-x) = 1 \cdot x^6 - 3 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2 - 1$$

$$f(-x) = f(x) \rightarrow \text{Symmetrie zur y-Achse:}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = 0$$

Numerische Suche :

$$x_1 = -1; \quad \text{3-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 1; \quad \text{3-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	-1	$< x < 1$	1	$< x$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$$x \in]-\infty; -(\cup]1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in]-1; 1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 6x = 0$$

$$x(6x^4 - 12x^2 + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 6x^4 - 12x^2 + 6 = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$6u^2 - 12u + 6 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6}$$

$$u_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{0}}{12}$$

$$u_{1/2} = \frac{12 \pm 0}{12}$$

$$u_1 = \frac{12+0}{12} \quad u_2 = \frac{12-0}{12}$$

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$x_3 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$x_5 = 1$; 2-fache Nullstelle

$f''(-1) = 0$

$f''(-1) = 0 \Rightarrow$

Terrassenpunkt: $(-1/0)$

$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt: $(0/-1)$

$f''(1) = 0$

$f''(1) = 0 \Rightarrow$

Terrassenpunkt: $(1/0)$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x$
$f'(x)$	-	0	+	+

$x \in]0; 1[\cup]1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

- Wendepunkte:

$f''(x) = 30x^4 - 36x^2 + 6 = 0$

$u = x^2 \quad u^2 = x^4$

$30u^2 - 36u + 6 = 0$

$u_{1/2} = \frac{+36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 30 \cdot 6}}{2 \cdot 30}$

$u_{1/2} = \frac{+36 \pm \sqrt{576}}{60}$

$u_{1/2} = \frac{36 \pm 24}{60}$

$u_1 = \frac{36 + 24}{60} \quad u_2 = \frac{36 - 24}{60}$

$u_1 = 1 \quad u_2 = \frac{1}{5}$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

$x^2 = \frac{1}{5}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$

$x_1 = 0,447 \quad x_2 = -0,447$

$x_6 = -1$; 1-fache Nullstelle

$x_7 = -0,447$; 1-fache Nullstelle

$x_8 = 0,447$; 1-fache Nullstelle

$x_9 = 1$; 1-fache Nullstelle

$f'''(-1) = 0$

$f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: $(-1/0)$

$f'''(-0,447) = -0,512$

$f'''(-0,447) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: $(-0,447/-0,512)$

$f'''(0,447) = -0,512$

$f'''(0,447) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: $(0,447/-0,512)$

$f'''(1) = 0$

$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: $(1/0)$

- Krümmung

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < -0,447$	$x = -0,447$	$-0,447 < x < 0,447$	$x = 0,447$	$0,447 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f''(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; -1[\cup]-0,447; 0,447[\cup]1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

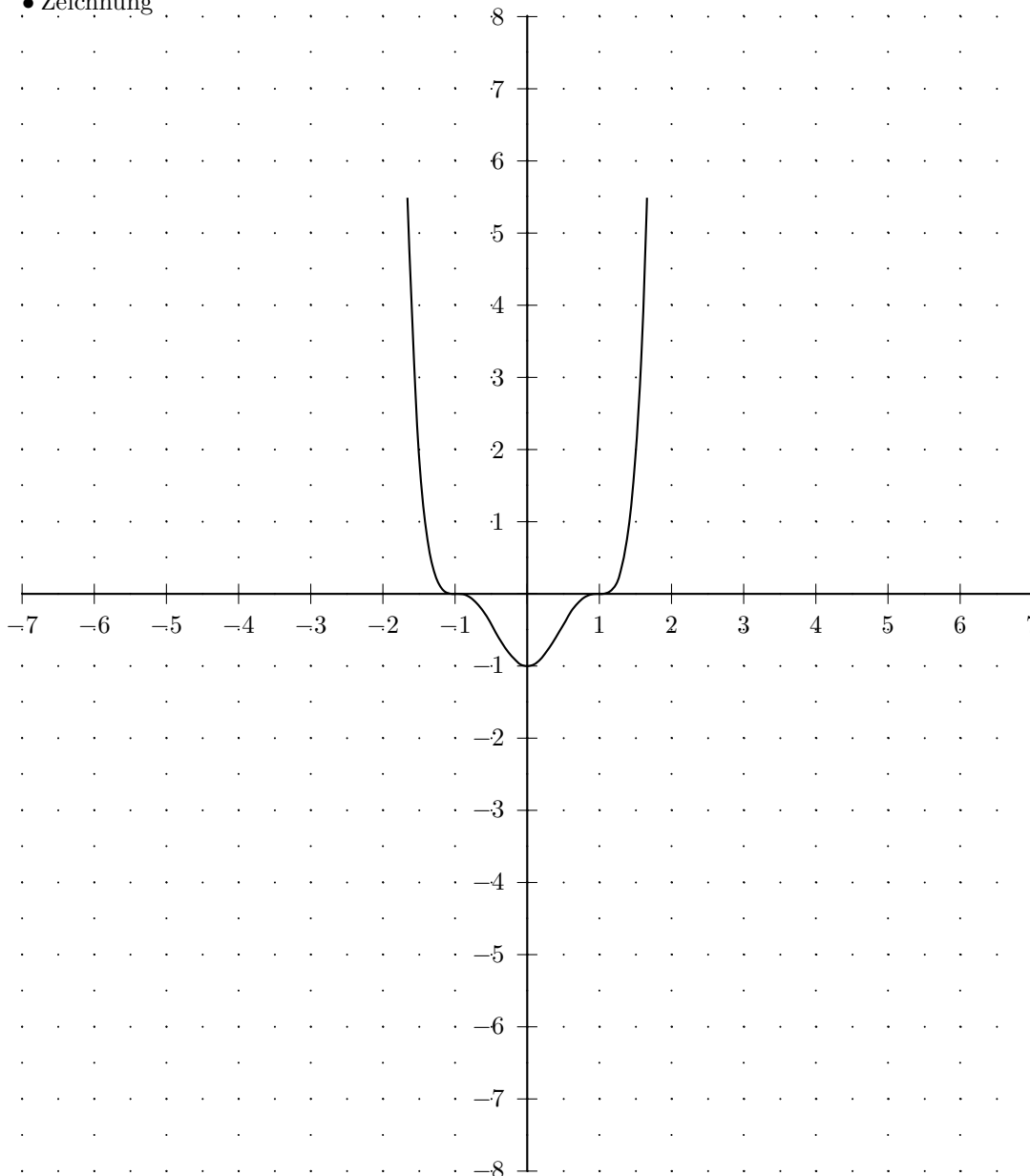
$x \in]-1; -0,447[\cup]0,447; 1[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	110592	-96770,075	70272,448	-107900,805
$-6\frac{1}{2}$	$70189\frac{29}{64}$	-66362,596	52037,261	-63338,211
-6	42875	-44101,301	37590,329	-35535,259
$-5\frac{1}{2}$	$25025\frac{13}{64}$	-28234,561	26369,151	-18890,245
-5	13824	-17280 $\frac{68}{91}$	17856,228	-9405,715
$-4\frac{1}{2}$	$7133\frac{21}{64}$	-10005,729	11579,059	-4317,592
-4	3375	-5400,377	7110,145	-1786,172
$-3\frac{1}{2}$	$1423\frac{53}{64}$	-2658,062	4066,986	-643,377
-3	512	-1152,154	2112,081	-190,629
$-2\frac{1}{2}$	$144\frac{45}{64}$	-413,524	952,931	-41,724
-2	27	-108,042	342,035	$-5\frac{3}{35}$
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{61}{64}$	-14,078	76,894	0,24
-1	0	-0,002	0,007	$\frac{16}{35}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{64}$	-1,686	-1,125	0,393
0	-1	0	5,998	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-1	0	5,998	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{64}$	1,686	-1,125	-0,393
1	0	0,002	0,007	$-\frac{16}{35}$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{61}{64}$	14,078	76,894	-0,24
2	27	108,042	342,035	$5\frac{3}{35}$
$2\frac{1}{2}$	$144\frac{45}{64}$	413,524	952,931	41,724
3	512	1152,154	2112,081	190,629
$3\frac{1}{2}$	$1423\frac{53}{64}$	2658,062	4066,986	643,377
4	3375	5400,377	7110,145	1786,172
$4\frac{1}{2}$	$7133\frac{21}{64}$	10005,729	11579,059	4317,592
5	13824	17280 $\frac{68}{91}$	17856,228	9405,715
$5\frac{1}{2}$	$25025\frac{13}{64}$	28234,561	26369,151	18890,245
6	42875	44101,301	37590,329	35535,259
$6\frac{1}{2}$	$70189\frac{29}{64}$	66362,596	52037,261	63338,211
7	110592	96770,075	70272,448	107900,805

• Zeichnung



Aufgabe (16)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64 = (x+2)^3(x-2)^3$$

$$f'(x) = 6x^5 - 48x^3 + 96x = 6(x+2)^2x(x-2)^2$$

$$f''(x) = 30x^4 - 144x^2 + 96 = 30(x+2)(x+0,894)(x-0,894)(x-2)$$

$$f'''(x) = 120x^3 - 288x$$

$$F(x) = \int (x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64) dx = \frac{1}{7}x^7 - 2\frac{2}{5}x^5 + 16x^3 - 64x + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-64), \infty[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^6] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^6] = \infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = 1 \cdot (-x)^6 - 12 \cdot (-x)^4 + 48 \cdot (-x)^2 - 64$$

$$f(-x) = 1 \cdot x^6 - 12 \cdot x^4 + 48 \cdot x^2 - 64$$

$$f(-x) = f(x) \rightarrow \text{Symmetrie zur y-Achse:}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64 = 0$$

Numerische Suche :

$$x_1 = -2; \quad \text{3-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 2; \quad \text{3-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x \in]-\infty; -2[\cup]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$$

$$x \in]-2; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = 6x^5 - 48x^3 + 96x = 0$$

$$x(6x^4 - 48x^2 + 96) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 6x^4 - 48x^2 + 96 = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$6u^2 - 48u + 96 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+48 \pm \sqrt{(-48)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 96}}{2 \cdot 6}$$

$$u_{1/2} = \frac{+48 \pm \sqrt{0}}{12}$$

$$u_{1/2} = \frac{48 \pm 0}{12}$$

$$u_1 = \frac{48+0}{12} \quad u_2 = \frac{48-0}{12}$$

$$u_1 = 4 \quad u_2 = 4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

$$x_3 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$x_5 = 2$; 2-fache Nullstelle

$$f''(-2) = 0$$

$$f''(-2) = 0 \Rightarrow$$

Terrassenpunkt: $(-2/0)$

$$f''(0) = 96 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (0/ - 64)$$

$$f''(2) = 0$$

$$f''(2) = 0 \Rightarrow$$

Terrassenpunkt: $(2/0)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$$x \in]0; 2[\cup]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

• Wendepunkte:

$$f''(x) = 30x^4 - 144x^2 + 96 = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$30u^2 - 144u + 96 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+144 \pm \sqrt{(-144)^2 - 4 \cdot 30 \cdot 96}}{2 \cdot 30}$$

$$u_{1/2} = \frac{+144 \pm \sqrt{9216}}{60}$$

$$u_{1/2} = \frac{144 \pm 96}{60}$$

$$u_1 = \frac{144 + 96}{60} \quad u_2 = \frac{144 - 96}{60}$$

$$u_1 = 4 \quad u_2 = \frac{4}{5}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

$$x^2 = \frac{4}{5}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$x_1 = 0,894 \quad x_2 = -0,894$$

$x_6 = -2$; 1-fache Nullstelle

$x_7 = -0,894$; 1-fache Nullstelle

$x_8 = 0,894$; 1-fache Nullstelle

$x_9 = 2$; 1-fache Nullstelle

$$f'''(-2) = 0$$

$$f'''(-2) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(-2/0)$

$$f'''(-0,894) = -32,768$$

$$f'''(-0,894) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(-0,894/ - 32,768)$

$$f'''(0,894) = -32,768$$

$$f'''(0,894) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(0,894/ - 32,768)$

$$f'''(2) = 0$$

$$f'''(2) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(2/0)$

• Krümmung

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -0,894$	$x = -0,894$	$-0,894 < x < 0,894$	$x = 0,894$	$0,894 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f''(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; -2[\cup]-0,894; 0,894[\cup]2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

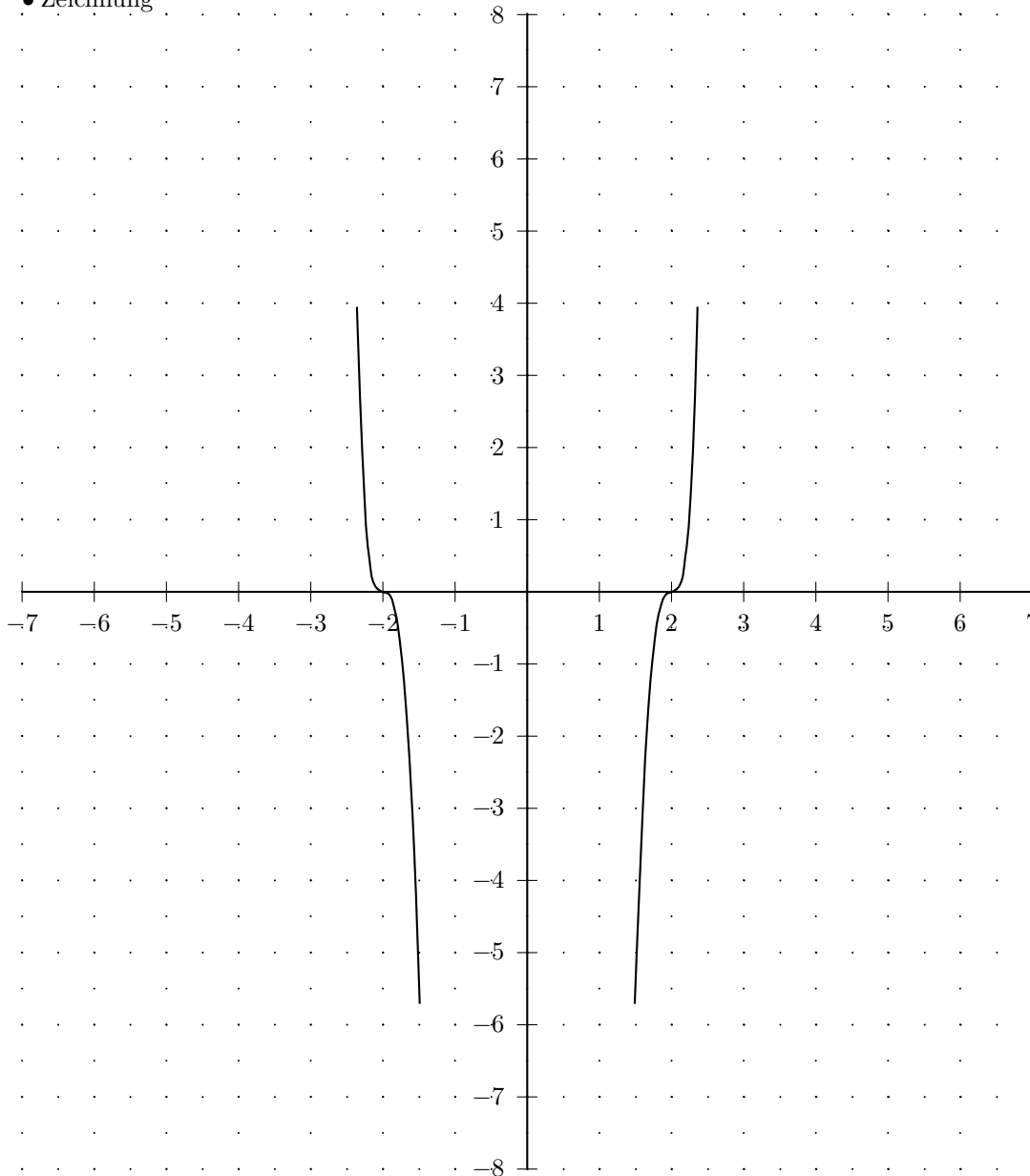
$x \in]-2; -0,894[\cup]0,894; 2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	91125	-85051,998	65070,443	-82352,205
$-6\frac{1}{2}$	$55962\frac{9}{64}$	-57061,024	47564,256	-46162,855
-6	32768	-36865,235	33792,323	-24400,459
$-5\frac{1}{2}$	$18087\frac{57}{64}$	-22740,001	23192,146	-11980,251
-5	9261	-13230,692	15246,222	-5340,715
$-4\frac{1}{2}$	$4291\frac{1}{64}$	-7130,179	9482,054	-2079,46
-4	1728	-3456,333	5472,14	-650,972
$-3\frac{1}{2}$	$561\frac{33}{64}$	-1429,524	2833,98	-120,608
-3	125	-450,121	1230,075	30,771
$-2\frac{1}{2}$	$11\frac{25}{64}$	-75,996	367,925	57,182
-2	0	-0,02	0,029	$58\frac{18}{35}$
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{23}{64}$	-27,561	-76,112	57,784
-1	-27	-53,991	-17,998	$50\frac{9}{35}$
$-\frac{1}{2}$	$-52\frac{47}{64}$	-42,181	61,87	30,074
0	-64	0	95,993	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	-64	0	95,993	0
$\frac{1}{2}$	$-52\frac{47}{64}$	42,181	61,87	-30,074
1	-27	53,991	-17,998	$-50\frac{9}{35}$
$1\frac{1}{2}$	$-5\frac{23}{64}$	27,561	-76,112	-57,784
2	0	0,02	0,029	$-58\frac{18}{35}$
$2\frac{1}{2}$	$11\frac{25}{64}$	75,996	367,925	-57,182
3	125	450,121	1230,075	-30,771
$3\frac{1}{2}$	$561\frac{33}{64}$	1429,524	2833,98	120,608
4	1728	3456,333	5472,14	650,972
$4\frac{1}{2}$	$4291\frac{1}{64}$	7130,179	9482,054	2079,46
5	9261	13230,692	15246,222	5340,715
$5\frac{1}{2}$	$18087\frac{57}{64}$	22740,001	23192,146	11980,251
6	32768	36865,235	33792,323	24400,459
$6\frac{1}{2}$	$55962\frac{9}{64}$	57061,024	47564,256	46162,855
7	91125	85051,998	65070,443	82352,205

• Zeichnung



Aufgabe (17)

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^6 + 3x^5 - 4\frac{1}{2}x^4 = -\frac{1}{2}x^4(x-3)^2$$

$$f'(x) = -3x^5 + 15x^4 - 18x^3 = -3x^3(x-2)(x-3)$$

$$f''(x) = -15x^4 + 60x^3 - 54x^2 = -15x^2(x-1,368)(x-2,632)$$

$$f'''(x) = -60x^3 + 180x^2 - 108x$$

$$F(x) = \int(-\frac{1}{2}x^6 + 3x^5 - 4\frac{1}{2}x^4)dx = -\frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{9}{10}x^5 + c$$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 0[$

• Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot \infty^6] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^6] = -\infty$$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot (-x)^6 + 3 \cdot (-x)^5 - 4\frac{1}{2} \cdot (-x)^4$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^6 + 3x^5 - 4\frac{1}{2}x^4 = 0$$

$$x^4(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2} = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-4\frac{1}{2})}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})}$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{0}}{-1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm 0}{-1}$$

$$x_1 = \frac{-3+0}{-1} \quad x_2 = \frac{-3-0}{-1}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 3$$

$$x_1 = 0; \quad 4\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_2 = 3; \quad 2\text{-fache Nullstelle}$$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$

$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 3[\cup]3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -3x^5 + 15x^4 - 18x^3 = 0$$

$$x^3(-3x^2 + 15x - 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -3x^2 + 15x - 18 = 0$$

$$-3x^2 + 15x - 18 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-18)}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{9}}{-6}$$

$$x_{1/2} = \frac{-15 \pm 3}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-15+3}{-6} \quad x_2 = \frac{-15-3}{-6}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

$$x_3 = 0; \quad 3\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_4 = 2; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_5 = 3; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

$$f''(0) = 0$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow$$

Extremwert:(0/0)

$$f''(2) = 24 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt:}(2/ - 8)$$

$$f''(3) = -81$$

$$f''(3) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt:}(3/0)$$

- Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x < 0$	0	$< x < 2$	2	$< x < 3$	3	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

$$x \in]-\infty; 0[\cup]2; 3[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$$

$$x \in]0; 2[\cup]3; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$$

- Wendepunkte:

$$f''(x) = -15x^4 + 60x^3 - 54x^2 = 0$$

$$x^2(-15x^2 + 60x - 54) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -15x^2 + 60x - 54 = 0$$

$$-15x^2 + 60x - 54 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot (-15) \cdot (-54)}}{2 \cdot (-15)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{360}}{-30}$$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm 18,974}{-30}$$

$$x_1 = \frac{-60 + 18,974}{-30} \quad x_2 = \frac{-60 - 18,974}{-30}$$

$$x_1 = 1,368 \quad x_2 = 2,632$$

$$x_6 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

$$x_7 = 1,368; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$x_8 = 2,632; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

$$f'''(1,368) = -4,66$$

$$f'''(1,368) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt:(1,368/ - 4,66)

$$f'''(2,632) = -3,244$$

$$f'''(2,632) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt:(2,632/ - 3,244)

- Krümmung

	$x < 0$	0	$< x < 1,368$	$1,368$	$< x < 2,632$	$2,632$	$< x$
$f''(x)$	-	0	-	0	+	0	-

$$x \in]1,368; 2,632[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1,368[\cup]2,632; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

• Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
-7	-120050	92611,539	-59241,292	132775,304
$-6\frac{1}{2}$	-80550,945	66529,171	-45535,194	83167,977
-6	-52488	46657,025	-34344,223	50321,83
$-5\frac{1}{2}$	-33056,633	31820,037	-25342,13	29244,418
-5	-20000	21000,64	-18225,164	16205,358
$-4\frac{1}{2}$	-11533,008	13327,521	-12712,075	8481,704
-4	-6272	8064,365	-8544,113	4139,886
$-3\frac{1}{2}$	-3170,07	4598,607	-5485,029	1851,396
-3	-1458	2430,182	-3321,072	739,414
$-2\frac{1}{2}$	-590,82	1160,275	-1860,992	253,557
-2	-200	480,072	-936,04	69,943
$-1\frac{1}{2}$	-51,258	159,508	-399,964	13,75
-1	-8	36,018	-129,017	$1\frac{33}{70}$
$-\frac{1}{2}$	-0,383	3,287	-21,946	0,036
0	0	0	-0,003	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$F(x)$
0	0	0	-0,003	0
$\frac{1}{2}$	-0,195	-1,407	-6,937	-0,021
1	-2	-5,999	-8,998	$-\frac{33}{70}$
$1\frac{1}{2}$	-5,695	-7,592	5,063	-2,359
2	-8	0,001	23,997	$-5\frac{33}{35}$
$2\frac{1}{2}$	-4,883	11,715	14,054	-9,417
3	0	-0,017	-81,017	-10,414
$3\frac{1}{2}$	-18,758	-96,507	-339,964	-13,13
4	-128	-384,071	-864,04	-43,886
$4\frac{1}{2}$	-461,32	-1025,274	-1776,992	-177,938
5	-1250	-2250,181	-3225,072	-580,357
$5\frac{1}{2}$	-2859,57	-4367,606	-5377,029	-1563,777
6	-5832	-7776,364	-8424,113	-3665,829
$6\frac{1}{2}$	-10933,508	-12976,52	-12580,075	-7749,085
7	-19208	-20580,639	-18081,164	-15126,302

• Zeichnung

