Kurvendiskussion von gebrochenrationalen Funktionen
Aufgaben und Lösungen

http://www.fersch.de

Klemens Fersch

22. September 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Eigene Aufgaben lösen

Dieses PDF-Dokument wurde interaktiv auf http://www.fersch.de erstellt.
Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: Kurvendiskussion gebrochenrationalen Funktionen

2 Aufgabenstellung

Diskutieren Sie eine ganzrationale Funktion

- Ermitteln Sie die:
  - 1.Ableitung
  - 2.Ableitung
  - 3.Ableitung
- Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereich (Grenzwerte).
- Berechnen sie die Schnittpunkt der Funktion mit der x-Achse (Nullstellen).
- Wo liegt die Funktion oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse (Vorzeichentabelle)?
- Bestimmen Sie Art und Lage der Extremwerte (Hochpunkte/Tiefpunkte).
- In welchen Bereichen ist die Funktion streng monoton steigend (sms) oder streng monoton fallend (smf)?
- Überprüfen Sie die Funktion auf mögliche Wendepunkte und berechnen den Funktionswert .
- Geben Sie die Intervalle des Krümmungsverhaltens an.
- Zeichnen sie die Funktion mit Hilfe einer Wertetabelle.

3 Grundlagen

- Definitionsbereich : Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen

- Symmetrie
  - $f(-x) = -f(x) \to$ Punktsymmetrie zum Ursprung
  - $f(-x) = f(x) \to$ Achsensymmetrie zur y-Achse

- Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse
  Zähler gleich Null setzen
  $f(x) = 0$ siehe Nullstellen/Gleichungen

- Vorzeichentabelle
  Bei gebrochenrationalen Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen des Zählers und Nenners ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswert in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit f(x)

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	oberhalb der x-Achse	0	unterhalb der x-Achse

Vorzeichentabelle mit der 1.Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	steigend	0	fallend

Vorzeichentabelle mit der 2.Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	links gekrümmt	0	rechts gekrümmt

- Ableitungen
  Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen, vom Exponenten 1 abziehen:
  $f(x) = ax^n \to f'(x) = nax^{n-1}$
  Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion im Punkt x an.
  Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion im Punkt x an.
  Beispiel:
  $f(x) = 2x^3 \to f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 6x^2$
  $f'(x) = 6x^2 \to f''(x) = 6 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 12x$
  Ableitungsregeln:
  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Produktregel)
  $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ (Quotientenregel)
  $(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$ (Kettenregel)

- Extremwerte
  Notwendige Bedinung: 1. Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen
  Hinreichende Bedingung: Einsetzen der Nullstellen in die 2. Ableitung
  - $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum bei x_0.
  - $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Lokales Maximum bei x_0.
  - $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

- Wendepunkte
  Notwendige Bedinung: 2. Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen
  Hinreichende Bedingung: Einsetzen der Nullstellen in die 3. Ableitung
  - $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei x_0.

- $f'''(x_0) = 0 \Rightarrow$ Kein Wendepunkt.

4 Gebrochen-rationale Funktion

4.1 Aufgaben

(1) $\frac{x^2-4}{x}$

(2) $\frac{-x^2+4}{x-1}$

(3) $\frac{x^2+4}{x^2-1}$

(4) $\frac{x-2}{x^2-1}$

(5) $\frac{1}{x}$

(6) $\frac{-1}{x}$

(7) $\frac{1}{x+2}$

(8) $\frac{-1}{x-2}$

(9) $\frac{1}{x^2}$

(10) $\frac{-1}{x^2}$

(11) $\frac{1}{x^2+4}$

(12) $\frac{-1}{x^2-4}$

(13) $\frac{1}{x^2+2x+1}$

(14) $\frac{-1}{x^2-6x+9}$

(15) $\frac{x}{x^2}$

(16) $\frac{-3x+3}{x^2}$

(17) $\frac{2x+1}{x^2+4}$

(18) $\frac{-x+2}{x^2-4}$

(19) $\frac{4x+1}{x^2+2x+1}$

(20) $\frac{x^2}{x}$

(21) $\frac{x^2}{x-2}$

(22) $\frac{-x^2}{x+3}$

(23) $\frac{x^2+3x+9}{6x+18}$

(24) $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$

(25) $\frac{2x^2-8}{-2x^2+8x-8}$

(26) $\frac{x^2+2x+1}{2x^2+2x}$

(27) $\frac{-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{8}}{-\frac{1}{2}}$

(28) $\frac{5x+6}{-x}$

(29) $\frac{-3x+1}{x+2}$

(30) $\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}}{-\frac{1}{4}x-2}$

(31) $\frac{x^2-5x-27}{x+3}$

(32) $\frac{4x^2+12x+5}{2x+1}$

(33) $\frac{3x^3-10x^2+7x-12}{x-3}$

(34) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-2}$

(35) $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-1}$

(36) $\frac{3x^3-10x^2+7x-12}{x-3}$

(37) $\frac{\frac{1}{3}x^3-1\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2}{x-2}$

(38) $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x-2}$

(39) $\frac{x^3+5x^2-x-5}{x+1}$

(40) $\frac{3x^3-x^2-3x+1}{x-1}$

(41) $\frac{x^3-8x+2}{x+2}$

(42) $\frac{x^4-3x^2-4}{x^2-4}$

(43) $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-3x+2}$

4.2 Lösungen

Aufgabe (1)

•Funktion/Faktorisieren
$f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x}$
Zaehler faktorisieren:
$x^2-4=0$

$1x^2-4=0 \qquad /+4$
$1x^2=4 \qquad /:1$
$x^2=\dfrac{4}{1}$
$x=\pm\sqrt{4}$
$x_1=2 \qquad x_2=-2$
$\underline{x_1=-2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2=2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x=0$
$x=0 \Rightarrow x=0$
$\underline{x_3=0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f\left(x\right)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0;\}$
$f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x}$
$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l}
\quad (x^2 \qquad\quad -4 \quad):(x)=x \\
-(x^2) \\
\hline
\qquad\qquad -4
\end{array}$$

$f(x)=x+\dfrac{-4}{x}$
• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$=f'\left(x\right)=\dfrac{2x\cdot x-(x^2-4)\cdot 1}{(x)^2}$
$=\dfrac{2x^2-(x^2-4)}{(x)^2}$
$=\dfrac{x^2+4}{(x)^2}$
$=\dfrac{x^2+4}{x^2}f'\left(x\right)=\dfrac{x^2+4}{x^2}$
$f''\left(x\right)=\dfrac{2x\cdot x^2-(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2)^2}$
$=\dfrac{2x^3-(2x^3+8x)}{(x^2)^2}$
$=\dfrac{-8x}{(x^2)^2}$
$=\dfrac{-8x}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler=0$
$x^2-4=0$
$\underline{x_4=-2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5=2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Schiefe Asymptote:$y = x$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$

Vertikale Asymptote: $x = 0$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-2;0[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]0;2[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$1x^2 + 4 = 0 \qquad / -4$

$1x^2 = -4 \qquad / : 1$

$x^2 = \frac{-4}{1}$

keine Lösung

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

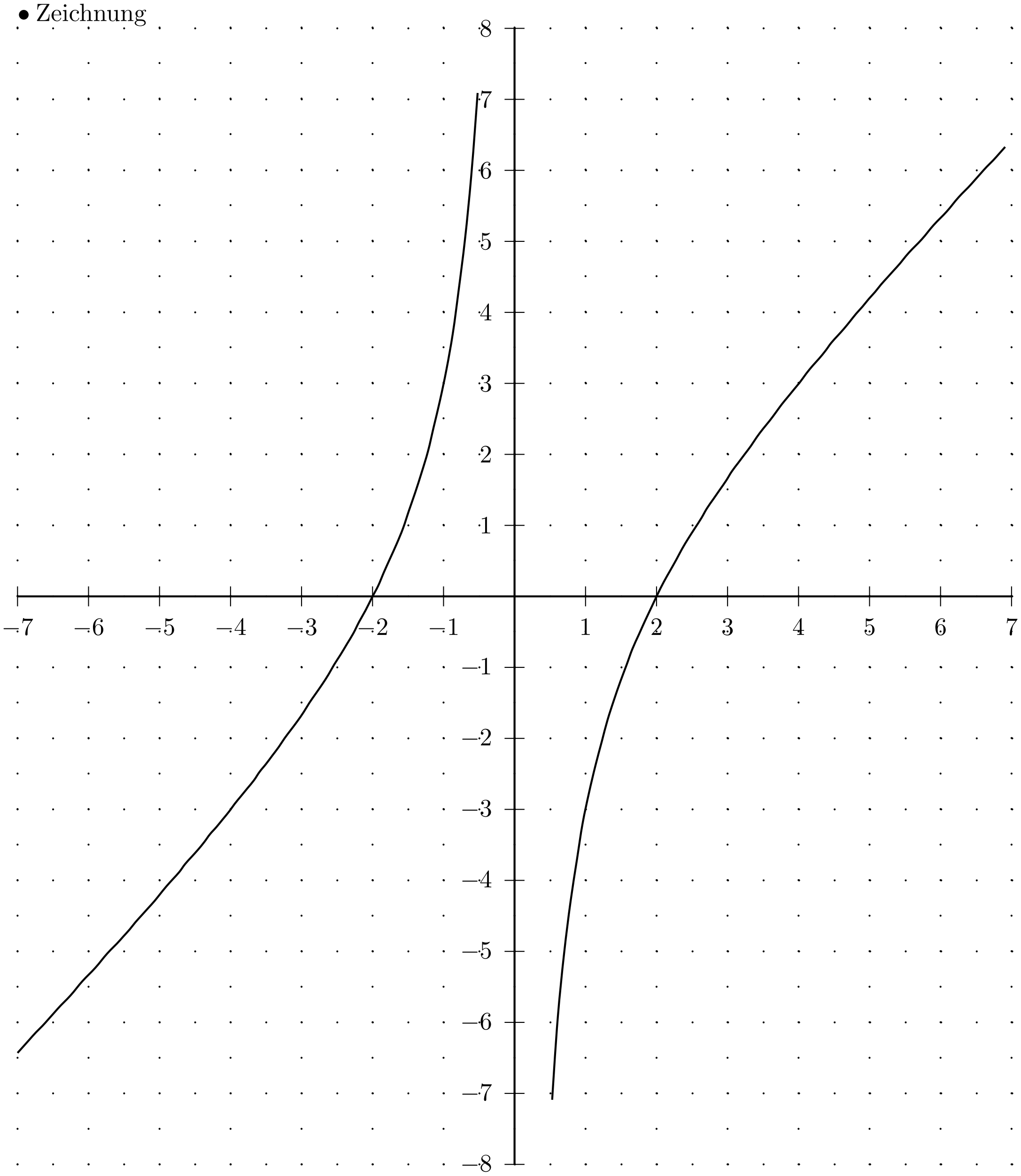
$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-6\frac{3}{7}$	$1\frac{4}{49}$	$0,023$
$-6\frac{1}{2}$	$-5\frac{23}{26}$	$1,095$	$0,029$
-6	$-5\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
$-5\frac{1}{2}$	$-4\frac{17}{22}$	$1,132$	$0,048$
-5	$-4\frac{1}{5}$	$1\frac{4}{25}$	$0,064$
$-4\frac{1}{2}$	$-3\frac{11}{18}$	$1,198$	$0,088$
-4	-3	$1,25$	$0,125$
$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{5}{14}$	$1,327$	$0,187$
-3	$-1\frac{2}{3}$	$1,444$	$0,296$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{10}$	$1,64$	$0,512$
-2	0	2	1
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{6}$	$2,778$	$2,371$
-1	3	$5,001$	$8,001$
$-\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	$17,009$	$64,035$
0	$-unendlich$	$-29386\frac{37}{49}$	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	$-29386\frac{37}{49}$	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{2}$	$17,009$	$-64,035$
1	-3	$5,001$	$-8,001$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{6}$	$2,778$	$-2,371$
2	0	2	-1
$2\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$	$1,64$	$-0,512$
3	$1\frac{2}{3}$	$1,444$	$-0,296$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{14}$	$1,327$	$-0,187$
4	3	$1,25$	$-0,125$
$4\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{18}$	$1,198$	$-0,088$
5	$4\frac{1}{5}$	$1\frac{4}{25}$	$-0,064$
$5\frac{1}{2}$	$4\frac{17}{22}$	$1,132$	$-0,048$
6	$5\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{27}$
$6\frac{1}{2}$	$5\frac{23}{26}$	$1,095$	$-0,029$
7	$6\frac{3}{7}$	$1\frac{4}{49}$	$-0,023$

• Zeichnung



Aufgabe (2)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-x^2+4}{x-1}$

Zaehler faktorisieren:

$-x^2+4=0$

$-x^2+4=0 \qquad /-4$

$-x^2=-4 \qquad /:(-1)$

$x^2=\frac{-4}{-1}$

$x=\pm\sqrt{4}$

$x_1=2 \qquad x_2=-2$

$\underline{x_1=-2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x-1=0$

$x-1=0 \qquad /+1$

$x=1$

$\underline{x_3=1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-(x+2)(x-2)}{(x-1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;\}$

$f(x) = \frac{-x^2+4}{x-1}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{llll}
(-x^2 & & +4 &):(x-1)=-x-1 \\
-(-x^2 & +x) & & \\
\hline
& -x & +4 & \\
& -(-x & +1) & \\
\hline
& & 3 &
\end{array}$$

$f(x)=-x-1+\frac{3}{x-1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \frac{(-2x)\cdot(x-1)-(-x^2+4)\cdot 1}{(x-1)^2}$

$= \frac{(-2x^2+2x)-(-x^2+4)}{(x-1)^2}$

$= \frac{-x^2+2x-4}{(x-1)^2}$

$= \frac{-x^2+2x-4}{x^2-2x+1} f'(x) = \frac{-x^2+2x-4}{x^2-2x+1}$

$f''(x) = \frac{(-2x+2)\cdot(x^2-2x+1)-(-x^2+2x-4)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2}$

$= \frac{(-2x^3+6x^2-6x+2)-(-2x^3+6x^2-12x+8)}{(x^2-2x+1)^2}$

$= \frac{+6x-6}{(x^2-2x+1)^2}$

$= \frac{+6x-6}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler=0$

$-x^2+4=0$

$\underline{x_4 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \; \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Schiefe Asymptote:$y = -x - 1$
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = 1$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]1; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-2; 1[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$-x^2 + 2x - 4 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$$
$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{-2}$$
Diskriminante negativ keine Lösung

$1x^2 - 2x + 1 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$x_{1/2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$
$$x_1 = \frac{2+0}{2} \qquad x_2 = \frac{2-0}{2}$$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1$

	$x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

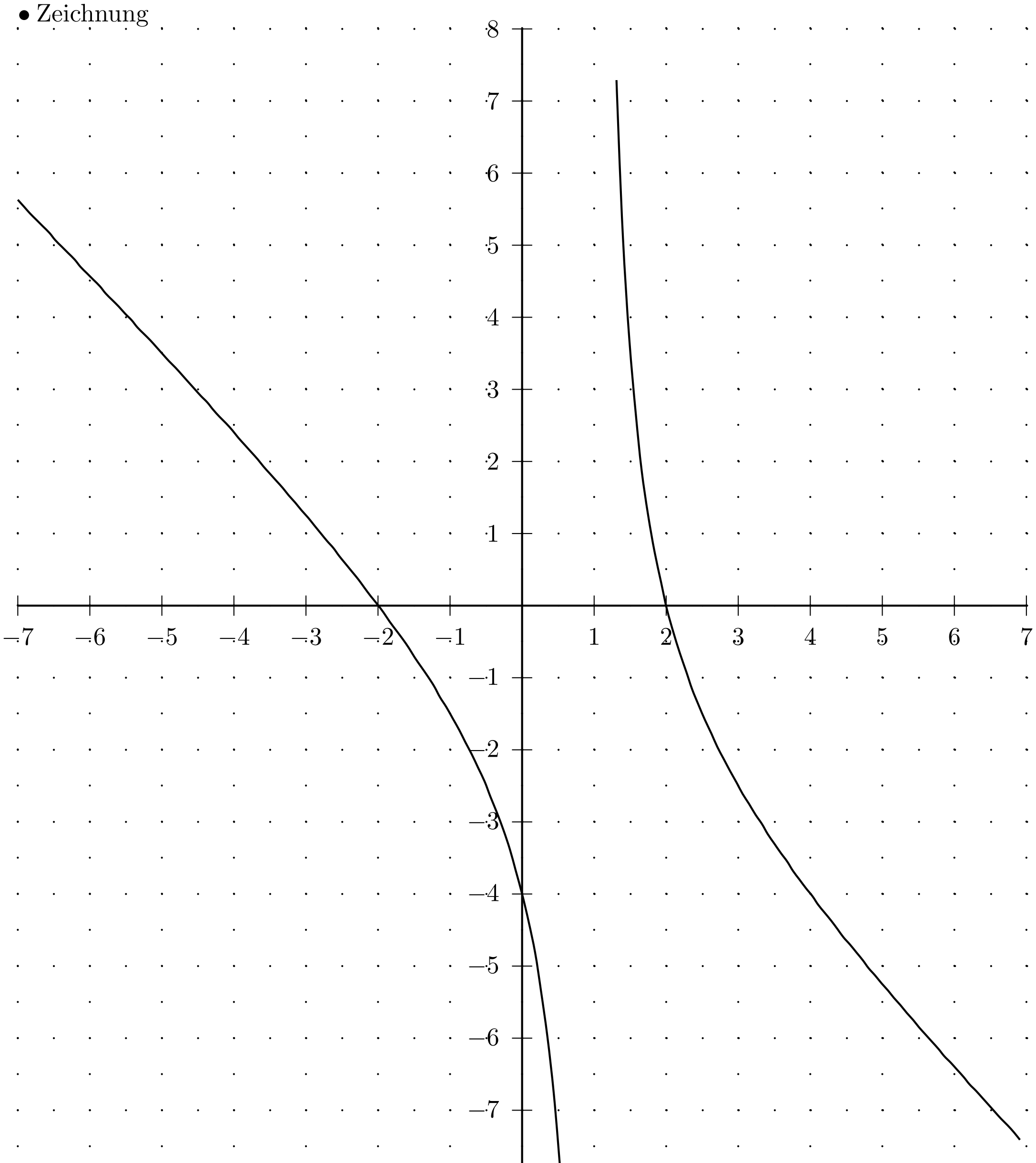
$\underline{\quad x \in]-\infty; 1[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$5\frac{5}{8}$	$-1\frac{3}{64}$	$-0,012$
$-6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{10}$	$-1\frac{4}{75}$	$-0,014$
-6	$4\frac{4}{7}$	$-1\frac{3}{49}$	$-0,017$
$-5\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{26}$	$-1,071$	$-0,022$
-5	$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{36}$
$-4\frac{1}{2}$	$2\frac{21}{22}$	$-1,099$	$-0,036$
-4	$2\frac{2}{5}$	$-1\frac{3}{25}$	$-0,048$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{6}$	$-1\frac{4}{27}$	$-0,066$
-3	$1\frac{1}{4}$	$-1,188$	$-\frac{3}{32}$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{9}{14}$	$-1,245$	$-0,14$
-2	0	$-1,333$	$-0,222$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{10}$	$-1,48$	$-0,384$
-1	$-1\frac{1}{2}$	$-1,75$	$-0,75$
$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-2,333$	$-1,778$
0	-4	-4	$-6,001$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-4	-4	$-6,001$
$\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{2}$	$-13,007$	$-48,026$
1	$+unendlich$	$22039\frac{40}{49}$	$-unendlich$
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$-13,007$	$48,026$
2	0	-4	$6,001$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-2,333$	$1,778$
3	$-2\frac{1}{2}$	$-1,75$	$0,75$
$3\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{10}$	$-1,48$	$0,384$
4	-4	$-1,333$	$0,222$
$4\frac{1}{2}$	$-4\frac{9}{14}$	$-1,245$	$0,14$
5	$-5\frac{1}{4}$	$-1,188$	$\frac{3}{32}$
$5\frac{1}{2}$	$-5\frac{5}{6}$	$-1\frac{4}{27}$	$0,066$
6	$-6\frac{2}{5}$	$-1\frac{3}{25}$	$0,048$
$6\frac{1}{2}$	$-6\frac{21}{22}$	$-1,099$	$0,036$
7	$-7\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

• Zeichnung



Aufgabe (3)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2+4=0$

$1x^2+4=0 \qquad /-4$

$1x^2=-4 \qquad /:1$

$x^2=\frac{-4}{1}$

keine Lösung

Nenner faktorisieren:

$x^2-1=0$

$1x^2-1=0 \qquad /+1$

$1x^2=1 \qquad /:1$

$x^2=\frac{1}{1}$

$x=\pm\sqrt{1}$

$x_1=1 \qquad x_2=-1$

$\underline{x_1=-1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x^2+4)}{(x+1)(x-1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1;\}$

$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{lll} (x^2 & +4 &) : (x^2-1) = 1 \\ -(x^2 & -1) & \\ \hline & 5 & \end{array}$$

$f(x) = 1 + \frac{5}{x^2-1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{(2x^3-2x)-(2x^3+8x)}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{-10x}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{-10x}{x^4-2x^2+1} f'(x) = \frac{-10x}{x^4-2x^2+1}$

$f''(x) = \frac{(-10)\cdot(x^4-2x^2+1)-(-10x)\cdot(4x^3-4x)}{(x^4-2x^2+1)^2}$

$= \frac{(-10x^4+20x^2-10)-(-40x^4+40x^2)}{(x^4-2x^2+1)^2}$

$= \frac{30x^4-20x^2-10}{(x^4-2x^2+1)^2}$

$= \frac{30x^4-20x^2-10}{x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$x^2+4=0$

• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$
Horizontale Asymptote: $y = 1$
$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = -1$
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = 1$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -(\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-1; 1[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$x = 0 \Rightarrow x = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 - 2u + 1 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$u_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$u_{1/2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$
$$u_1 = \frac{2 + 0}{2} \qquad u_2 = \frac{2 - 0}{2}$$
$u_1 = 1 \qquad u_2 = 1$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -(\quad \cup \quad]-1; 0[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

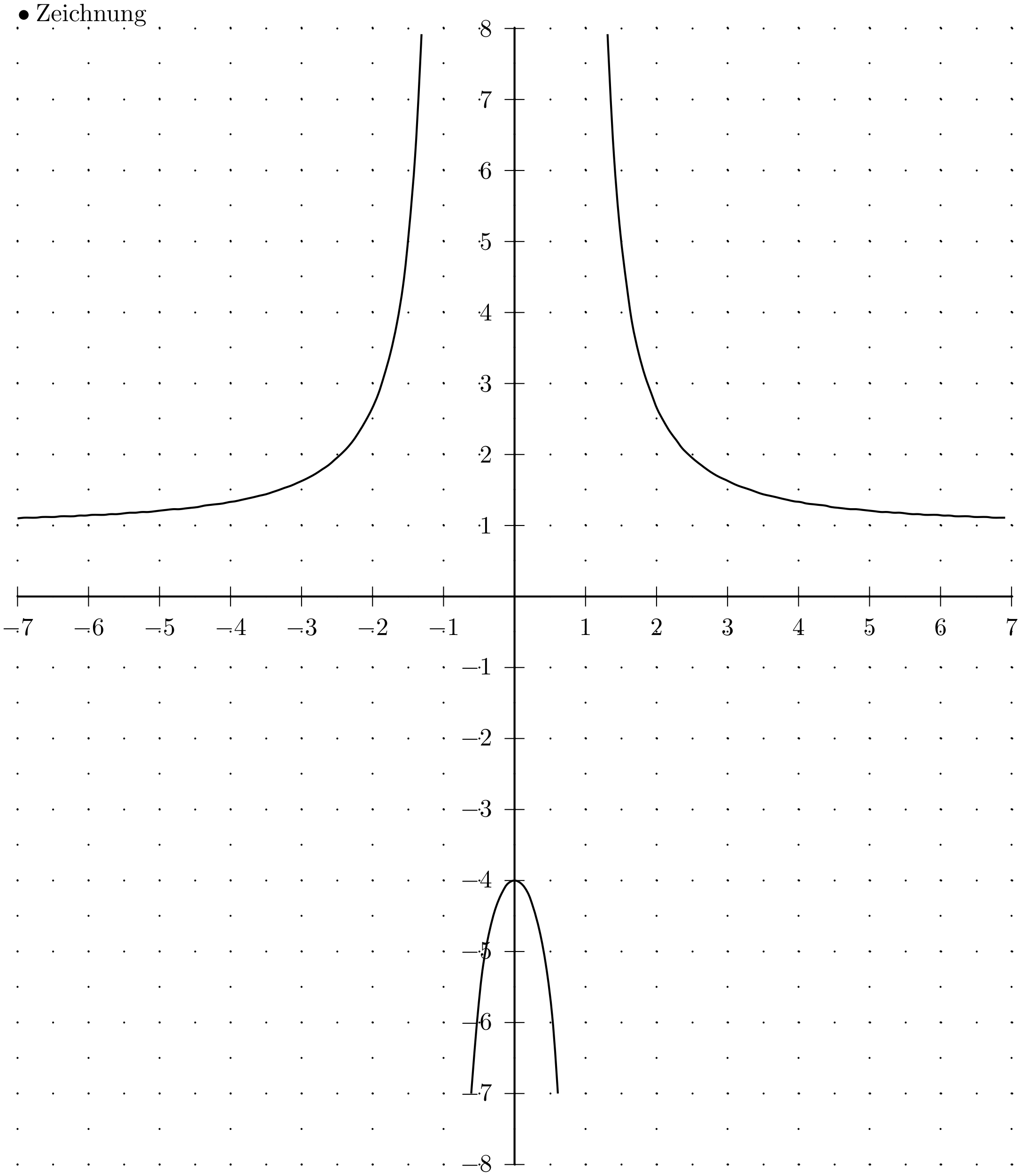
$x \in]0; 1[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$1\frac{5}{48}$	$0,03$	$0,013$
$-6\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{33}$	$0,038$	$0,018$
-6	$1\frac{1}{7}$	$0,049$	$0,025$
$-5\frac{1}{2}$	$1,171$	$0,064$	$0,037$
-5	$1\frac{5}{24}$	$0,087$	$0,055$
$-4\frac{1}{2}$	$1\frac{20}{77}$	$0,121$	$0,087$
-4	$1\frac{1}{3}$	$0,178$	$0,145$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{9}$	$0,277$	$0,265$
-3	$1\frac{5}{8}$	$0,469$	$0,547$
$-2\frac{1}{2}$	$1\frac{20}{21}$	$0,907$	$1,365$
-2	$2\frac{2}{3}$	$2,223$	$4,815$
$-1\frac{1}{2}$	5	$9,605$	$39,702$
-1	$+unendlich$	$-18367,972$	$-unendlich$
$-\frac{1}{2}$	$-5\frac{2}{3}$	$8,894$	$-41,503$
0	-4	0	$-10,001$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-4	0	$-10,001$
$\frac{1}{2}$	$-5\frac{2}{3}$	$-8,894$	$-41,503$
1	$+unendlich$	$18367,972$	$-unendlich$
$1\frac{1}{2}$	5	$-9,605$	$39,702$
2	$2\frac{2}{3}$	$-2,223$	$4,815$
$2\frac{1}{2}$	$1\frac{20}{21}$	$-0,907$	$1,365$
3	$1\frac{5}{8}$	$-0,469$	$0,547$
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{9}$	$-0,277$	$0,265$
4	$1\frac{1}{3}$	$-0,178$	$0,145$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{20}{77}$	$-0,121$	$0,087$
5	$1\frac{5}{24}$	$-0,087$	$0,055$
$5\frac{1}{2}$	$1,171$	$-0,064$	$0,037$
6	$1\frac{1}{7}$	$-0,049$	$0,025$
$6\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{33}$	$-0,038$	$0,018$
7	$1\frac{5}{48}$	$-0,03$	$0,013$

• Zeichnung



Aufgabe (4)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$
Zaehler faktorisieren:
$x-2=0$

$x-2=0 \qquad /+2$
$x=2$
$\underline{x_1 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2-1=0$

$1x^2-1=0 \qquad /+1$
$1x^2=1 \qquad /:1$
$x^2=\frac{1}{1}$
$x=\pm\sqrt{1}$
$x_1=1 \qquad x_2=-1$
$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{(x-2)}{(x+1)(x-1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; \}$
$f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$= f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-1) - (x-2) \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$
$= \frac{(x^2-1)-(2x^2-4x)}{(x^2-1)^2}$
$= \frac{-x^2+4x-1}{(x^2-1)^2}$
$= \frac{-x^2+4x-1}{x^4-2x^2+1} f'(x) = \frac{-x^2+4x-1}{x^4-2x^2+1}$
$f''(x) = \frac{(-2x+4)\cdot(x^4-2x^2+1)-(-x^2+4x-1)\cdot(4x^3-4x)}{(x^4-2x^2+1)^2}$
$= \frac{(-2x^5+4x^4+4x^3-8x^2-2x+4)-(-4x^5+16x^4-16x^2+4x)}{(x^4-2x^2+1)^2}$
$= \frac{2x^5-12x^4+4x^3+8x^2-6x+4}{(x^4-2x^2+1)^2}$
$= \frac{2x^5-12x^4+4x^3+8x^2-6x+4}{x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x-2=0$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Horizontale Asymptote: $y=0$
$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x=-1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = 1$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-1;1[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-(\quad \cup \quad]1;2[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$-x^2 + 4x - 1 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 3,464}{-2}$
$x_1 = \dfrac{-4 + 3,464}{-2} \qquad x_2 = \dfrac{-4 - 3,464}{-2}$
$x_1 = 0,268 \qquad x_2 = 3,732$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 - 2u + 1 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$
$u_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{0}}{2}$
$u_{1/2} = \dfrac{2 \pm 0}{2}$
$u_1 = \dfrac{2 + 0}{2} \qquad u_2 = \dfrac{2 - 0}{2}$
$u_1 = 1 \qquad u_2 = 1$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

	$x <$	-1	$< x <$	$0,268$	$< x <$	1	$< x <$	$3,732$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]0,268;1[\quad \cup \quad]1;3,732[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

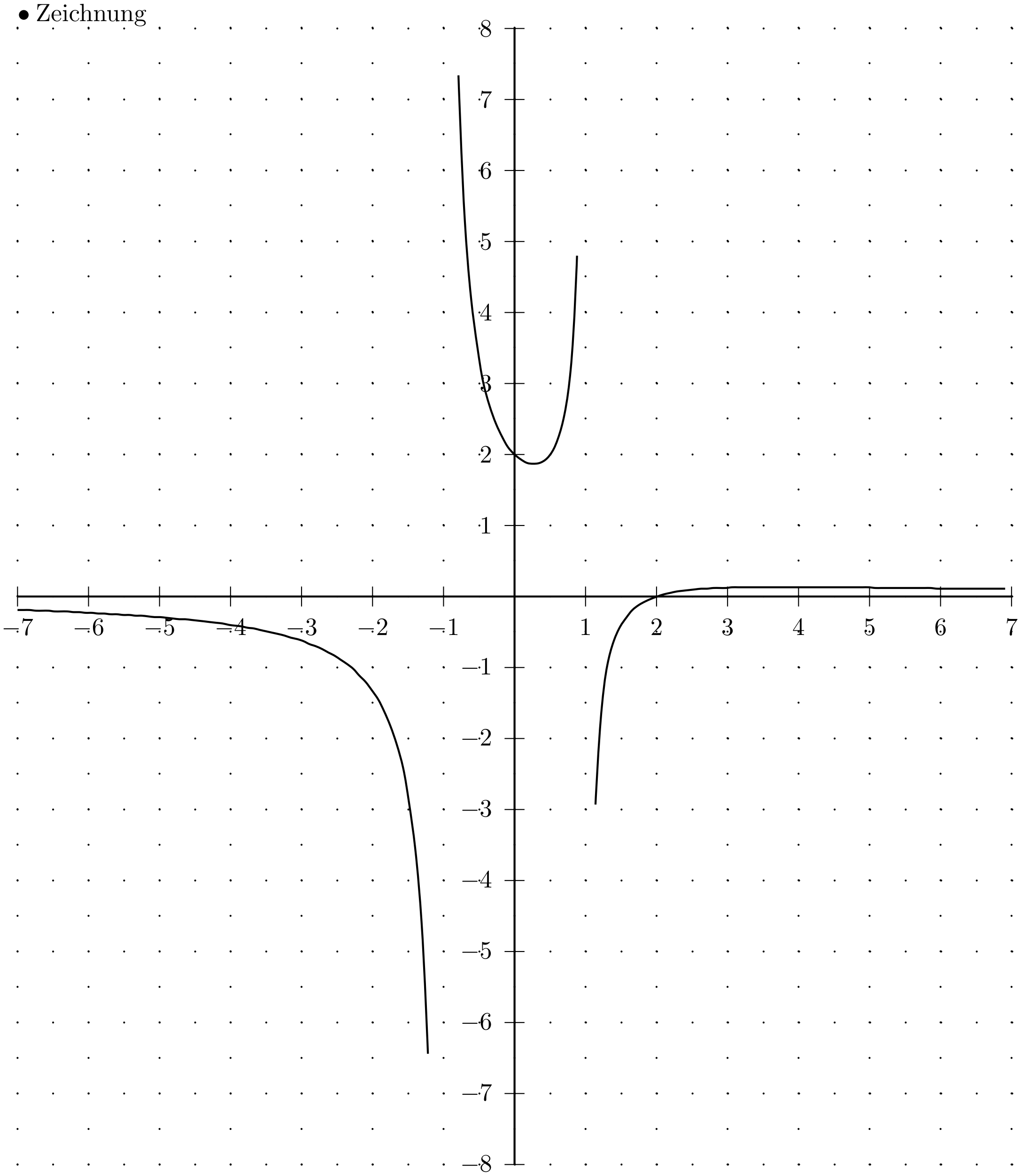
$x \in]-\infty;-(\quad \cup \quad]-1;0,268[\quad \cup \quad]3,732;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{3}{16}$	$-0,034$	$-0,012$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,206$	$-0,041$	$-0,016$
-6	$-\frac{8}{35}$	$-0,05$	$-0,021$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{10}{39}$	$-0,062$	$-0,029$
-5	$-\frac{7}{24}$	$-0,08$	$-0,042$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{26}{77}$	$-0,106$	$-0,064$
-4	$-\frac{2}{5}$	$-0,147$	$-0,103$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{22}{45}$	$-0,215$	$-0,181$
-3	$-\frac{5}{8}$	$-0,344$	$-0,359$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{7}$	$-0,626$	$-0,866$
-2	$-1\frac{1}{3}$	$-1,445$	$-2,963$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{4}{5}$	$-5,923$	$-23,949$
-1	$-unendlich$	$11020,533$	$+unendlich$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$-5,781$	$24,309$
0	2	-1	$4,001$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	2	-1	$4,001$
$\frac{1}{2}$	2	$1,334$	$8,893$
1	$-unendlich$	$-3673,844$	$+unendlich$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$1,761$	$-7,812$
2	0	$0,333$	$-0,889$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{21}$	$0,1$	$-0,226$
3	$\frac{1}{8}$	$0,031$	$-0,078$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$0,006$	$-0,031$
4	$\frac{2}{15}$	$-0,004$	$-0,013$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{10}{77}$	$-0,009$	$-0,005$
5	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{96}$	$-0,002$
$5\frac{1}{2}$	$0,12$	$-0,011$	0
6	$\frac{4}{35}$	$-0,011$	$0,001$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{6}{55}$	$-0,01$	$0,001$
7	$\frac{5}{48}$	$-0,01$	$0,001$

• Zeichnung



Aufgabe (5)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{1}{x}$
Nenner faktorisieren:
$x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{1}{x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$= f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{(x)^2}$
$= \frac{0 - 1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{x^2} f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - (-2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1 = 0$
keine Loesung
• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = 0$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]0;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

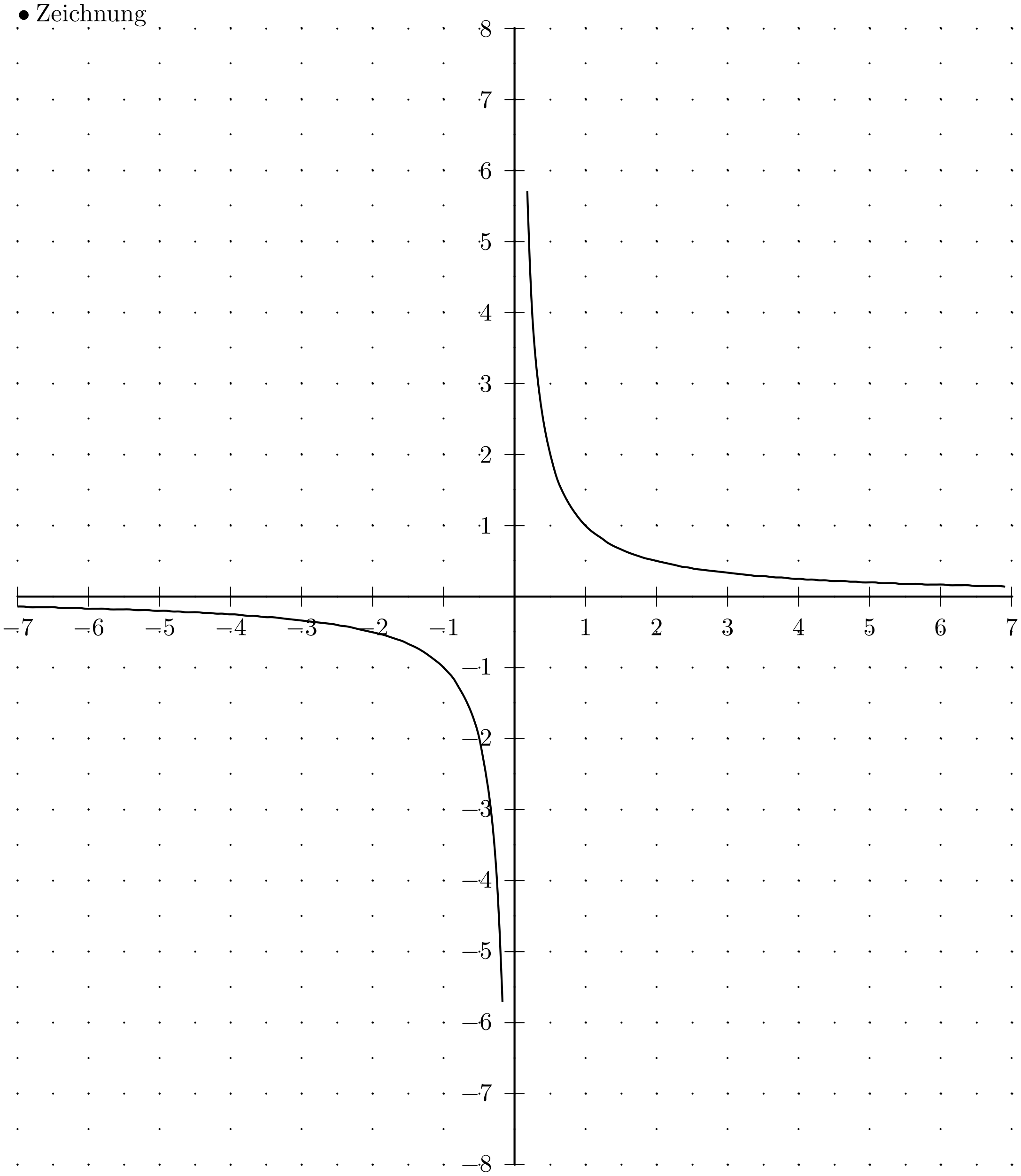
$\underline{x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$-0,006$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$-0,024$	$-0,007$
-6	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$-0,009$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$-0,033$	$-0,012$
-5	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-0,016$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,022$
-4	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{49}$	$-0,047$
-3	$-\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,074$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-2	$-\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,444$	$-0,593$
-1	-1	-1	-2
$-\frac{1}{2}$	-2	$-4,002$	$-16,009$
0	$+unendlich$	$7346\frac{46}{49}$	$-unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$+unendlich$	$7346\frac{46}{49}$	$-unendlich$
$\frac{1}{2}$	2	$-4,002$	$16,009$
1	1	-1	2
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,444$	$0,593$
2	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,16$	$0,128$
3	$\frac{1}{3}$	$-0,111$	$0,074$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{49}$	$0,047$
4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,022$
5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$0,016$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$-0,033$	$0,012$
6	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$0,009$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,024$	$0,007$
7	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,006$

• Zeichnung



Aufgabe (6)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{-1}{x}$
Nenner faktorisieren:
$x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{-1}{x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;\}$
$f(x) = \frac{-1}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$= f'(x) = \frac{0 \cdot x - (-1) \cdot 1}{(x)^2}$
$= \frac{0 - (-1)}{(x)^2}$
$= \frac{1}{(x)^2}$
$= \frac{1}{x^2} f'(x) = \frac{1}{x^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-1 = 0$
keine Loesung
• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = 0$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

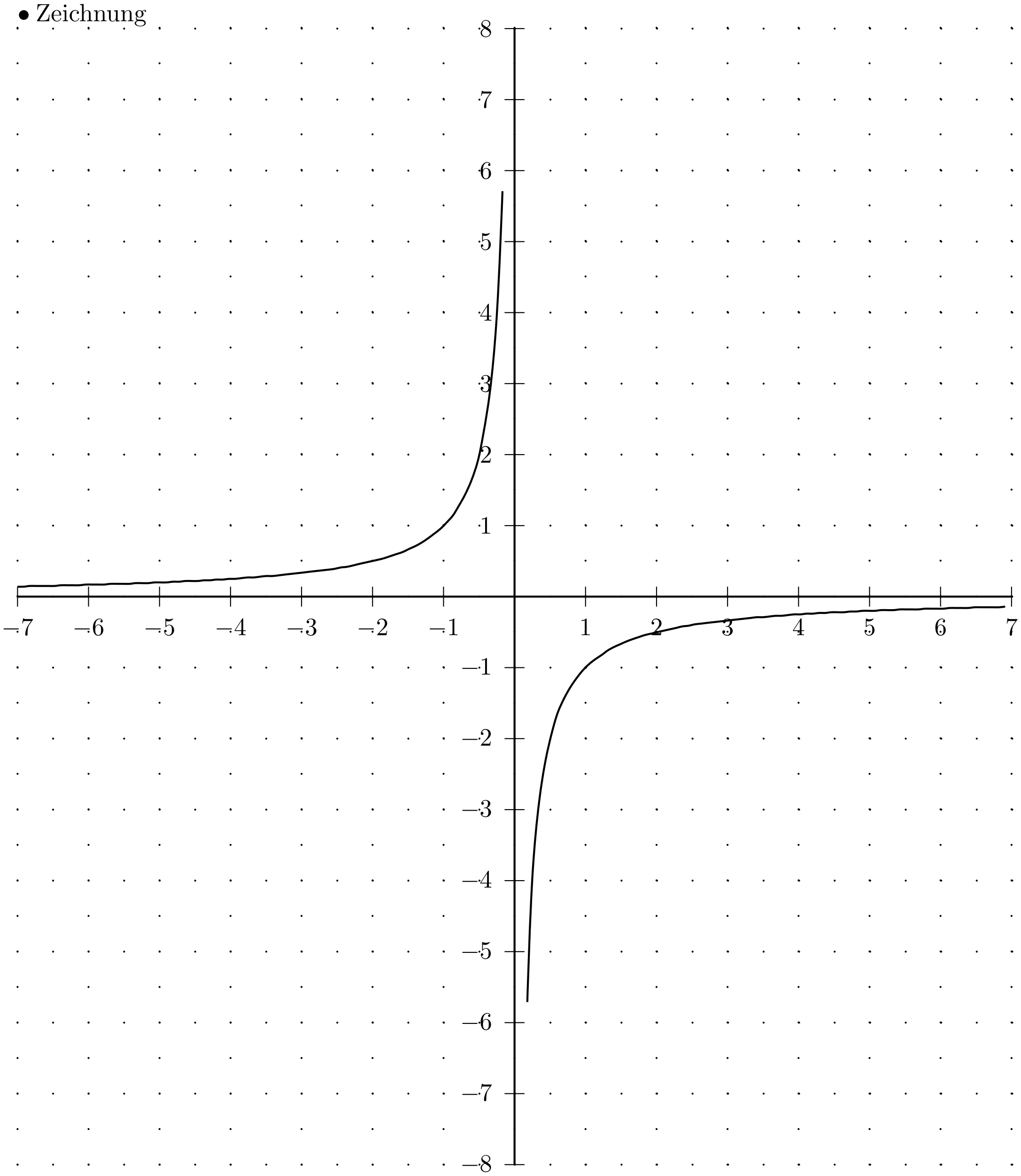
$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$0,006$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$0,024$	$0,007$
-6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$0,009$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$0,033$	$0,012$
-5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$0,016$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$0,022$
-4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{49}$	$0,047$
-3	$\frac{1}{3}$	$0,111$	$0,074$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$0,16$	$0,128$
-2	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$0,444$	$0,593$
-1	1	1	2
$-\frac{1}{2}$	2	$4,002$	$16,009$
0	$-unendlich$	$-7346\frac{46}{49}$	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	$-7346\frac{46}{49}$	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	-2	$4,002$	$-16,009$
1	-1	1	-2
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$0,444$	$-0,593$
2	$-\frac{1}{2}$	$0,25$	$-0,25$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$0,16$	$-0,128$
3	$-\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,074$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{4}{49}$	$-0,047$
4	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$-0,022$
5	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$-0,016$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$0,033$	$-0,012$
6	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$-0,009$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$0,024$	$-0,007$
7	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$-0,006$

• Zeichnung



Aufgabe (7)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
Nenner faktorisieren:
$x + 2 = 0$

$x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$x = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{1}{(x+2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2;\}$
$f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$= f'(x) = \dfrac{0 \cdot (x+2) - 1 \cdot 1}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{0-1}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{-1}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{-1}{x^2+4x+4} f'(x) = \dfrac{-1}{x^2+4x+4}$
$f''(x) = \dfrac{0 \cdot (x^2+4x+4) - (-1) \cdot (2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \dfrac{0-(-2x-4)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \dfrac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \dfrac{2x+4}{x^4+8x^3+24x^2+32x+16}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1 = 0$
keine Loesung
• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = -2$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$1x^2 + 4x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-4 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-4 - 0}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -2$

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

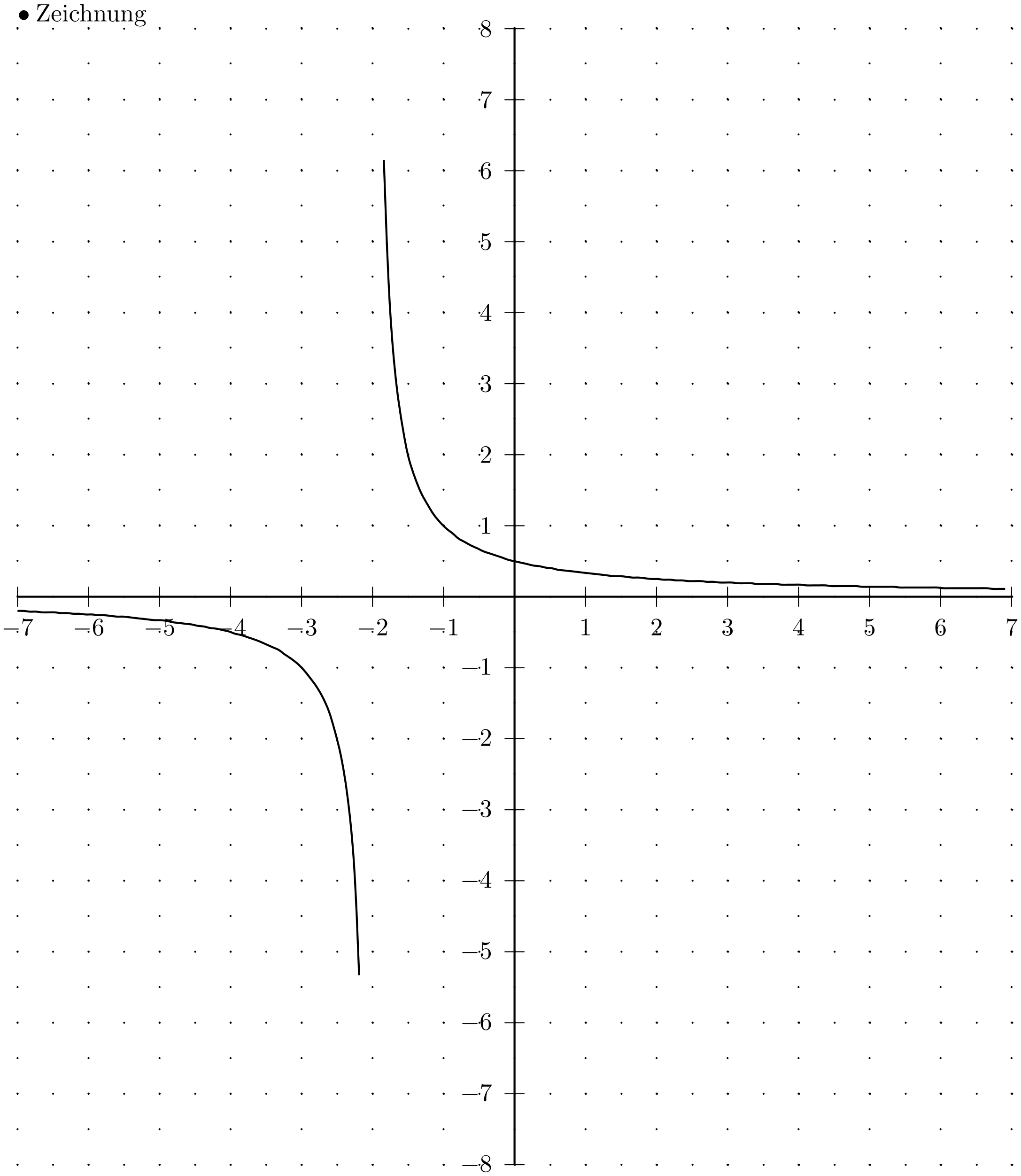
$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-0,016$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,022$
-6	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{49}$	$-0,047$
-5	$-\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,074$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-4	$-\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,444$	$-0,593$
-3	-1	-1	-2
$-2\frac{1}{2}$	-2	$-4,002$	$-16,009$
-2	$+unendlich$	$7346\frac{46}{49}$	$-unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	2	$-4,002$	$16,009$
-1	1	-1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,444$	$0,593$
0	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,16$	$0,128$
1	$\frac{1}{3}$	$-0,111$	$0,074$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{49}$	$0,047$
2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,022$
3	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$0,016$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$-0,033$	$0,012$
4	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$0,009$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,024$	$0,007$
5	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,006$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$-0,018$	$0,005$
6	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{64}$	$0,004$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{17}$	$-0,014$	$0,003$
7	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{81}$	$0,003$

• Zeichnung



Aufgabe (8)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{-1}{x-2}$
Nenner faktorisieren:
$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad / + 2$
$x = 2$
$\underline{x_1 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{-1}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2;\}$
$f(x) = \frac{-1}{x-2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$= f'(x) = \frac{0 \cdot (x-2) - (-1) \cdot 1}{(x-2)^2}$
$= \frac{0-(-1)}{(x-2)^2}$
$= \frac{1}{(x-2)^2}$
$= \frac{1}{x^2-4x+4} f'(x) = \frac{1}{x^2-4x+4}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2-4x+4) - 1 \cdot (2x-4)}{(x^2-4x+4)^2}$
$= \frac{0-(2x-4)}{(x^2-4x+4)^2}$
$= \frac{-2x+4}{(x^2-4x+4)^2}$
$= \frac{-2x+4}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-1 = 0$
keine Loesung
• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = 2$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$1x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$x_{1/2} = \frac{4 \pm 0}{2}$$
$$x_1 = \frac{4+0}{2} \qquad x_2 = \frac{4-0}{2}$$
$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$$

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

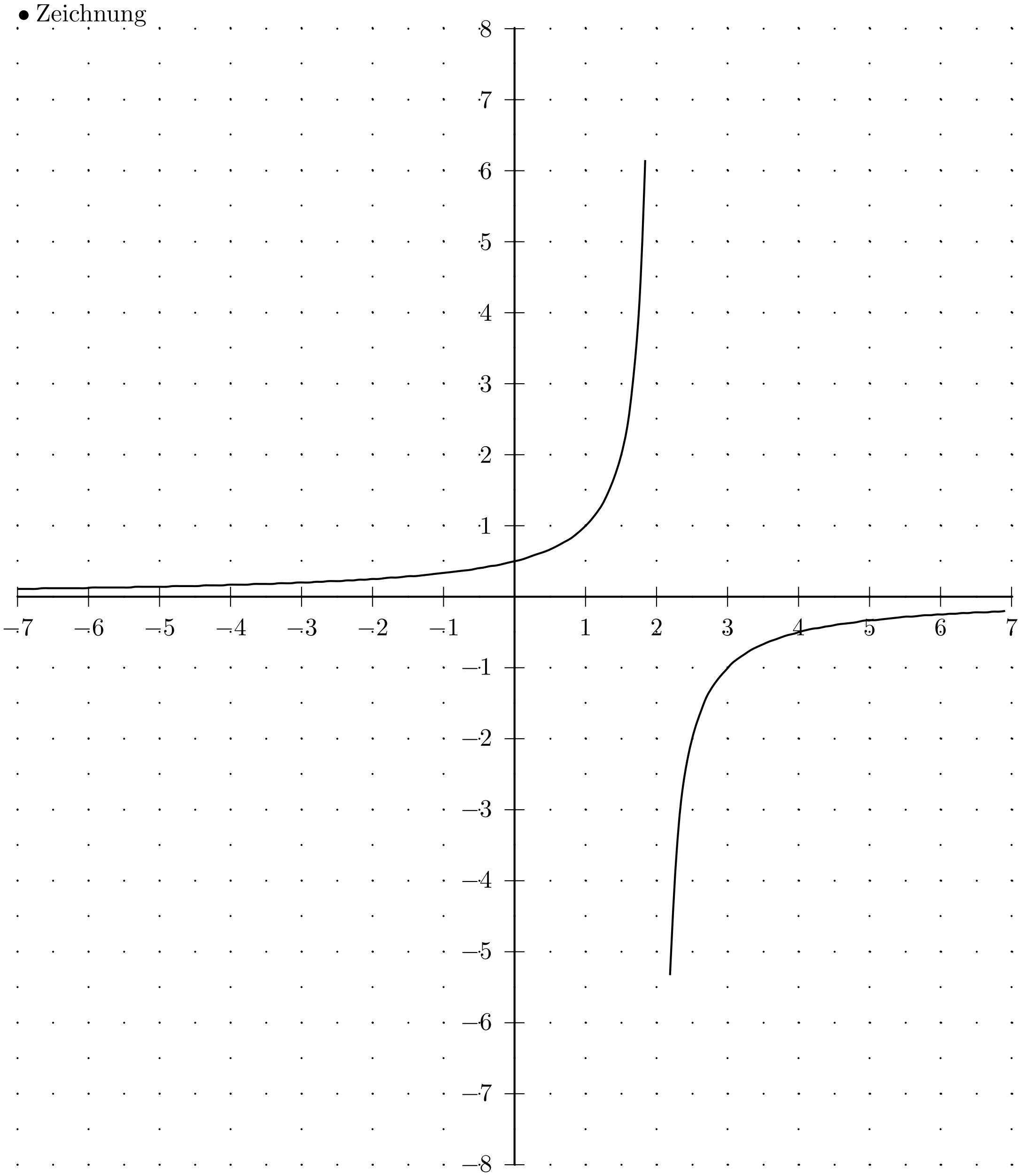
$x \in]-\infty; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$	$0,003$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{17}$	$0,014$	$0,003$
-6	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$0,004$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$0,018$	$0,005$
-5	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$0,006$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$0,024$	$0,007$
-4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$0,009$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$0,033$	$0,012$
-3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$0,016$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$0,022$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{49}$	$0,047$
-1	$\frac{1}{3}$	$0,111$	$0,074$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$0,16$	$0,128$
0	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$0,444$	$0,593$
1	1	1	2
$1\frac{1}{2}$	2	$4,002$	$16,009$
2	$-unendlich$	$-7346\frac{46}{49}$	$+unendlich$
$2\frac{1}{2}$	-2	$4,002$	$-16,009$
3	-1	1	-2
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$0,444$	$-0,593$
4	$-\frac{1}{2}$	$0,25$	$-0,25$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$0,16$	$-0,128$
5	$-\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,074$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{4}{49}$	$-0,047$
6	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$-0,022$
7	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$-0,016$

• Zeichnung



Aufgabe (9)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;\}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{0 - 2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{-2x}{x^4} f'(x) = \frac{-2x}{x^4}$

$f''(x) = \frac{(-2) \cdot x^4 - (-2x) \cdot 4x^3}{(x^4)^2}$

$= \frac{(-2x^4) - (-8x^4)}{(x^4)^2}$

$= \frac{6x^4}{(x^4)^2}$

$= \frac{6x^4}{x^8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$1 = 0$

keine Loesung

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$

Vertikale Asymptote: $x = 0$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$x = 0 \Rightarrow x = 0$

$x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

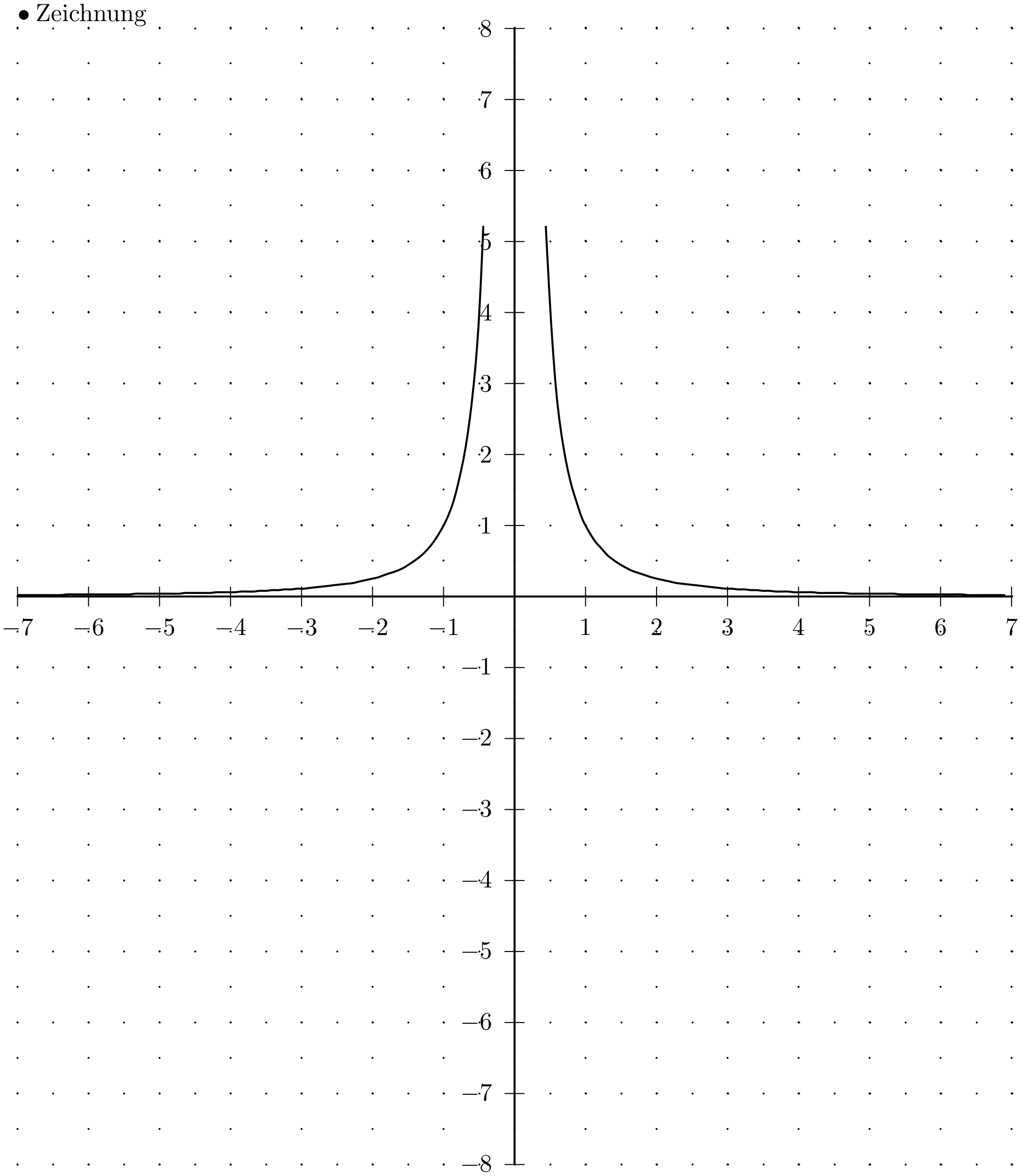
$\underline{x \in]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{49}$	$0,006$	$0,002$
$-6\frac{1}{2}$	$0,024$	$0,007$	$0,003$
-6	$\frac{1}{36}$	$0,009$	$0,005$
$-5\frac{1}{2}$	$0,033$	$0,012$	$0,007$
-5	$\frac{1}{25}$	$0,016$	$0,01$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{4}{81}$	$0,022$	$0,015$
-4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$0,023$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{4}{49}$	$0,047$	$0,04$
-3	$\frac{1}{9}$	$0,074$	$0,074$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$	$0,128$	$0,154$
-2	$\frac{1}{4}$	$0,25$	$0,375$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$0,593$	$1,185$
-1	1	$2,001$	$6,001$
$-\frac{1}{2}$	4	$16,017$	$96,087$
0	$+unendlich$	0	$-unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$+unendlich$	0	$-unendlich$
$\frac{1}{2}$	4	$-16,017$	$96,087$
1	1	$-2,001$	$6,001$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$-0,593$	$1,185$
2	$\frac{1}{4}$	$-0,25$	$0,375$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$	$-0,128$	$0,154$
3	$\frac{1}{9}$	$-0,074$	$0,074$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{4}{49}$	$-0,047$	$0,04$
4	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	$0,023$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{4}{81}$	$-0,022$	$0,015$
5	$\frac{1}{25}$	$-0,016$	$0,01$
$5\frac{1}{2}$	$0,033$	$-0,012$	$0,007$
6	$\frac{1}{36}$	$-0,009$	$0,005$
$6\frac{1}{2}$	$0,024$	$-0,007$	$0,003$
7	$\frac{1}{49}$	$-0,006$	$0,002$

• Zeichnung



Aufgabe (10)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{-1}{x^2}$
Nenner faktorisieren:
$x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{-1}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;\}$
$f(x) = \frac{-1}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$= f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - (-2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{x^4} f'(x) = \frac{2x}{x^4}$
$f''(x) = \frac{2 \cdot x^4 - 2x \cdot 4x^3}{(x^4)^2}$
$= \frac{2x^4 - 8x^4}{(x^4)^2}$
$= \frac{-6x^4}{(x^4)^2}$
$= \frac{-6x^4}{x^8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-1 = 0$
keine Loesung
• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = 0$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

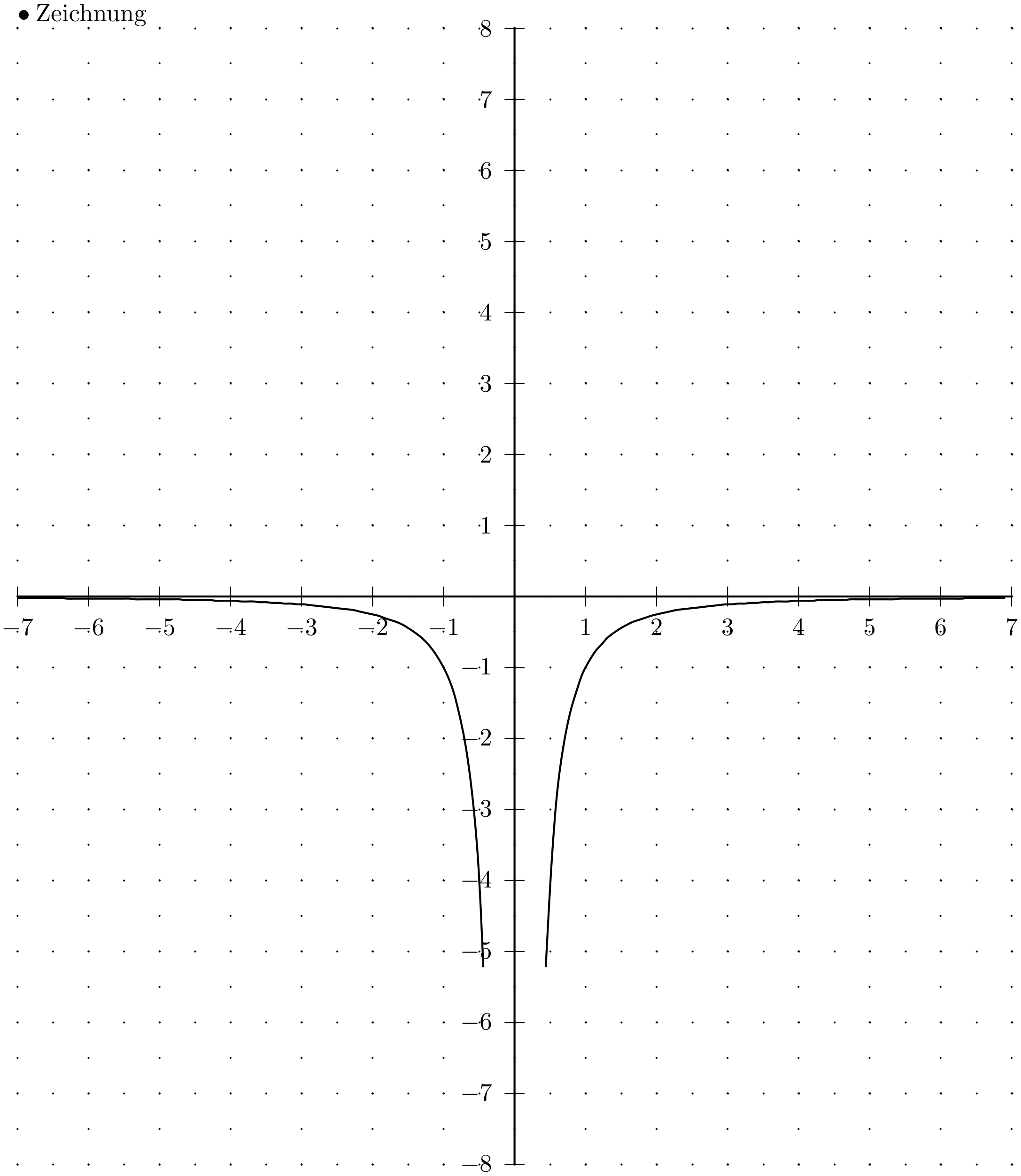
$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{49}$	$-0,006$	$-0,002$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,024$	$-0,007$	$-0,003$
-6	$-\frac{1}{36}$	$-0,009$	$-0,005$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,033$	$-0,012$	$-0,007$
-5	$-\frac{1}{25}$	$-0,016$	$-0,01$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,022$	$-0,015$
-4	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	$-0,023$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{49}$	$-0,047$	$-0,04$
-3	$-\frac{1}{9}$	$-0,074$	$-0,074$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{25}$	$-0,128$	$-0,154$
-2	$-\frac{1}{4}$	$-0,25$	$-0,375$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{9}$	$-0,593$	$-1,185$
-1	-1	$-2,001$	$-6,001$
$-\frac{1}{2}$	-4	$-16,017$	$-96,087$
0	$-unendlich$	0	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	0	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	-4	$16,017$	$-96,087$
1	-1	$2,001$	$-6,001$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{9}$	$0,593$	$-1,185$
2	$-\frac{1}{4}$	$0,25$	$-0,375$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{25}$	$0,128$	$-0,154$
3	$-\frac{1}{9}$	$0,074$	$-0,074$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{49}$	$0,047$	$-0,04$
4	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$-0,023$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{81}$	$0,022$	$-0,015$
5	$-\frac{1}{25}$	$0,016$	$-0,01$
$5\frac{1}{2}$	$-0,033$	$0,012$	$-0,007$
6	$-\frac{1}{36}$	$0,009$	$-0,005$
$6\frac{1}{2}$	$-0,024$	$0,007$	$-0,003$
7	$-\frac{1}{49}$	$0,006$	$-0,002$

• Zeichnung



Aufgabe (11)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$
Nenner faktorisieren:
$x^2+4=0$

$1x^2+4=0 \qquad /-4$
$1x^2=-4 \qquad /:1$
$x^2=\dfrac{-4}{1}$
keine Lösung

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{1}{(x^2+4)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$= f'(x) = \dfrac{0\cdot(x^2+4)-1\cdot 2x}{(x^2+4)^2}$
$= \dfrac{0-2x}{(x^2+4)^2}$
$= \dfrac{-2x}{(x^2+4)^2}$
$= \dfrac{-2x}{x^4+8x^2+16} f'(x) = \dfrac{-2x}{x^4+8x^2+16}$
$f''(x) = \dfrac{(-2)\cdot(x^4+8x^2+16)-(-2x)\cdot(4x^3+16x)}{(x^4+8x^2+16)^2}$
$= \dfrac{(-2x^4-16x^2-32)-(-8x^4-32x^2)}{(x^4+8x^2+16)^2}$
$= \dfrac{6x^4+16x^2-32}{(x^4+8x^2+16)^2}$
$= \dfrac{6x^4+16x^2-32}{x^8+16x^6+96x^4+256x^2+256}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler=0$
$1=0$
keine Loesung
• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
Horizontale Asymptote: $y=0$

• Vorzeichentabelle:
kein Vorzeichenwechsel

$x\in\mathbb{R}$	$f(x)>0$	oberhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$x=0 \Rightarrow x=0$

$u=x^2 \qquad u^2=x^4$
$1u^2+8u+16=0$

$u_{1/2} = \dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot16}}{2\cdot1}$

$u_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$
$u_{1/2} = \frac{-8 \pm 0}{2}$
$u_1 = \frac{-8 + 0}{2} \qquad u_2 = \frac{-8 - 0}{2}$
$u_1 = -4 \qquad u_2 = -4$
$x^2 = -4 x = \pm\sqrt{-4}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$x^2 = -4 x = \pm\sqrt{-4}$
Diskriminante negativ keine Lösung

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

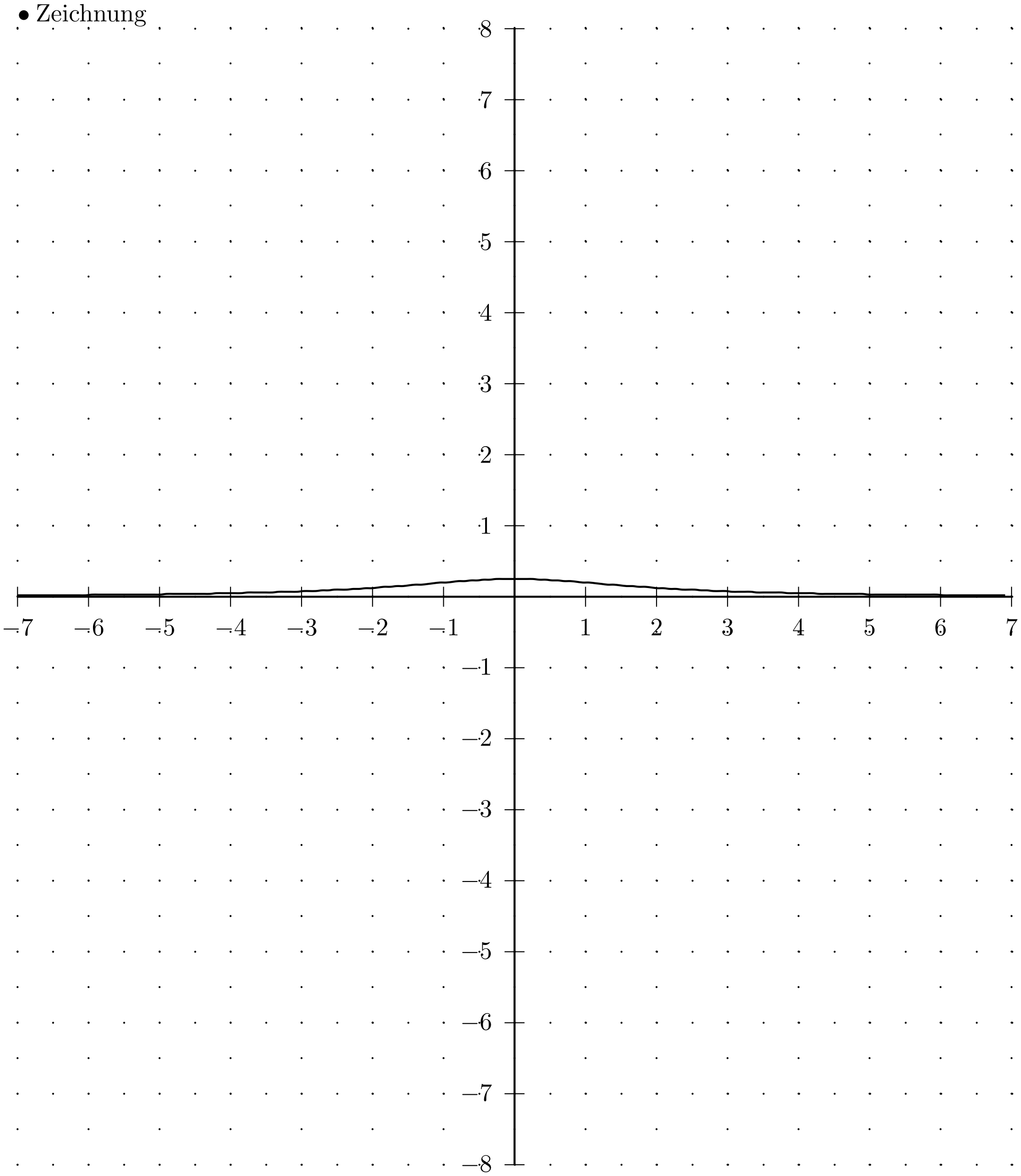
$x \in]0; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{53}$	$0,005$	$0,002$
$-6\frac{1}{2}$	$0,022$	$0,006$	$0,002$
-6	$\frac{1}{40}$	$0,008$	$0,003$
$-5\frac{1}{2}$	$0,029$	$0,009$	$0,004$
-5	$\frac{1}{29}$	$0,012$	$0,006$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{4}{97}$	$0,015$	$0,008$
-4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{50}$	$0,011$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{4}{65}$	$0,027$	$0,015$
-3	$\frac{1}{13}$	$0,036$	$0,021$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{41}$	$0,048$	$0,027$
-2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$	$0,077$	$0,023$
-1	$\frac{1}{5}$	$0,08$	$-0,016$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{17}$	$0,055$	$-0,085$
0	$\frac{1}{4}$	0	$-0,125$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{4}$	0	$-0,125$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{17}$	$-0,055$	$-0,085$
1	$\frac{1}{5}$	$-0,08$	$-0,016$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$	$-0,077$	$0,023$
2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{41}$	$-0,048$	$0,027$
3	$\frac{1}{13}$	$-0,036$	$0,021$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{4}{65}$	$-0,027$	$0,015$
4	$\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{50}$	$0,011$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{4}{97}$	$-0,015$	$0,008$
5	$\frac{1}{29}$	$-0,012$	$0,006$
$5\frac{1}{2}$	$0,029$	$-0,009$	$0,004$
6	$\frac{1}{40}$	$-0,008$	$0,003$
$6\frac{1}{2}$	$0,022$	$-0,006$	$0,002$
7	$\frac{1}{53}$	$-0,005$	$0,002$

• Zeichnung



Aufgabe (12)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-1}{x^2-4}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - 4 = 0$

$1x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$

$1x^2 = 4 \qquad / : 1$

$x^2 = \frac{4}{1}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-1}{(x+2)(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2;\}$

$f(x) = \frac{-1}{x^2-4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2-4) - (-1) \cdot 2x}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{0 - (-2x)}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{2x}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{2x}{x^4-8x^2+16} f'(x) = \frac{2x}{x^4-8x^2+16}$

$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^4-8x^2+16) - 2x \cdot (4x^3-16x)}{(x^4-8x^2+16)^2}$

$= \frac{(2x^4-16x^2+32) - (8x^4-32x^2)}{(x^4-8x^2+16)^2}$

$= \frac{-6x^4+16x^2+32}{(x^4-8x^2+16)^2}$

$= \frac{-6x^4+16x^2+32}{x^8-16x^6+96x^4-256x^2+256}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-1 = 0$

keine Loesung

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim_{x\to-2} f(x) = \infty$

Vertikale Asymptote: $x = -2$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$

Vertikale Asymptote: $x = 2$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-2; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$x = 0 \Rightarrow x = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 - 8u + 16 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$$
$$u_{1/2} = \frac{+8 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$u_{1/2} = \frac{8 \pm 0}{2}$$
$$u_1 = \frac{8+0}{2} \qquad u_2 = \frac{8-0}{2}$$
$u_1 = 4 \qquad u_2 = 4$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$x \in]0; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

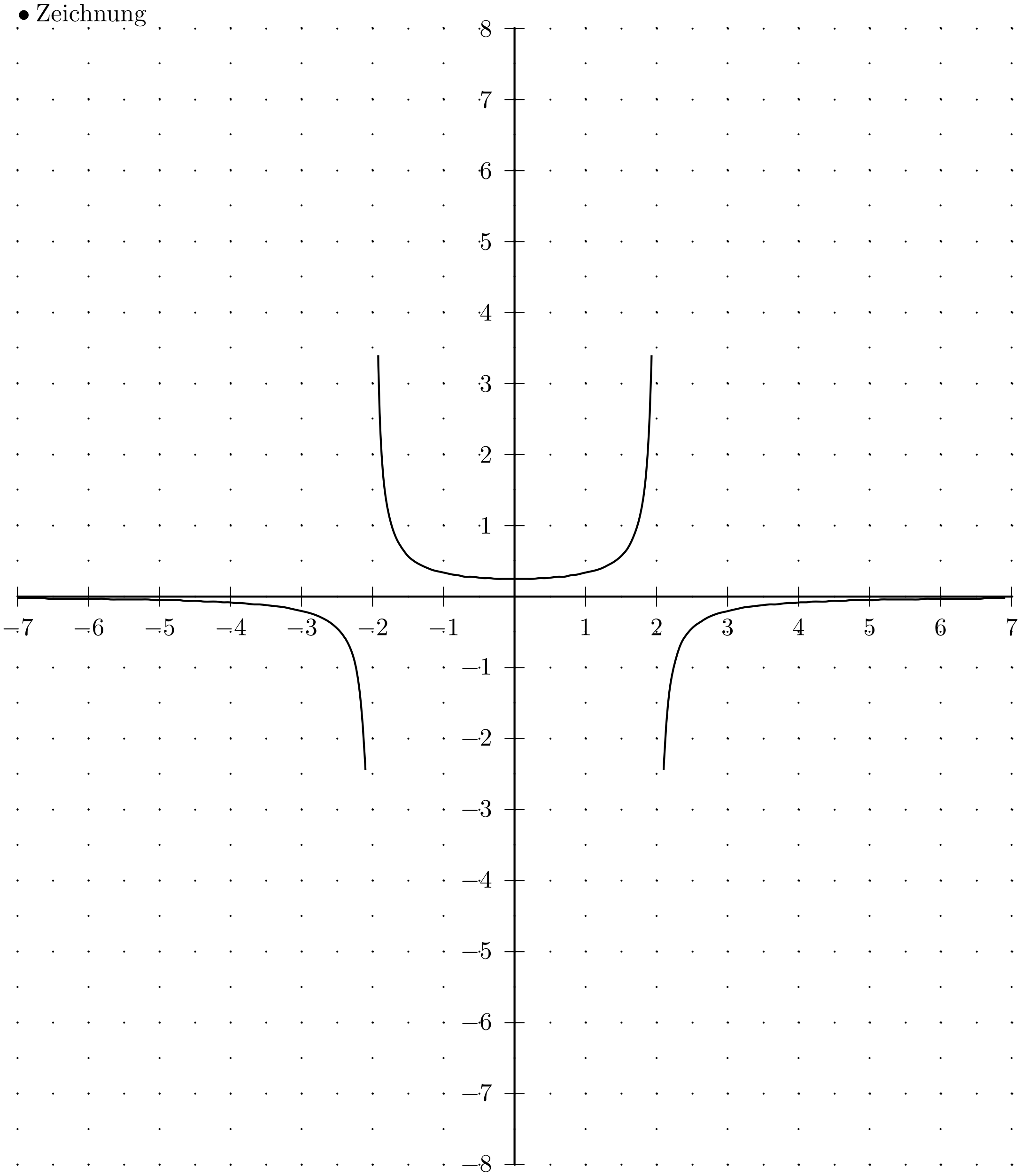
$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; 0[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{45}$	$-0,007$	$-0,003$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,026$	$-0,009$	$-0,005$
-6	$-\frac{1}{32}$	$-0,012$	$-0,007$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,038$	$-0,016$	$-0,01$
-5	$-\frac{1}{21}$	$-0,023$	$-0,017$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{65}$	$-0,034$	$-0,03$
-4	$-\frac{1}{12}$	$-0,056$	$-0,06$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{33}$	$-0,103$	$-0,145$
-3	$-\frac{1}{5}$	$-0,24$	$-0,496$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{9}$	$-0,988$	$-3,997$
-2	$-unendlich$	$1836,75$	$+unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$-0,98$	$4,014$
-1	$\frac{1}{3}$	$-0,222$	$0,519$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{15}$	$-0,071$	$0,18$
0	$\frac{1}{4}$	0	$0,125$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{4}$	0	$0,125$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{15}$	$0,071$	$0,18$
1	$\frac{1}{3}$	$0,222$	$0,519$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$0,98$	$4,014$
2	$-unendlich$	$-1836,75$	$+unendlich$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{9}$	$0,988$	$-3,997$
3	$-\frac{1}{5}$	$0,24$	$-0,496$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{33}$	$0,103$	$-0,145$
4	$-\frac{1}{12}$	$0,056$	$-0,06$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{65}$	$0,034$	$-0,03$
5	$-\frac{1}{21}$	$0,023$	$-0,017$
$5\frac{1}{2}$	$-0,038$	$0,016$	$-0,01$
6	$-\frac{1}{32}$	$0,012$	$-0,007$
$6\frac{1}{2}$	$-0,026$	$0,009$	$-0,005$
7	$-\frac{1}{45}$	$0,007$	$-0,003$

• Zeichnung



Aufgabe (13)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$1x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2 - 0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;\}$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \dfrac{0 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 1 \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{0 - (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{-2x - 2}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{-2x - 2}{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1} f'(x) = \dfrac{-2x - 2}{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}$

$f''(x) = \dfrac{(-2) \cdot (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) - (-2x - 2) \cdot (4x^3 + 12x^2 + 12x + 4)}{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)^2}$

$= \dfrac{(-2x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 8x - 2) - (-8x^4 - 32x^3 - 48x^2 - 32x - 8)}{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)^2}$

$= \dfrac{6x^4 + 24x^3 + 36x^2 + 24x + 6}{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)^2}$

$= \dfrac{6x^4 + 24x^3 + 36x^2 + 24x + 6}{x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x + 1}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$1 = 0$

keine Loesung

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$

Vertikale Asymptote: $x = -1$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -(\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$-2x - 2 = 0 \qquad / + 2$
$-2x = 2 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{2}{-2}$
$x = -1$

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llllll}
(x^4 & +4x^3 & +6x^2 & +4x & +1 &) : (x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
-(x^4 & +x^3) & & & & \\
\hline
& 3x^3 & +6x^2 & +4x & +1 & \\
& -(3x^3 & +3x^2) & & & \\
\hline
& & 3x^2 & +4x & +1 & \\
& & -(3x^2 & +3x) & & \\
\hline
& & & x & +1 & \\
& & & -(x & +1) & \\
\hline
& & & & 0 &
\end{array}$$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & +3x^2 & +3x & +1 &) : (x+1) = x^2 + 2x + 1 \\
-(x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
& 2x^2 & +3x & +1 & \\
& -(2x^2 & +2x) & & \\
\hline
& & x & +1 & \\
& & -(x & +1) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2 + 2x + 1 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$
$x_1 = \frac{-2 + 0}{2} \qquad x_2 = \frac{-2 - 0}{2}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -($ $\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

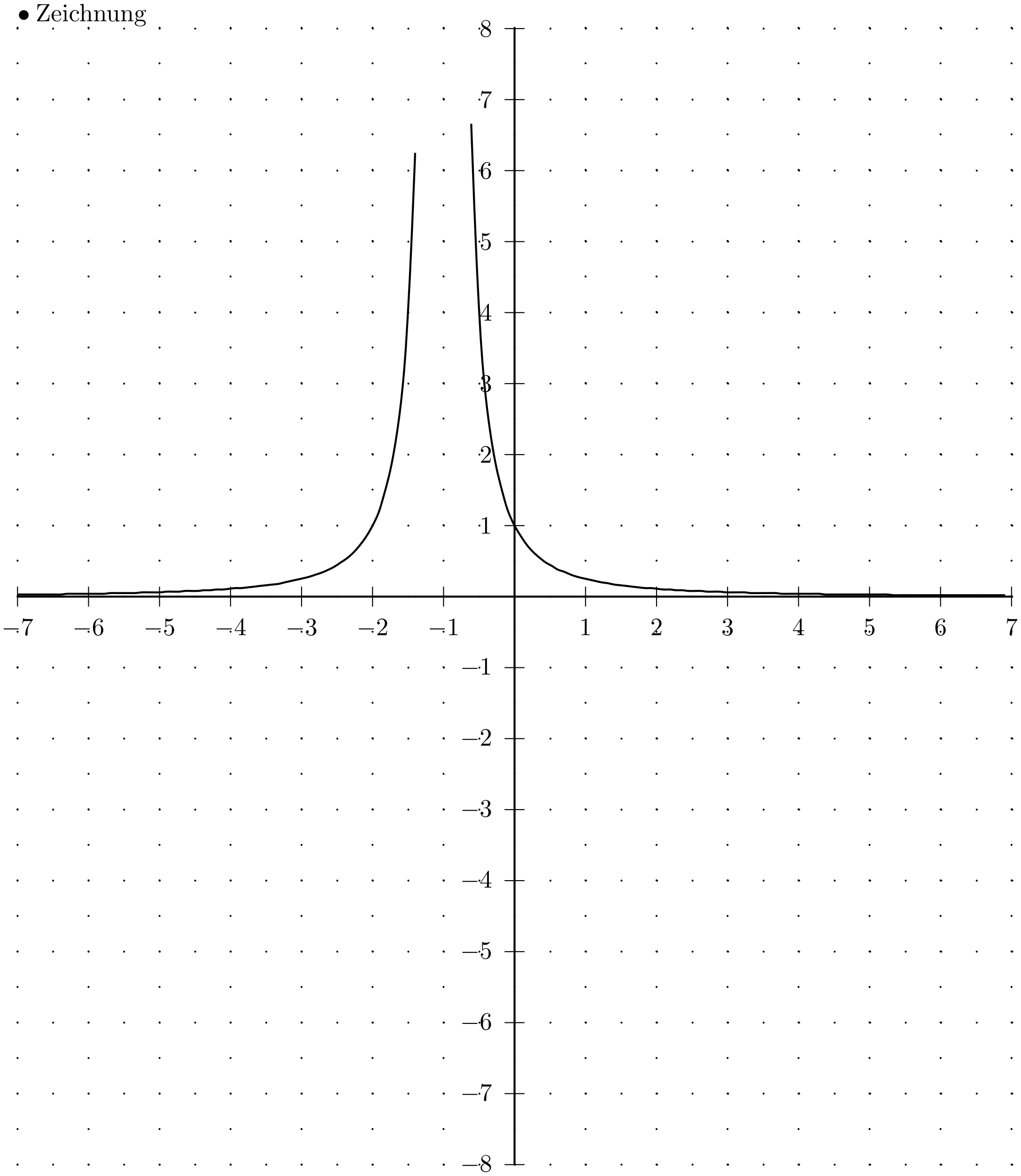
$x \in]-1; \infty[$ $\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{36}$	$0,009$	$0,005$
$-6\frac{1}{2}$	$0,033$	$0,012$	$0,007$
-6	$\frac{1}{25}$	$0,016$	$0,01$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{4}{81}$	$0,022$	$0,015$
-5	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$0,023$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{4}{49}$	$0,047$	$0,04$
-4	$\frac{1}{9}$	$0,074$	$0,074$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$	$0,128$	$0,154$
-3	$\frac{1}{4}$	$0,25$	$0,375$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$0,593$	$1,185$
-2	1	$2,001$	$6,001$
$-1\frac{1}{2}$	4	$16,017$	$96,087$
-1	$+unendlich$	0	$-unendlich$
$-\frac{1}{2}$	4	$-16,017$	$96,087$
0	1	$-2,001$	$6,001$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$-2,001$	$6,001$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$-0,593$	$1,185$
1	$\frac{1}{4}$	$-0,25$	$0,375$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$	$-0,128$	$0,154$
2	$\frac{1}{9}$	$-0,074$	$0,074$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{49}$	$-0,047$	$0,04$
3	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	$0,023$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{4}{81}$	$-0,022$	$0,015$
4	$\frac{1}{25}$	$-0,016$	$0,01$
$4\frac{1}{2}$	$0,033$	$-0,012$	$0,007$
5	$\frac{1}{36}$	$-0,009$	$0,005$
$5\frac{1}{2}$	$0,024$	$-0,007$	$0,003$
6	$\frac{1}{49}$	$-0,006$	$0,002$
$6\frac{1}{2}$	$0,018$	$-0,005$	$0,002$
7	$\frac{1}{64}$	$-0,004$	$0,001$

• Zeichnung



Aufgabe (14)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-1}{x^2-6x+9}$

Nenner faktorisieren:

$x^2-6x+9=0$

$1x^2-6x+9=0$

$x_{1/2} = \dfrac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{+6 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{6 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{6+0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{6-0}{2}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$

$\underline{x_1 = 3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{-1}{(x-3)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3;\}$

$f(x) = \dfrac{-1}{x^2-6x+9}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \dfrac{0\cdot(x^2-6x+9)-(-1)\cdot(2x-6)}{(x^2-6x+9)^2}$

$= \dfrac{0-(-2x+6)}{(x^2-6x+9)^2}$

$= \dfrac{2x-6}{(x^2-6x+9)^2}$

$= \dfrac{2x-6}{x^4-12x^3+54x^2-108x+81} f'(x) = \dfrac{2x-6}{x^4-12x^3+54x^2-108x+81}$

$f''(x) = \dfrac{2\cdot(x^4-12x^3+54x^2-108x+81)-(2x-6)\cdot(4x^3-36x^2+108x-108)}{(x^4-12x^3+54x^2-108x+81)^2}$

$= \dfrac{(2x^4-24x^3+108x^2-216x+162)-(8x^4-96x^3+432x^2-864x+648)}{(x^4-12x^3+54x^2-108x+81)^2}$

$= \dfrac{-6x^4+72x^3-324x^2+648x-486}{(x^4-12x^3+54x^2-108x+81)^2}$

$= \dfrac{-6x^4+72x^3-324x^2+648x-486}{x^8-24x^7+252x^6-1512x^5+5670x^4-13608x^3+20412x^2-17496x+6561}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-1=0$

keine Loesung

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Horizontale Asymptote: $y=0$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty$

Vertikale Asymptote: $x=3$

•Vorzeichentabelle:

	$x<$	3	$<x$
$f(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty;3[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x)<0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$2x - 6 = 0 \qquad / + 6$
$2x = 6 \qquad / : 2$
$x = \frac{6}{2}$
$x = 3$

$x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$
Nullstelle für Polynomdivision erraten:3

$$\begin{array}{llllll}
(x^4 & -12x^3 & +54x^2 & -108x & +81 &) : (x-3) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \\
-(x^4 & -3x^3) & & & & \\
\hline
 & -9x^3 & +54x^2 & -108x & +81 & \\
 & -(-9x^3 & +27x^2) & & & \\
\hline
 & & 27x^2 & -108x & +81 & \\
 & & -(27x^2 & -81x) & & \\
\hline
 & & & -27x & +81 & \\
 & & & -(-27x & +81) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:3

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & -9x^2 & +27x & -27 &) : (x-3) = x^2 - 6x + 9 \\
-(x^3 & -3x^2) & & & \\
\hline
 & -6x^2 & +27x & -27 & \\
 & -(-6x^2 & +18x) & & \\
\hline
 & & 9x & -27 & \\
 & & -(9x & -27) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2 - 6x + 9 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{6 \pm 0}{2}$
$x_1 = \frac{6 + 0}{2} \qquad x_2 = \frac{6 - 0}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$

	$x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]3; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

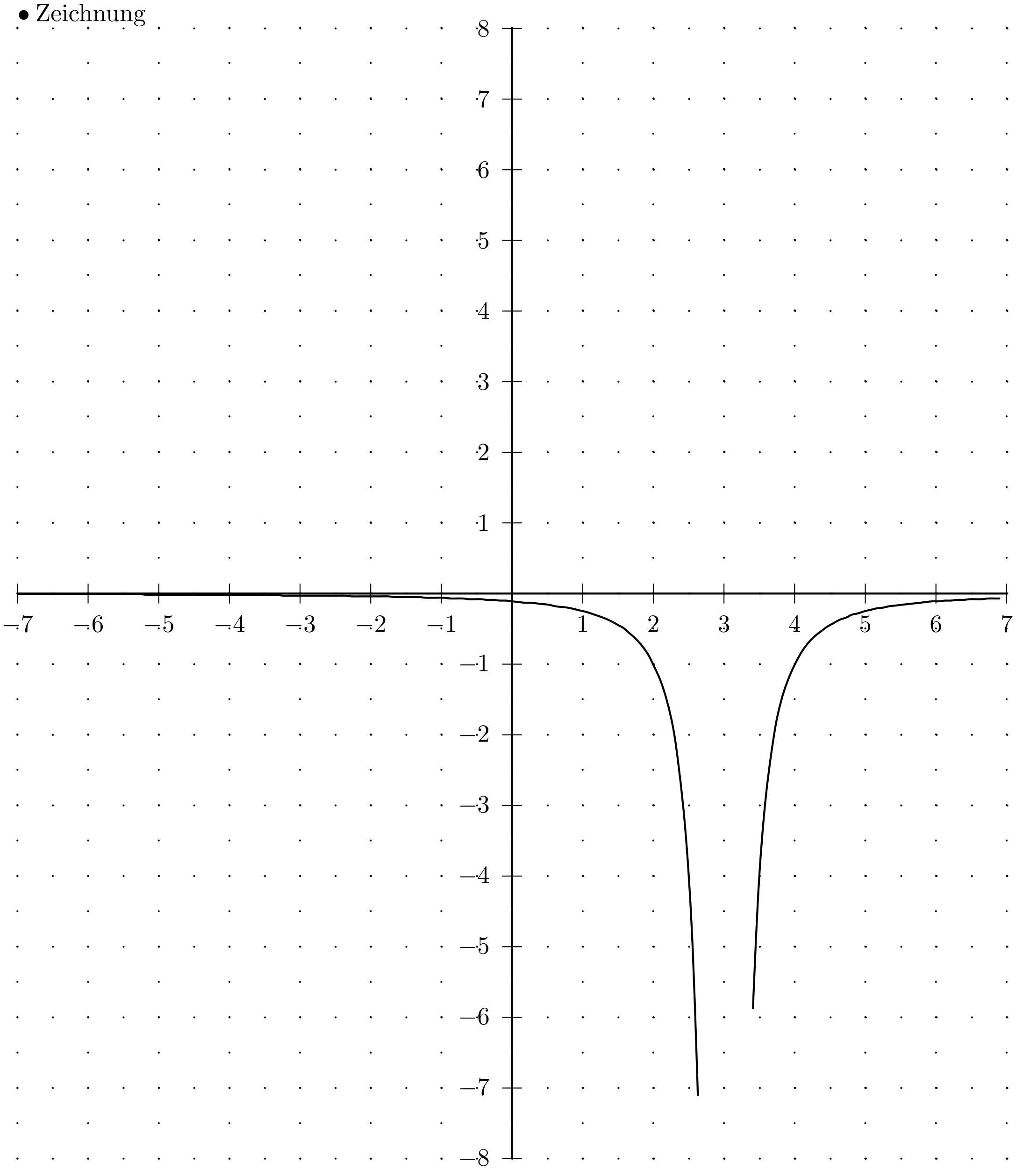
$x \in] - \infty; 3[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-0,01$	$-0,002$	$-0,001$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,011$	$-0,002$	$-0,001$
-6	$-\frac{1}{81}$	$-0,003$	$-0,001$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,014$	$-0,003$	$-0,001$
-5	$-\frac{1}{64}$	$-0,004$	$-0,001$
$-4\frac{1}{2}$	$-0,018$	$-0,005$	$-0,002$
-4	$-\frac{1}{49}$	$-0,006$	$-0,002$
$-3\frac{1}{2}$	$-0,024$	$-0,007$	$-0,003$
-3	$-\frac{1}{36}$	$-0,009$	$-0,005$
$-2\frac{1}{2}$	$-0,033$	$-0,012$	$-0,007$
-2	$-\frac{1}{25}$	$-0,016$	$-0,01$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,022$	$-0,015$
-1	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	$-0,023$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{49}$	$-0,047$	$-0,04$
0	$-\frac{1}{9}$	$-0,074$	$-0,074$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{9}$	$-0,074$	$-0,074$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{25}$	$-0,128$	$-0,154$
1	$-\frac{1}{4}$	$-0,25$	$-0,375$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{9}$	$-0,593$	$-1,185$
2	-1	$-2,001$	$-6,001$
$2\frac{1}{2}$	-4	$-16,017$	$-96,087$
3	$-unendlich$	0	$+unendlich$
$3\frac{1}{2}$	-4	$16,017$	$-96,087$
4	-1	$2,001$	$-6,001$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{9}$	$0,593$	$-1,185$
5	$-\frac{1}{4}$	$0,25$	$-0,375$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{25}$	$0,128$	$-0,154$
6	$-\frac{1}{9}$	$0,074$	$-0,074$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{49}$	$0,047$	$-0,04$
7	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$-0,023$

• Zeichnung



Aufgabe (15)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{x}{x^2}$
Zaehler faktorisieren:
$x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{x}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$= f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{(x)^2}$
$= \frac{0 - 1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{x^2} f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - (-2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1 = 0$
keine Loesung
• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = 0$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]0;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

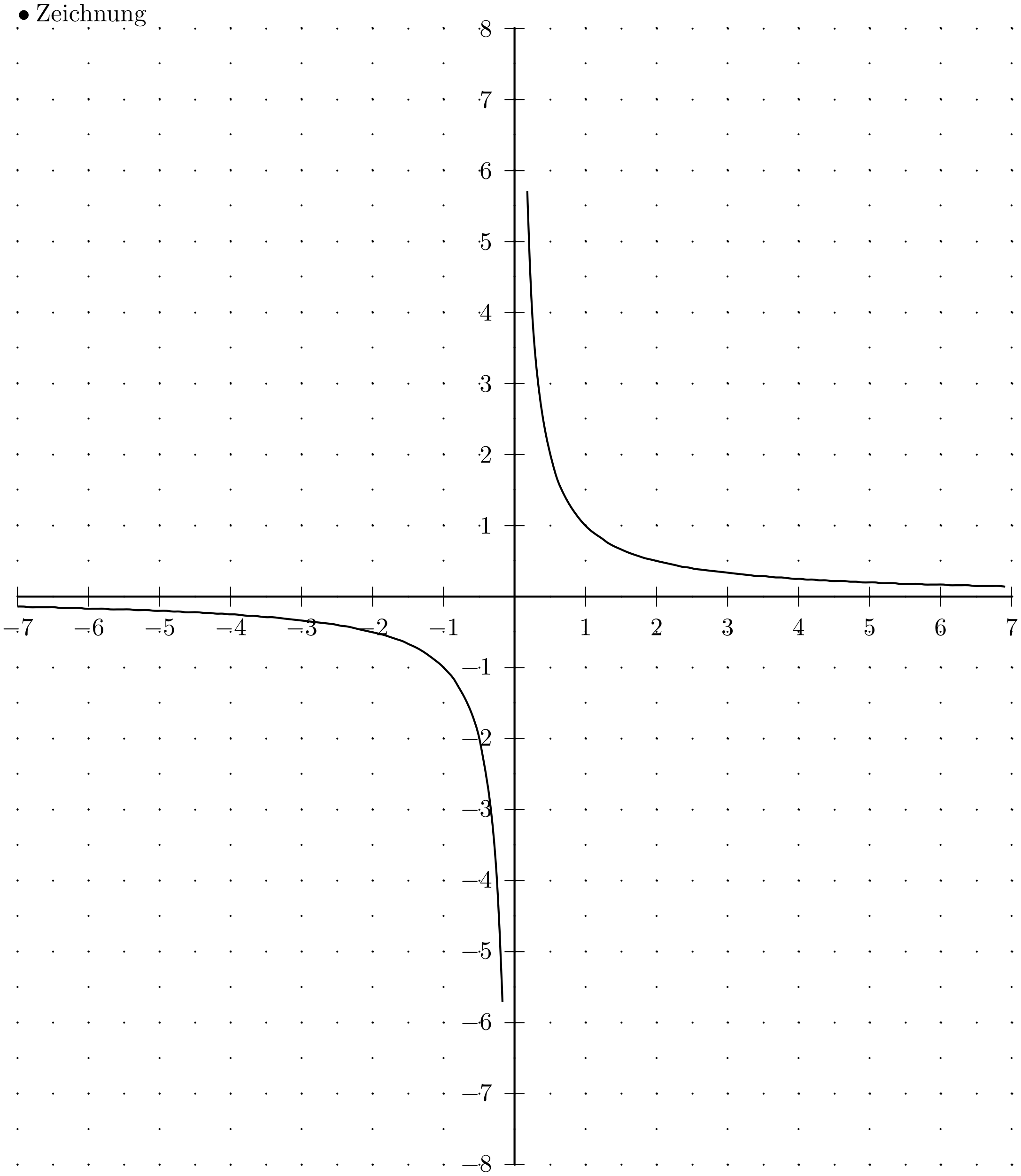
$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$-0,006$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$-0,024$	$-0,007$
-6	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$-0,009$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$-0,033$	$-0,012$
-5	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-0,016$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,022$
-4	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{49}$	$-0,047$
-3	$-\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,074$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-2	$-\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,444$	$-0,593$
-1	-1	-1	-2
$-\frac{1}{2}$	-2	$-4,002$	$-16,009$
0	$n.def.$	$7346\frac{46}{49}$	$n.def.$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$n.def.$	$7346\frac{46}{49}$	$n.def.$
$\frac{1}{2}$	2	$-4,002$	$16,009$
1	1	-1	2
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,444$	$0,593$
2	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,16$	$0,128$
3	$\frac{1}{3}$	$-0,111$	$0,074$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{49}$	$0,047$
4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,022$
5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$0,016$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$-0,033$	$0,012$
6	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$0,009$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,024$	$0,007$
7	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,006$

• Zeichnung



Aufgabe (16)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{-3x+3}{x^2}$
Zaehler faktorisieren:
$-3x+3=0$

$-3x+3=0 \qquad /-3$
$-3x=-3 \qquad /:(-3)$
$x=\frac{-3}{-3}$
$x=1$
$\underline{x_1=1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2=0$
$x^2=0 \Rightarrow x=0$
$\underline{x_2=0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{-3(x-1)}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0;\}$
$f(x) = \frac{-3x+3}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$=f'(x)=\frac{(-3)\cdot x^2-(-3x+3)\cdot 2x}{(x^2)^2}$
$=\frac{(-3x^2)-(-6x^2+6x)}{(x^2)^2}$
$=\frac{3x^2-6x}{(x^2)^2}$
$=\frac{3x^2-6x}{x^4}f'(x)=\frac{3x^2-6x}{x^4}$
$f''(x)=\frac{(6x-6)\cdot x^4-(3x^2-6x)\cdot 4x^3}{(x^4)^2}$
$=\frac{(6x^5-6x^4)-(12x^5-24x^4)}{(x^4)^2}$
$=\frac{-6x^5+18x^4}{(x^4)^2}$
$=\frac{-6x^5+18x^4}{x^8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler=0$
$-3x+3=0$
$\underline{x_3=1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$
Horizontale Asymptote: $y=0$
$\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$
Vertikale Asymptote: $x=0$

•Vorzeichentabelle:

	$x<$	0	$<x<$	1	$<x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;1[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]1;\infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$x(3x-6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 3x-6 = 0$
$3x - 6 = 0 \qquad / + 6$
$3x = 6 \qquad / : 3$
$x = \frac{6}{3}$
$x = 2$
$x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

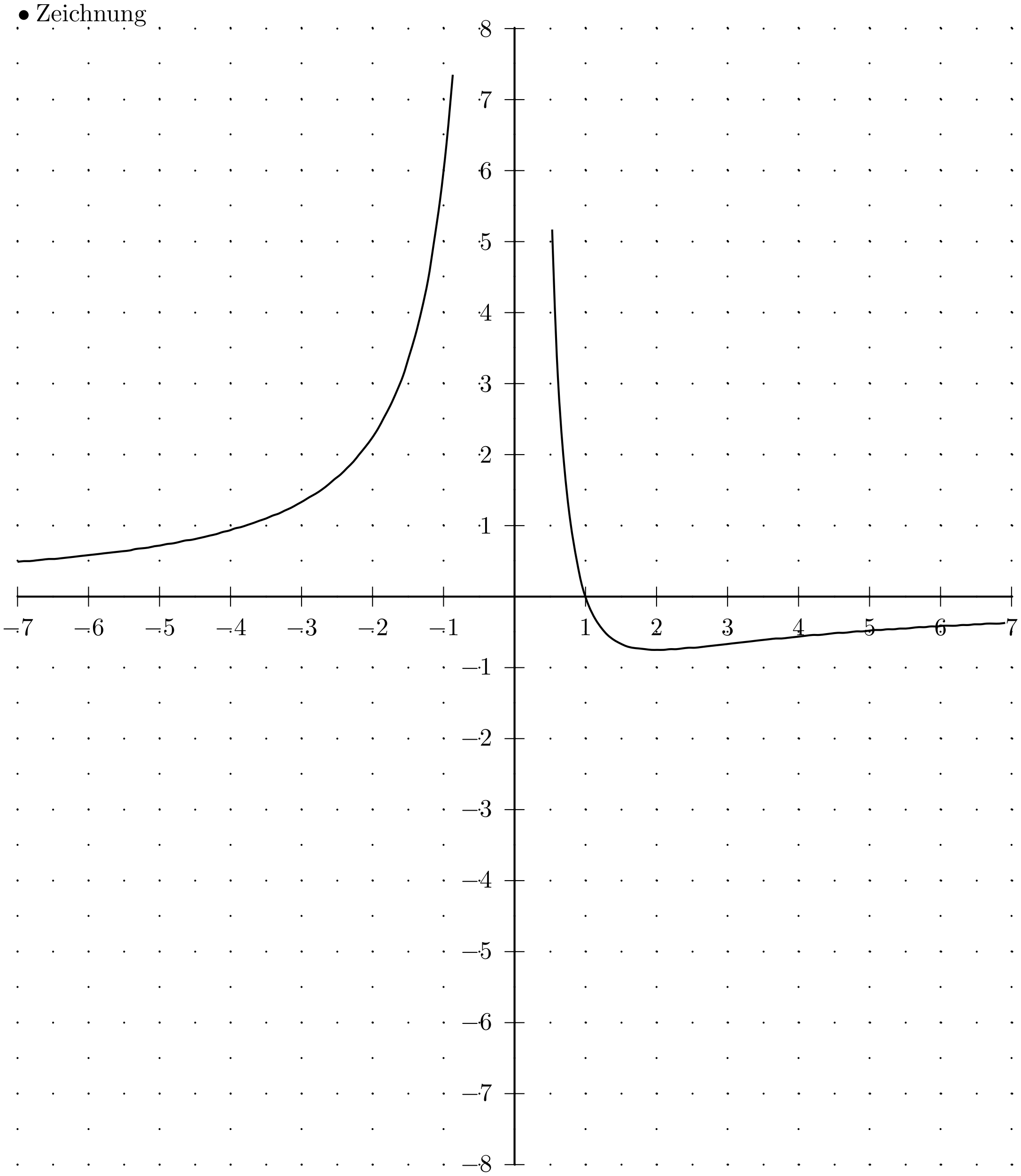
$\underline{\quad x \in]0;2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{24}{49}$	$0,079$	$0,025$
$-6\frac{1}{2}$	$0,533$	$0,093$	$0,032$
-6	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{24}$
$-5\frac{1}{2}$	$0,645$	$0,135$	$0,056$
-5	$\frac{18}{25}$	$0,168$	$0,077$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{22}{27}$	$0,214$	$0,11$
-4	$\frac{15}{16}$	$0,281$	$0,164$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{49}$	$0,385$	$0,26$
-3	$1\frac{1}{3}$	$0,556$	$0,444$
$-2\frac{1}{2}$	$1\frac{17}{25}$	$0,864$	$0,845$
-2	$2\frac{1}{4}$	$1,5$	$1,875$
$-1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3,111$	$5,334$
-1	6	$9,002$	$24,005$
$-\frac{1}{2}$	18	$60,059$	$336,288$
0	$+unendlich$	$-22040\frac{40}{49}$	$-unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$+unendlich$	$-22040\frac{40}{49}$	$-unendlich$
$\frac{1}{2}$	6	$-36,046$	$240,235$
1	0	$-3,001$	$12,003$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,445$	$1,778$
2	$-\frac{3}{4}$	0	$0,375$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{18}{25}$	$0,096$	$0,077$
3	$-\frac{2}{3}$	$0,111$	0
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{30}{49}$	$0,105$	$-0,02$
4	$-\frac{9}{16}$	$\frac{3}{32}$	$-0,023$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{14}{27}$	$0,082$	$-0,022$
5	$-\frac{12}{25}$	$0,072$	$-0,019$
$5\frac{1}{2}$	$-0,446$	$0,063$	$-0,016$
6	$-\frac{5}{12}$	$\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{72}$
$6\frac{1}{2}$	$-0,391$	$0,049$	$-\frac{1}{85}$
7	$-\frac{18}{49}$	$0,044$	$-0,01$

• Zeichnung



Aufgabe (17)

•Funktion/Faktorisieren
$f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x^2+4}$
Zaehler faktorisieren:
$2x+1=0$

$2x+1=0 \quad /-1$
$2x=-1 \quad /:2$
$x=\dfrac{-1}{2}$
$x=-\dfrac{1}{2}$
$\underline{x_1=-\dfrac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2+4=0$

$1x^2+4=0 \quad /-4$
$1x^2=-4 \quad /:1$
$x^2=\dfrac{-4}{1}$
keine Lösung

Faktorisierter Term:
$f\left(x\right)=\dfrac{2(x+\frac{1}{2})}{(x^2+4)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$
$f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x^2+4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$=f'\left(x\right)=\dfrac{2\cdot(x^2+4)-(2x+1)\cdot 2x}{(x^2+4)^2}$
$=\dfrac{(2x^2+8)-(4x^2+2x)}{(x^2+4)^2}$
$=\dfrac{-2x^2-2x+8}{(x^2+4)^2}$
$=\dfrac{-2x^2-2x+8}{x^4+8x^2+16}f'\left(x\right)=\dfrac{-2x^2-2x+8}{x^4+8x^2+16}$
$f''\left(x\right)=\dfrac{(-4x-2)\cdot(x^4+8x^2+16)-(-2x^2-2x+8)\cdot(4x^3+16x)}{(x^4+8x^2+16)^2}$
$=\dfrac{(-4x^5-2x^4-32x^3-16x^2-64x-32)-(-8x^5-8x^4-32x^2+128x)}{(x^4+8x^2+16)^2}$
$=\dfrac{4x^5+6x^4-32x^3+16x^2-192x-32}{(x^4+8x^2+16)^2}$
$=\dfrac{4x^5+6x^4-32x^3+16x^2-192x-32}{x^8+16x^6+96x^4+256x^2+256}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler=0$
$2x+1=0$
$\underline{x_2=-\dfrac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=0$
Horizontale Asymptote: $y=0$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-\frac{1}{2};\infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-\frac{1}{2}[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$$-2x^2 - 2x + 8 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8}}{2 \cdot (-2)}$$
$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{68}}{-4}$$
$$x_{1/2} = \frac{2 \pm 8,246}{-4}$$
$$x_1 = \frac{2 + 8,246}{-4} \qquad x_2 = \frac{2 - 8,246}{-4}$$
$$x_1 = -2,562 \qquad x_2 = 1,562$$

$$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$$
$$1u^2 + 8u + 16 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$$
$$u_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$u_{1/2} = \frac{-8 \pm 0}{2}$$
$$u_1 = \frac{-8 + 0}{2} \qquad u_2 = \frac{-8 - 0}{2}$$
$$u_1 = -4 \qquad u_2 = -4$$
$$x^2 = -4 x = \pm\sqrt{-4}$$
Diskriminante negativ keine Lösung
$$x^2 = -4 x = \pm\sqrt{-4}$$
Diskriminante negativ keine Lösung

	$x <$	$-2,562$	$< x <$	$1,562$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-2,562; 1,562[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

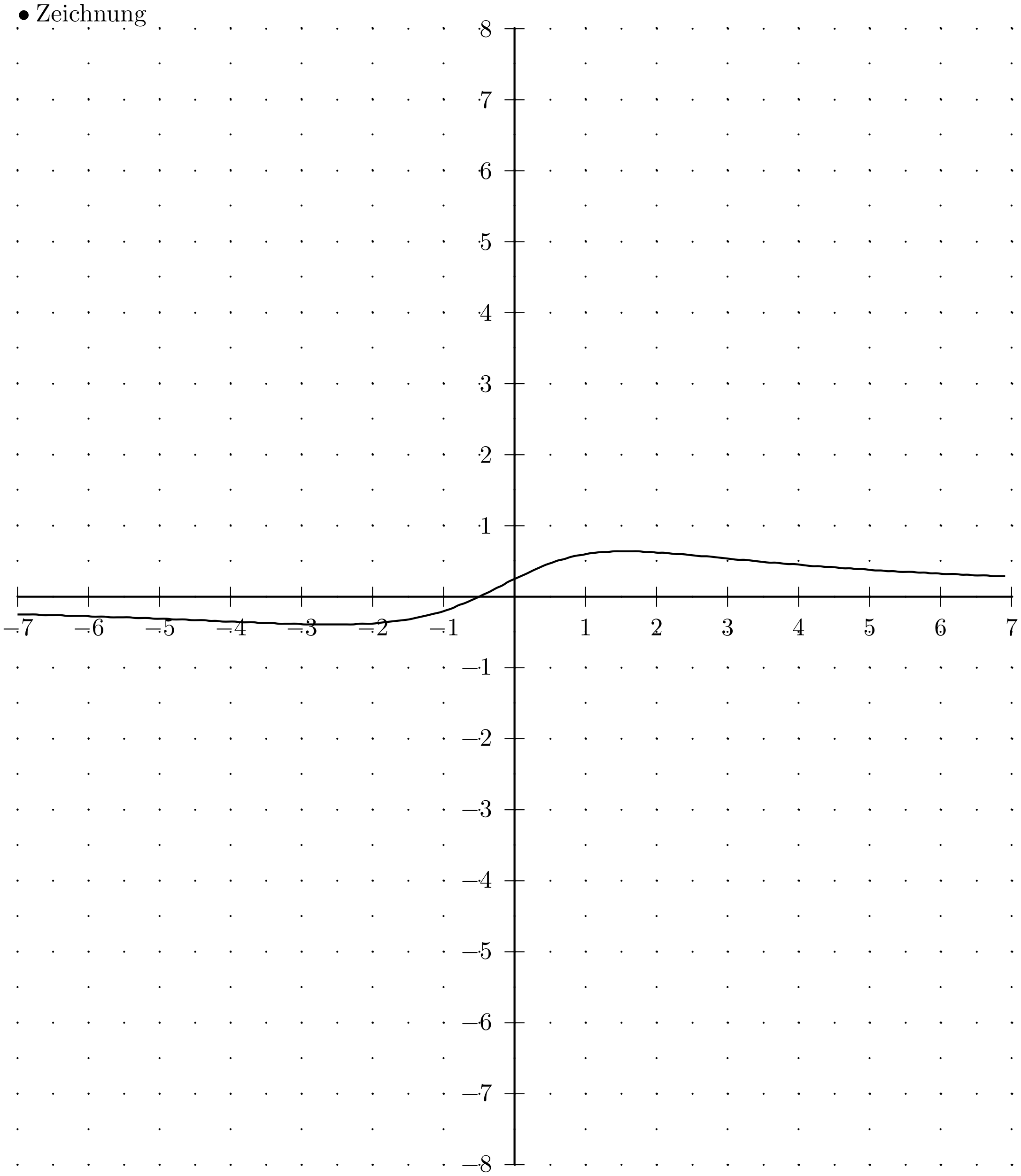
$x \in]-\infty;-2,562[\quad \cup \quad]1,562;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{13}{53}$	$-0,027$	$-0,005$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,259$	$-0,03$	$-0,005$
-6	$-\frac{11}{40}$	$-0,033$	$-0,006$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,292$	$-0,035$	$-0,006$
-5	$-\frac{9}{29}$	$-0,038$	$-0,005$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{32}{97}$	$-0,04$	$-0,002$
-4	$-\frac{7}{20}$	$-\frac{1}{25}$	$0,003$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{24}{65}$	$-0,036$	$0,014$
-3	$-\frac{5}{13}$	$-0,024$	$0,037$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{41}$	$0,005$	$0,081$
-2	$-\frac{3}{8}$	$0,063$	$0,156$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{25}$	$0,166$	$0,262$
-1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{25}$	$0,336$
$-\frac{1}{2}$	0	$0,471$	$0,221$
0	$\frac{1}{4}$	$0,5$	$-0,125$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{4}$	$0,5$	$-0,125$
$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{17}$	$0,36$	$-0,391$
1	$\frac{3}{5}$	$0,16$	$-0,368$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{16}{25}$	$0,013$	$-0,217$
2	$\frac{5}{8}$	$-0,062$	$-0,094$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{24}{41}$	$-0,09$	$-0,026$
3	$\frac{7}{13}$	$-0,095$	$0,005$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{32}{65}$	$-0,089$	$0,016$
4	$\frac{9}{20}$	$-\frac{2}{25}$	$0,019$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{40}{97}$	$-0,071$	$0,018$
5	$\frac{11}{29}$	$-0,062$	$0,016$
$5\frac{1}{2}$	$0,35$	$-0,054$	$0,014$
6	$\frac{13}{40}$	$-0,048$	$0,012$
$6\frac{1}{2}$	$0,303$	$-0,042$	$0,01$
7	$\frac{15}{53}$	$-0,037$	$0,009$

• Zeichnung



Aufgabe (18)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-x+2}{x^2-4}$

Zaehler faktorisieren:

$-x+2=0$

$-1x+2=0 \qquad /-2$

$-1x=-2 \qquad /:(-1)$

$x=\frac{-2}{-1}$

$x=2$

$\underline{x_1=2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2-4=0$

$1x^2-4=0 \qquad /+4$

$1x^2=4 \qquad /:1$

$x^2=\frac{4}{1}$

$x=\pm\sqrt{4}$

$x_1=2 \qquad x_2=-2$

$\underline{x_2=-2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3=2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2;\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \frac{-1}{(x+2)}$

$f(x) = \frac{-1}{x+2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \frac{0\cdot(x+2)-(-1)\cdot 1}{(x+2)^2}$

$= \frac{0-(-1)}{(x+2)^2}$

$= \frac{1}{(x+2)^2}$

$= \frac{1}{x^2+4x+4} f'(x) = \frac{1}{x^2+4x+4}$

$f''(x) = \frac{0\cdot(x^2+4x+4)-1\cdot(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{0-(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{-2x-4}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{-2x-4}{x^4+8x^3+24x^2+32x+16}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler=0$

$-1=0$

keine Loesung

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = -2$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$1x^2 + 4x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{2}$
$x_1 = \dfrac{-4 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-4 - 0}{2}$
$x_1 = -2 \qquad x_2 = -2$

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

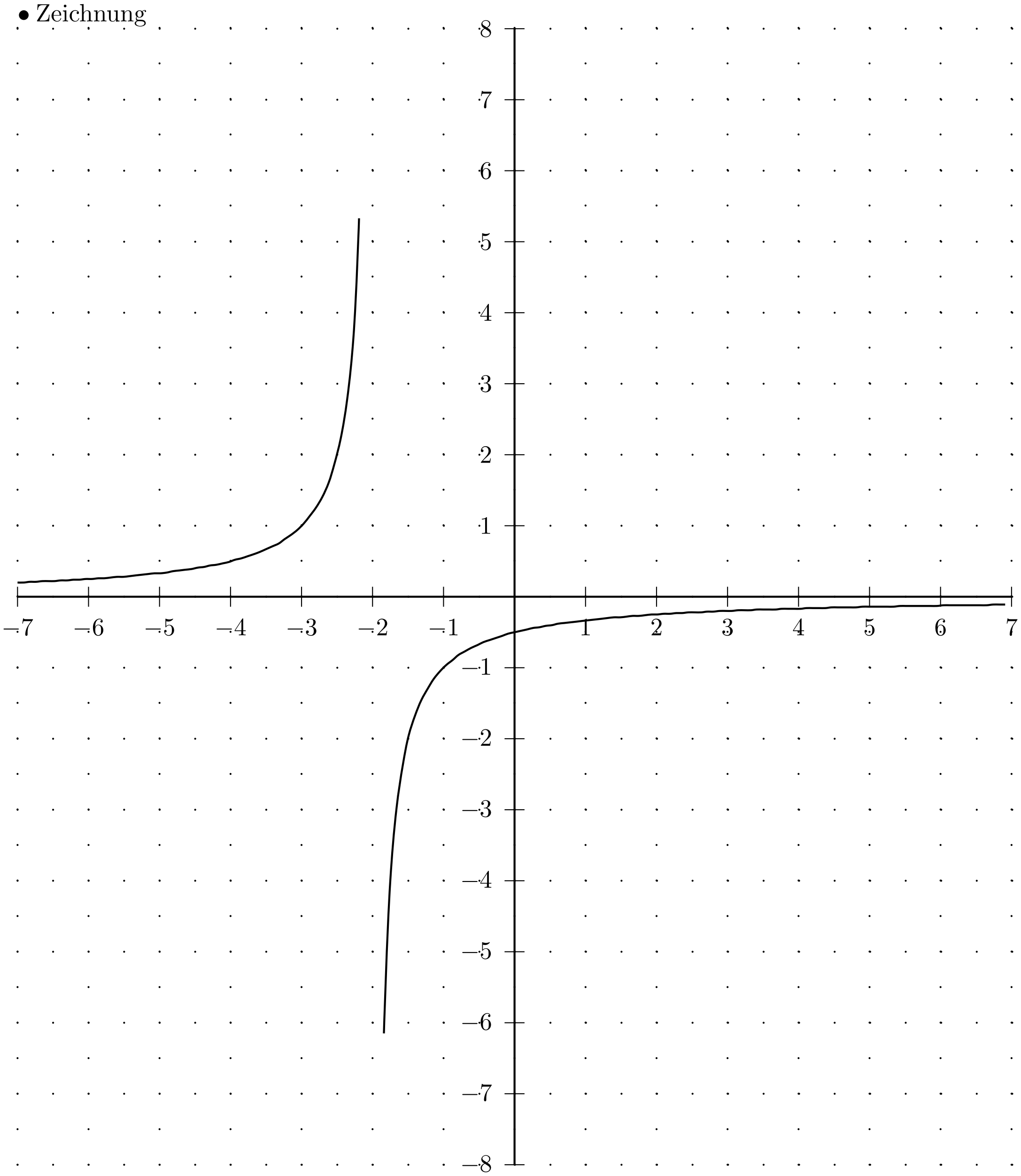
$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$0,016$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$0,022$
-6	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{49}$	$0,047$
-5	$\frac{1}{3}$	$0,111$	$0,074$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$0,16$	$0,128$
-4	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$0,444$	$0,593$
-3	1	1	2
$-2\frac{1}{2}$	2	$4,002$	$16,009$
-2	$+unendlich$	$-7346\frac{46}{49}$	$-unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	-2	$4,002$	$-16,009$
-1	-1	1	-2
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$0,444$	$-0,593$
0	$-\frac{1}{2}$	$0,25$	$-0,25$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{2}$	$0,25$	$-0,25$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$0,16$	$-0,128$
1	$-\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,074$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{4}{49}$	$-0,047$
2	$n.def.$	$\frac{1}{16}$	$n.def.$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$-0,022$
3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$-0,016$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$0,033$	$-0,012$
4	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$-0,009$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$0,024$	$-0,007$
5	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$-0,006$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{15}$	$0,018$	$-0,005$
6	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$-0,004$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{17}$	$0,014$	$-0,003$
7	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$	$-0,003$

• Zeichnung



Aufgabe (19)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{4x+1}{x^2+2x+1}$
Zaehler faktorisieren:
$4x+1=0$

$4x+1=0 \qquad /-1$
$4x=-1 \qquad /:4$
$x=\dfrac{-1}{4}$
$x=-\dfrac{1}{4}$
$\underline{x_1=-\dfrac{1}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2+2x+1=0$

$1x^2+2x+1=0$
$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$
$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{0}}{2}$
$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm0}{2}$
$x_1=\dfrac{-2+0}{2} \qquad x_2=\dfrac{-2-0}{2}$
$x_1=-1 \qquad x_2=-1$
$\underline{x_2=-1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x)=\dfrac{4(x+\frac{1}{4})}{(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;\}$
$f(x)=\dfrac{4x+1}{x^2+2x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$=f'(x)=\dfrac{4\cdot(x^2+2x+1)-(4x+1)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$
$=\dfrac{(4x^2+8x+4)-(8x^2+10x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$
$=\dfrac{-4x^2-2x+2}{(x^2+2x+1)^2}$
$=\dfrac{-4x^2-2x+2}{x^4+4x^3+6x^2+4x+1} f'(x)=\dfrac{-4x^2-2x+2}{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}$
$f''(x)=\dfrac{(-8x-2)\cdot(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)-(-4x^2-2x+2)\cdot(4x^3+12x^2+12x+4)}{(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)^2}$
$=\dfrac{(-8x^5-34x^4-56x^3-44x^2-16x-2)-(-16x^5-56x^4-64x^3-16x^2+16x+8)}{(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)^2}$
$=\dfrac{8x^5+22x^4+8x^3-28x^2-32x-10}{(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)^2}$
$=\dfrac{8x^5+22x^4+8x^3-28x^2-32x-10}{x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler=0$
$4x+1=0$

$x_3 = -\frac{1}{4}$; 1-fache Nullstelle

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \infty$

Vertikale Asymptote: $x = -1$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	$-\frac{1}{4}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\frac{1}{4}; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -(\quad \cup \quad]-1; -\frac{1}{4}[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$-4x^2 - 2x + 2 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2}}{2 \cdot (-4)}$

$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{36}}{-8}$

$x_{1/2} = \dfrac{2 \pm 6}{-8}$

$x_1 = \dfrac{2+6}{-8} \qquad x_2 = \dfrac{2-6}{-8}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = \dfrac{1}{2}$

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$
\begin{array}{llllll}
(x^4 & +4x^3 & +6x^2 & +4x & +1 &) : (x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
-(x^4 & +x^3) & & & & \\
\hline
 & 3x^3 & +6x^2 & +4x & +1 & \\
 & -(3x^3 & +3x^2) & & & \\
\hline
 & & 3x^2 & +4x & +1 & \\
 & & -(3x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & & & x & +1 & \\
 & & & -(x & +1) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$
\begin{array}{lllll}
(x^3 & +3x^2 & +3x & +1 &) : (x+1) = x^2 + 2x + 1 \\
-(x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^2 & +3x & +1 & \\
 & -(2x^2 & +2x) & & \\
\hline
 & & x & +1 & \\
 & & -(x & +1) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$1x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2+0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2-0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

	$x <$	-1	$< x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1; \frac{1}{2}[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

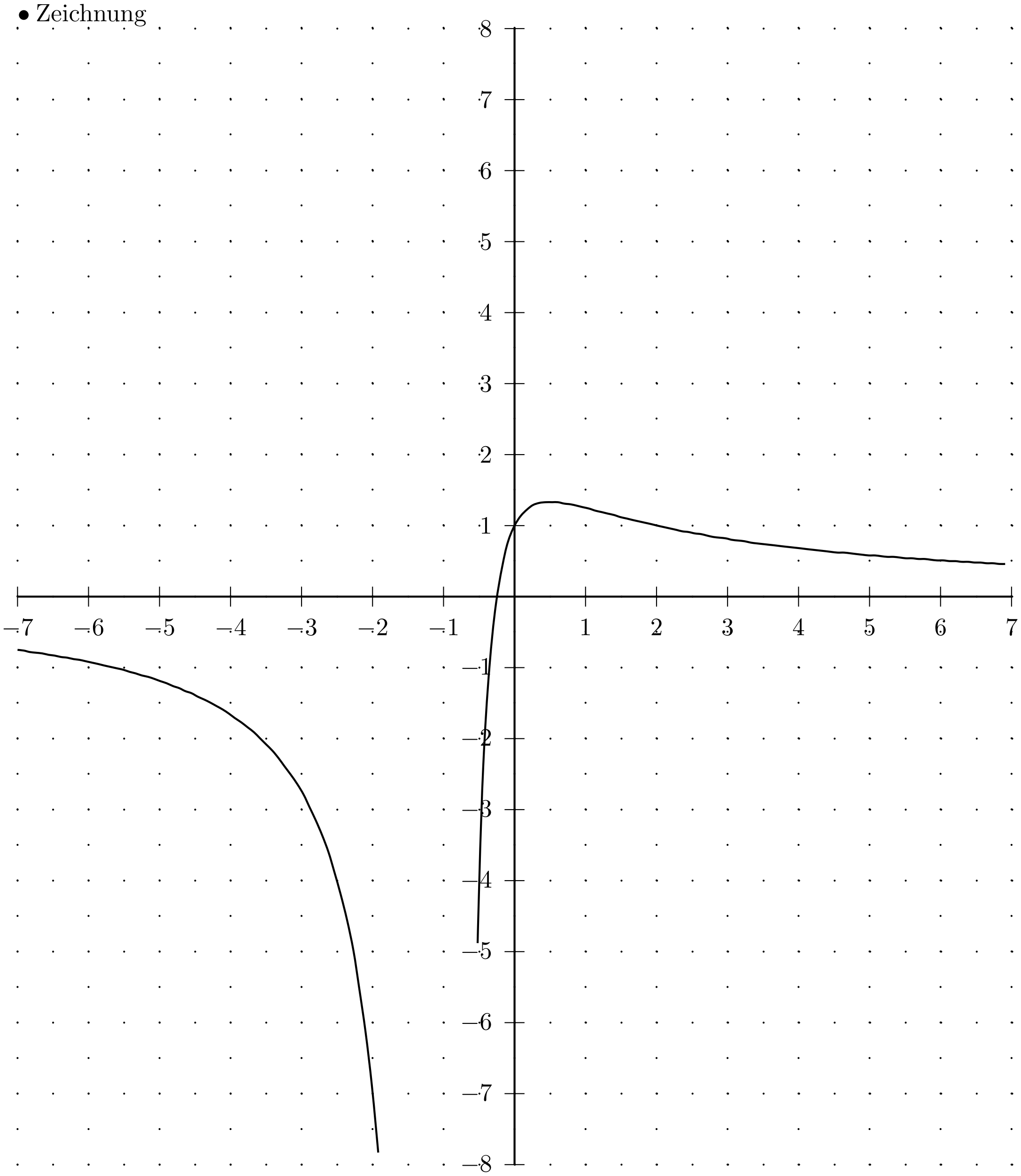
$x \in]-\infty; -(\quad \cup \quad]\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{36}$	$-0,051$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,826$	$-0,168$	$-0,068$
-6	$-\frac{23}{25}$	$-0,208$	$-0,093$
$-5\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{27}$	$-0,263$	$-0,132$
-5	$-1\frac{3}{16}$	$-0,344$	$-0,195$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{19}{49}$	$-0,466$	$-0,307$
-4	$-1\frac{2}{3}$	$-0,667$	$-0,519$
$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{2}{25}$	$-1,024$	$-0,973$
-3	$-2\frac{3}{4}$	$-1,75$	$-2,125$
$-2\frac{1}{2}$	-4	$-3,556$	$-5,926$
-2	-7	$-10,002$	$-26,005$
$-1\frac{1}{2}$	-20	$-64,061$	$-352,296$
-1	$-unendlich$	$29387\frac{37}{49}$	$+unendlich$
$-\frac{1}{2}$	-4	$32,044$	$-224,227$
0	1	$2,001$	$-10,003$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$2,001$	$-10,003$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	0	$-1,185$
1	$1\frac{1}{4}$	$-0,25$	$-0,125$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{25}$	$-0,256$	$0,051$
2	1	$-\frac{2}{9}$	$0,074$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{44}{49}$	$-0,187$	$0,067$
3	$\frac{13}{16}$	$-\frac{5}{32}$	$0,055$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{20}{27}$	$-0,132$	$0,044$
4	$\frac{17}{25}$	$-0,112$	$0,035$
$4\frac{1}{2}$	$0,628$	$-0,096$	$0,028$
5	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$0,023$
$5\frac{1}{2}$	$0,544$	$-0,073$	$0,019$
6	$\frac{25}{49}$	$-0,064$	$0,016$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{12}{25}$	$-0,057$	$0,013$
7	$\frac{29}{64}$	$-0,051$	$0,011$

• Zeichnung



Aufgabe (20)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2=0$

$x^2=0\Rightarrow x=0$

$\underline{x_1=0;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x=0$

$x=0\Rightarrow x=0$

$\underline{x_2=0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0;\}$

• Term gekürzen

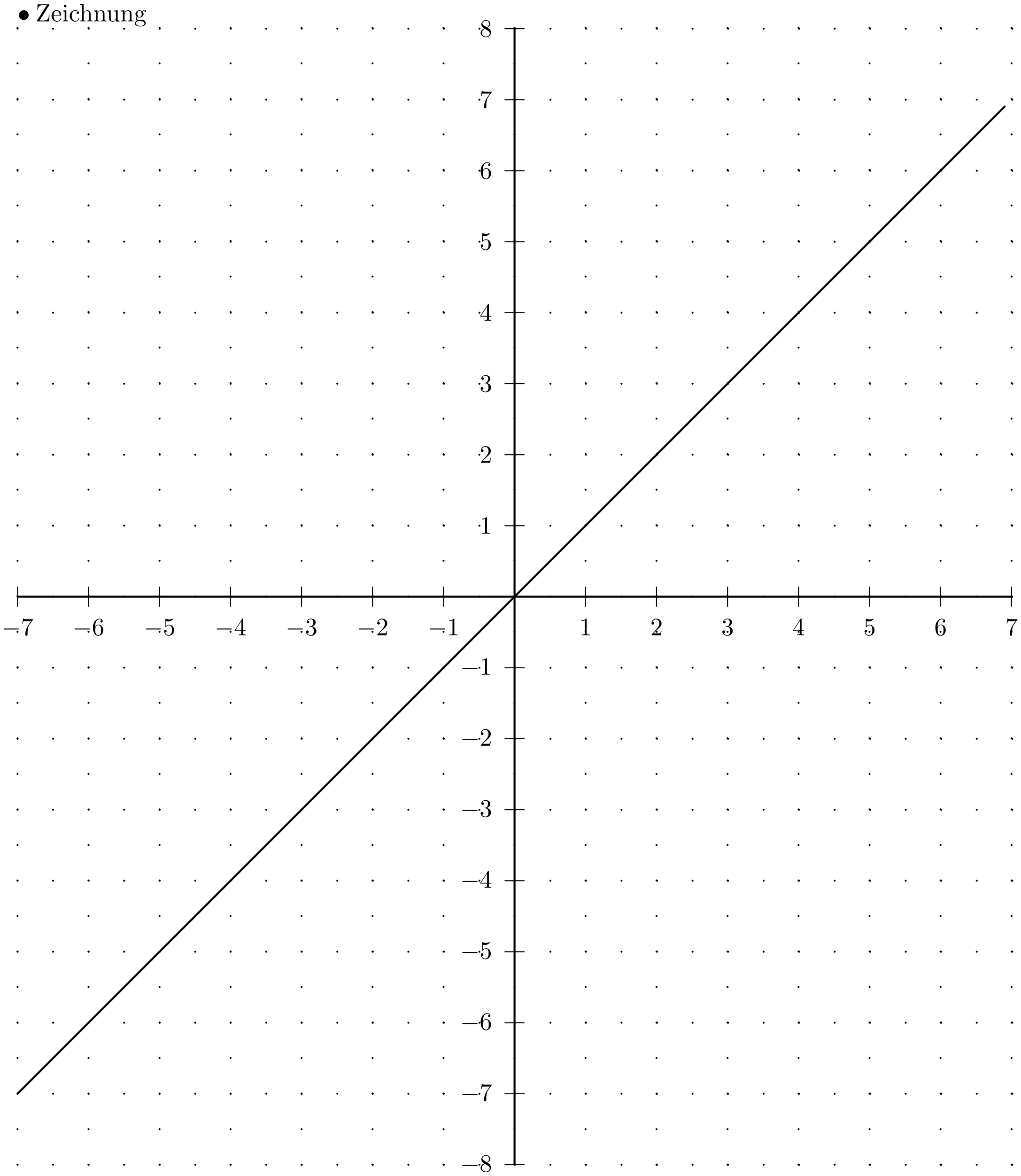
$f\left(x\right)=\dfrac{x}{1}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-7	1	0
$-6\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{2}$	1	0
-6	-6	1	0
$-5\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{2}$	1	0
-5	-5	1	0
$-4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	1	0
-4	-4	1	0
$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$	1	0
-3	-3	1	0
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	1	0
-2	-2	1	0
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	1	0
-1	-1	1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
0	$n.def.$	1	$n.def.$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$n.def.$	1	$n.def.$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
1	1	1	0
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	1	0
2	2	1	0
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	1	0
3	3	1	0
$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	1	0
4	4	1	0
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	1	0
5	5	1	0
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	1	0
6	6	1	0
$6\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	1	0
7	7	1	0

• Zeichnung



Aufgabe (21)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2 = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$x = 2$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2;\}$

$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l}
\quad (x^2 \qquad\qquad\qquad\quad) : (x-2) = x+2 \\
-(x^2 \quad -2x) \\
\hline
\qquad\quad 2x \\
\qquad -(2x \quad -4) \\
\hline
\qquad\qquad\quad 4
\end{array}$$

$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \frac{2x \cdot (x-2) - x^2 \cdot 1}{(x-2)^2}$

$= \frac{(2x^2 - 4x) - x^2}{(x-2)^2}$

$= \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$

$= \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4} f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4}$

$f''(x) = \frac{(2x-4) \cdot (x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x) \cdot (2x - 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \frac{(2x^3 - 12x^2 + 24x - 16) - (2x^3 - 12x^2 + 16x)}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \frac{+8x - 16}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \frac{+8x - 16}{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$x^2 = 0$

$\underline{x_3 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Schiefe Asymptote:$y = x + 2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$

Vertikale Asymptote: $x = 2$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;2[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x - 4 = 0$

$x - 4 = 0 \qquad / + 4$

$x = 4$

$1x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+0}{2} \qquad x_2 = \frac{4-0}{2}$$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x <$	4	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

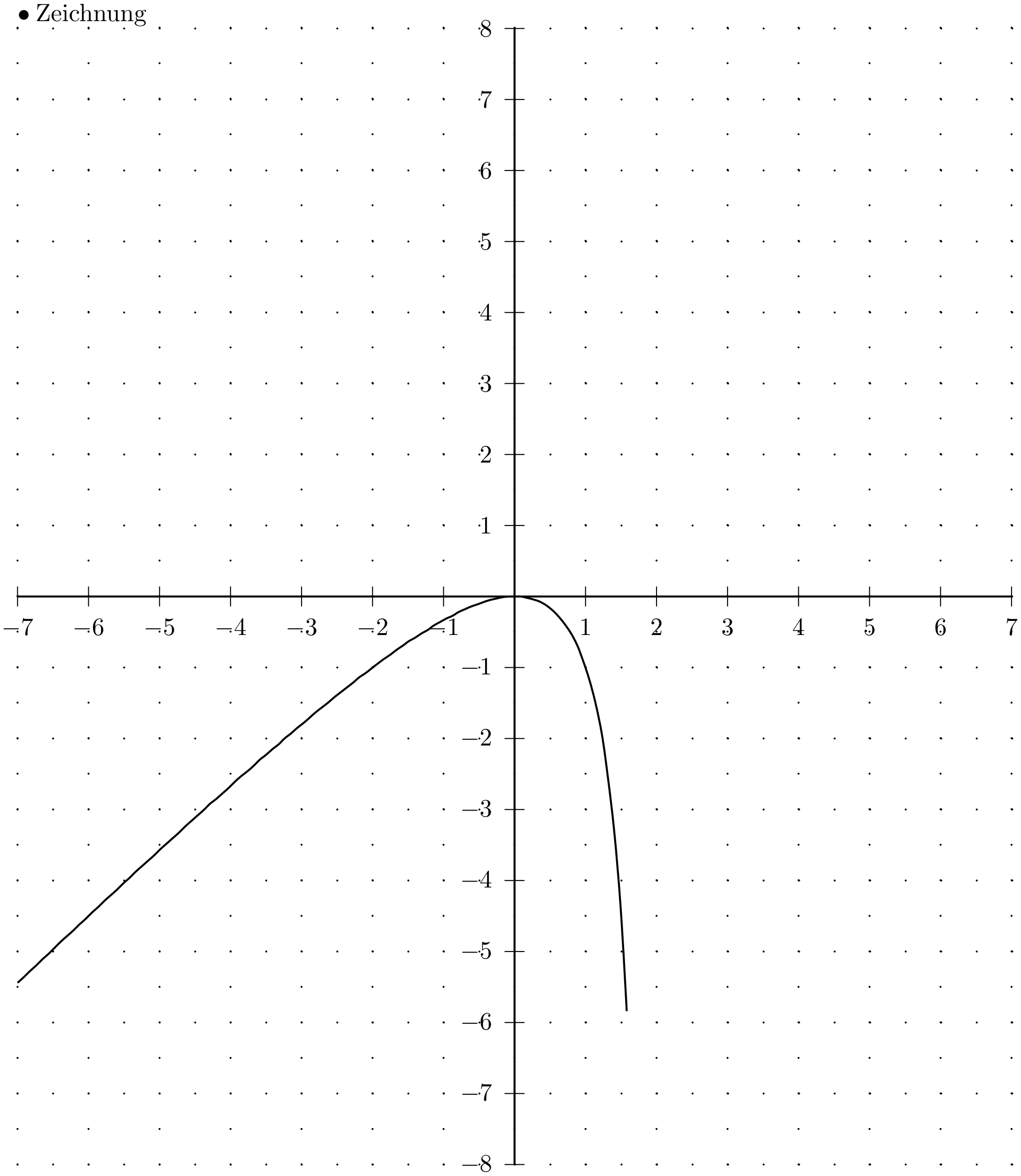
$x \in]0;2[\quad \cup \quad]2;4[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-5\frac{4}{9}$	$\frac{77}{81}$	$-0,011$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{33}{34}$	$0,945$	$-0,013$
-6	$-4\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$	$-\frac{1}{64}$
$-5\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{30}$	$0,929$	$-0,019$
-5	$-3\frac{4}{7}$	$\frac{45}{49}$	$-0,023$
$-4\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{26}$	$0,905$	$-0,029$
-4	$-2\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$-\frac{1}{27}$
$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{5}{22}$	$0,868$	$-0,048$
-3	$-1\frac{4}{5}$	$\frac{21}{25}$	$-0,064$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{18}$	$0,802$	$-0,088$
-2	-1	$0,75$	$-0,125$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{14}$	$0,673$	$-0,187$
-1	$-\frac{1}{3}$	$0,556$	$-0,296$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$0,36$	$-0,512$
0	0	0	-1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	0	-1
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-0,778$	$-2,371$
1	-1	$-3,001$	$-8,001$
$1\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	$-15,009$	$-64,035$
2	$+unendlich$	$29388\frac{37}{49}$	$-unendlich$
$2\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	$-15,009$	$64,035$
3	9	$-3,001$	$8,001$
$3\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{6}$	$-0,778$	$2,371$
4	8	0	1
$4\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{10}$	$0,36$	$0,512$
5	$8\frac{1}{3}$	$0,556$	$0,296$
$5\frac{1}{2}$	$8\frac{9}{14}$	$0,673$	$0,187$
6	9	$0,75$	$0,125$
$6\frac{1}{2}$	$9\frac{7}{18}$	$0,802$	$0,088$
7	$9\frac{4}{5}$	$\frac{21}{25}$	$0,064$

• Zeichnung



Aufgabe (22)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-x^2}{x+3}$

Zaehler faktorisieren:

$-x^2 = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x + 3 = 0$

$x + 3 = 0 \qquad / - 3$

$x = -3$

$\underline{x_2 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-x^2}{(x+3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3;\}$

$f(x) = \frac{-x^2}{x+3}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{lll}
(-x^2 & &) : (x+3) = -x+3 \\
-(-x^2 & -3x) & \\
\hline
& 3x & \\
& -(3x & +9) \\
\hline
& & -9
\end{array}$$

$f(x) = -x + 3 + \frac{-9}{x+3}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \frac{(-2x) \cdot (x+3) - (-x^2) \cdot 1}{(x+3)^2}$

$= \frac{(-2x^2 - 6x) - (-x^2)}{(x+3)^2}$

$= \frac{-x^2 - 6x}{(x+3)^2}$

$= \frac{-x^2 - 6x}{x^2 + 6x + 9} f'(x) = \frac{-x^2 - 6x}{x^2 + 6x + 9}$

$f''(x) = \frac{(-2x - 6) \cdot (x^2 + 6x + 9) - (-x^2 - 6x) \cdot (2x + 6)}{(x^2 + 6x + 9)^2}$

$= \frac{(-2x^3 - 18x^2 - 54x - 54) - (-2x^3 - 18x^2 - 36x)}{(x^2 + 6x + 9)^2}$

$= \frac{-18x - 54}{(x^2 + 6x + 9)^2}$

$= \frac{-18x - 54}{x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-x^2 = 0$

$\underline{x_3 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \; \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Schiefe Asymptote:$y = -x + 3$

$\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$

Vertikale Asymptote: $x = -3$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-3; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$x(-x-6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x-6 = 0$

$-1x - 6 = 0 \qquad / + 6$

$-1x = 6 \qquad / : (-1)$

$x = \dfrac{6}{-1}$

$x = -6$

$1x^2 + 6x + 9 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-6 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-6 - 0}{2}$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = -3$

	$x <$	-6	$< x <$	-3	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-6; -3[\quad \cup \quad]-3; 0[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

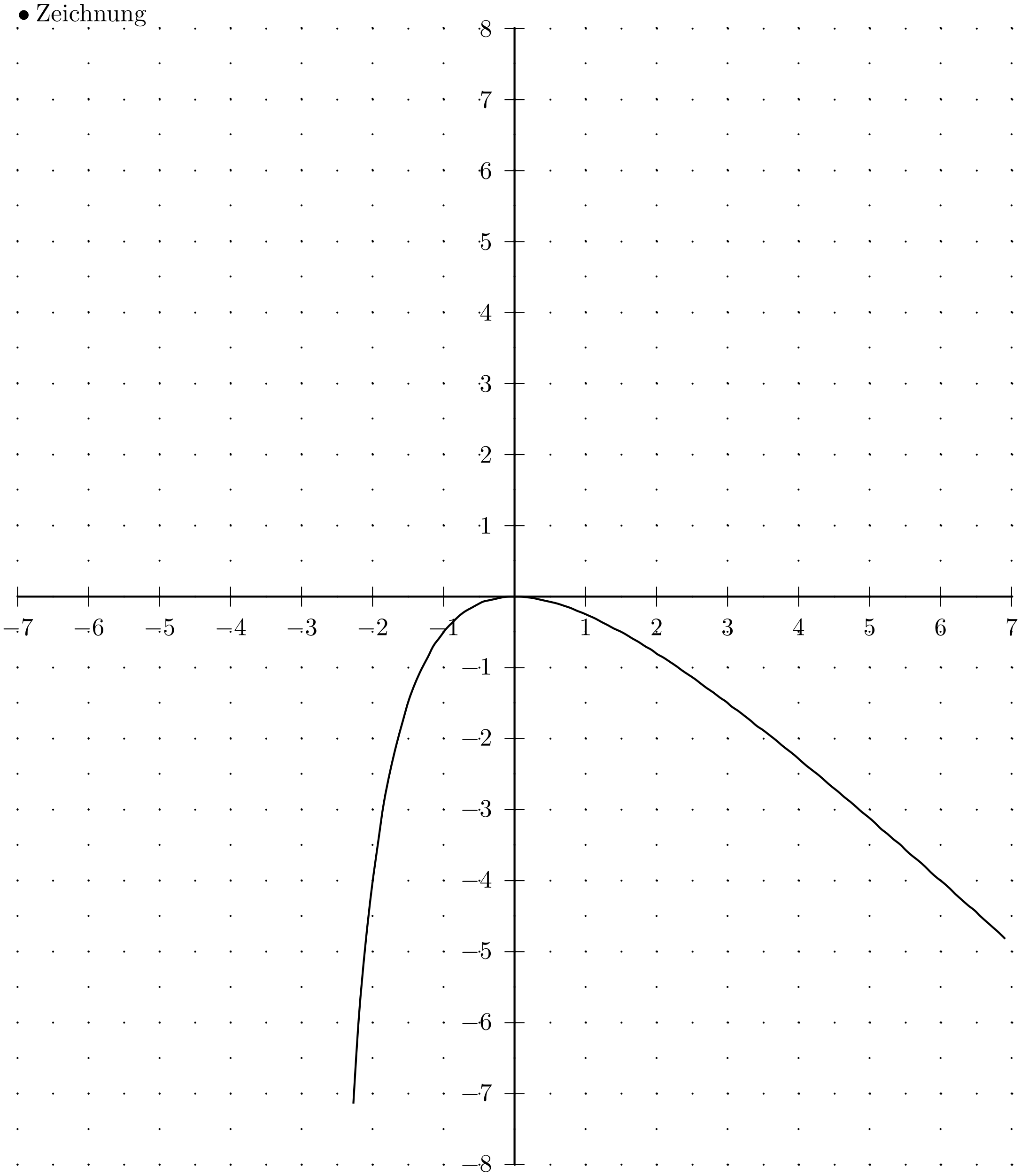
$x \in]-\infty; -6[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$12\frac{1}{4}$	$-0,437$	$0,281$
$-6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{14}$	$-0,265$	$0,42$
-6	12	0	$0,667$
$-5\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{10}$	$0,44$	$1,152$
-5	$12\frac{1}{2}$	$1,25$	$2,25$
$-4\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	3	$5,334$
-4	16	$8,001$	$18,002$
$-3\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2}$	$35,02$	$144,078$
-3	$-unendlich$	$-66123\frac{22}{49}$	$+unendlich$
$-2\frac{1}{2}$	$-12\frac{1}{2}$	$35,02$	$-144,078$
-2	-4	$8,001$	$-18,002$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	3	$-5,334$
-1	$-\frac{1}{2}$	$1,25$	$-2,25$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$0,44$	$-1,152$
0	0	0	$-0,667$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	0	$-0,667$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{14}$	$-0,265$	$-0,42$
1	$-\frac{1}{4}$	$-0,437$	$-0,281$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-0,556$	$-0,198$
2	$-\frac{4}{5}$	$-0,64$	$-0,144$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{22}$	$-0,702$	$-0,108$
3	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{12}$
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{23}{26}$	$-0,787$	$-0,066$
4	$-2\frac{2}{7}$	$-\frac{40}{49}$	$-0,052$
$4\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{10}$	$-\frac{21}{25}$	$-0,043$
5	$-3\frac{1}{8}$	$-\frac{55}{64}$	$-0,035$
$5\frac{1}{2}$	$-3\frac{19}{34}$	$-0,875$	$-0,029$
6	-4	$-\frac{8}{9}$	$-\frac{2}{81}$
$6\frac{1}{2}$	$-4\frac{17}{38}$	$-0,9$	$-0,021$
7	$-4\frac{9}{10}$	$-0,91$	$-0,018$

• Zeichnung



Aufgabe (23)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{x^2+3x+9}{6x+18}$
Zaehler faktorisieren:
$x^2+3x+9=0$

$1x^2+3x+9=0$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$
Diskriminante negativ keine Lösung

Nenner faktorisieren:
$6x+18=0$

$6x+18=0 \qquad / -18$
$6x=-18 \qquad / :6$
$x = \dfrac{-18}{6}$
$x=-3$
$\underline{x_1=-3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{(x^2+3x+9)}{6(x+3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3;\}$
$f(x) = \dfrac{x^2+3x+9}{6x+18}$
$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{lll} (x^2 & +3x & +9 \quad) : (6x+18) = \frac{1}{6}x \\ -(x^2 & +3x) & \\ \hline & 9 & \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{9}{6x+18}$
• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$= f'(x) = \dfrac{(2x+3)\cdot(6x+18)-(x^2+3x+9)\cdot 6}{(6x+18)^2}$
$= \dfrac{(12x^2+54x+54)-(6x^2+18x+54)}{(6x+18)^2}$
$= \dfrac{6x^2+36x}{(6x+18)^2}$
$= \dfrac{6x^2+36x}{36x^2+216x+324} f'(x) = \dfrac{6x^2+36x}{36x^2+216x+324}$
$f''(x) = \dfrac{(12x+36)\cdot(36x^2+216x+324)-(6x^2+36x)\cdot(72x+216)}{(36x^2+216x+324)^2}$
$= \dfrac{(432x^3+3888x^2+11664x+11664)-(432x^3+3888x^2+7776x)}{(36x^2+216x+324)^2}$
$= \dfrac{+3888x+11664}{(36x^2+216x+324)^2}$
$= \dfrac{+3888x+11664}{1296x^4+15552x^3+69984x^2+139968x+104976}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler=0$
$x^2+3x+9=0$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \; \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Schiefe Asymptote:$y = \frac{1}{6}x$

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \infty$

Vertikale Asymptote: $x = -3$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-3; \infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -3[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$x(6x + 36) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 6x + 36 = 0$

$6x + 36 = 0 \qquad / - 36$

$6x = -36 \qquad / : 6$

$x = \frac{-36}{6}$

$x = -6$

$36x^2 + 216x + 324 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-216 \pm \sqrt{216^2 - 4 \cdot 36 \cdot 324}}{2 \cdot 36}$

$x_{1/2} = \frac{-216 \pm \sqrt{0}}{72}$

$x_{1/2} = \frac{-216 \pm 0}{72}$

$x_1 = \frac{-216 + 0}{72} \qquad x_2 = \frac{-216 - 0}{72}$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = -3$

	$x <$	-6	$< x <$	-3	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -6[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

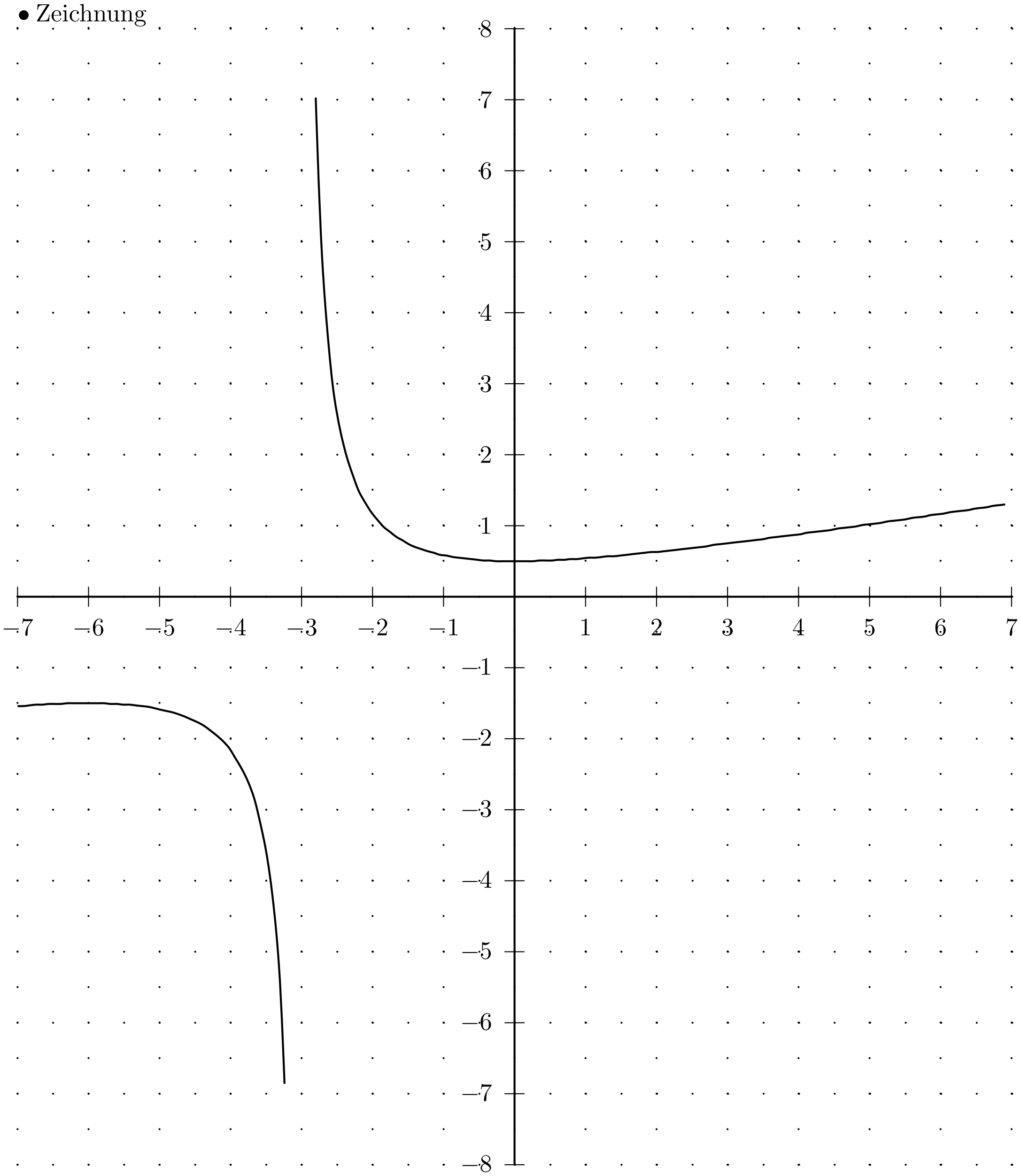
$x \in]-6; -3[\quad \cup \quad]-3; 0[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1\frac{13}{24}$	$\frac{7}{96}$	$-\frac{3}{64}$
$-6\frac{1}{2}$	$-1\frac{43}{84}$	$0,044$	$-0,07$
-6	$-1\frac{1}{2}$	0	$-0,111$
$-5\frac{1}{2}$	$-1\frac{31}{60}$	$-0,073$	$-0,192$
-5	$-1\frac{7}{12}$	$-0,208$	$-0,375$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$	$-0,5$	$-0,889$
-4	$-2\frac{1}{6}$	$-1,334$	-3
$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{7}{12}$	$-5,837$	$-24,013$
-3	$+unendlich$	$11020,575$	$-unendlich$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{12}$	$-5,837$	$24,013$
-2	$1\frac{1}{6}$	$-1,334$	3
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-0,5$	$0,889$
-1	$\frac{7}{12}$	$-0,208$	$0,375$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{31}{60}$	$-0,073$	$0,192$
0	$\frac{1}{2}$	0	$0,111$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	0	$0,111$
$\frac{1}{2}$	$\frac{43}{84}$	$0,044$	$0,07$
1	$\frac{13}{24}$	$\frac{7}{96}$	$\frac{3}{64}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{54}$	$0,033$
2	$\frac{19}{30}$	$\frac{8}{75}$	$0,024$
$2\frac{1}{2}$	$0,689$	$0,117$	$0,018$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{72}$
$3\frac{1}{2}$	$0,814$	$0,131$	$0,011$
4	$\frac{37}{42}$	$0,136$	$0,009$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{19}{20}$	$\frac{7}{50}$	$0,007$
5	$1\frac{1}{48}$	$0,143$	$0,006$
$5\frac{1}{2}$	$1,093$	$0,146$	$0,005$
6	$1\frac{1}{6}$	$\frac{4}{27}$	$0,004$
$6\frac{1}{2}$	$1,241$	$0,15$	$0,003$
7	$1\frac{19}{60}$	$0,152$	$0,003$

• Zeichnung



Aufgabe (24)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$1x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$x_1 = \frac{5 + 1}{2} \qquad x_2 = \frac{5 - 1}{2}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$

$\underline{x_1 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$x = 2$

$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2;\}$

• Term gekürzen

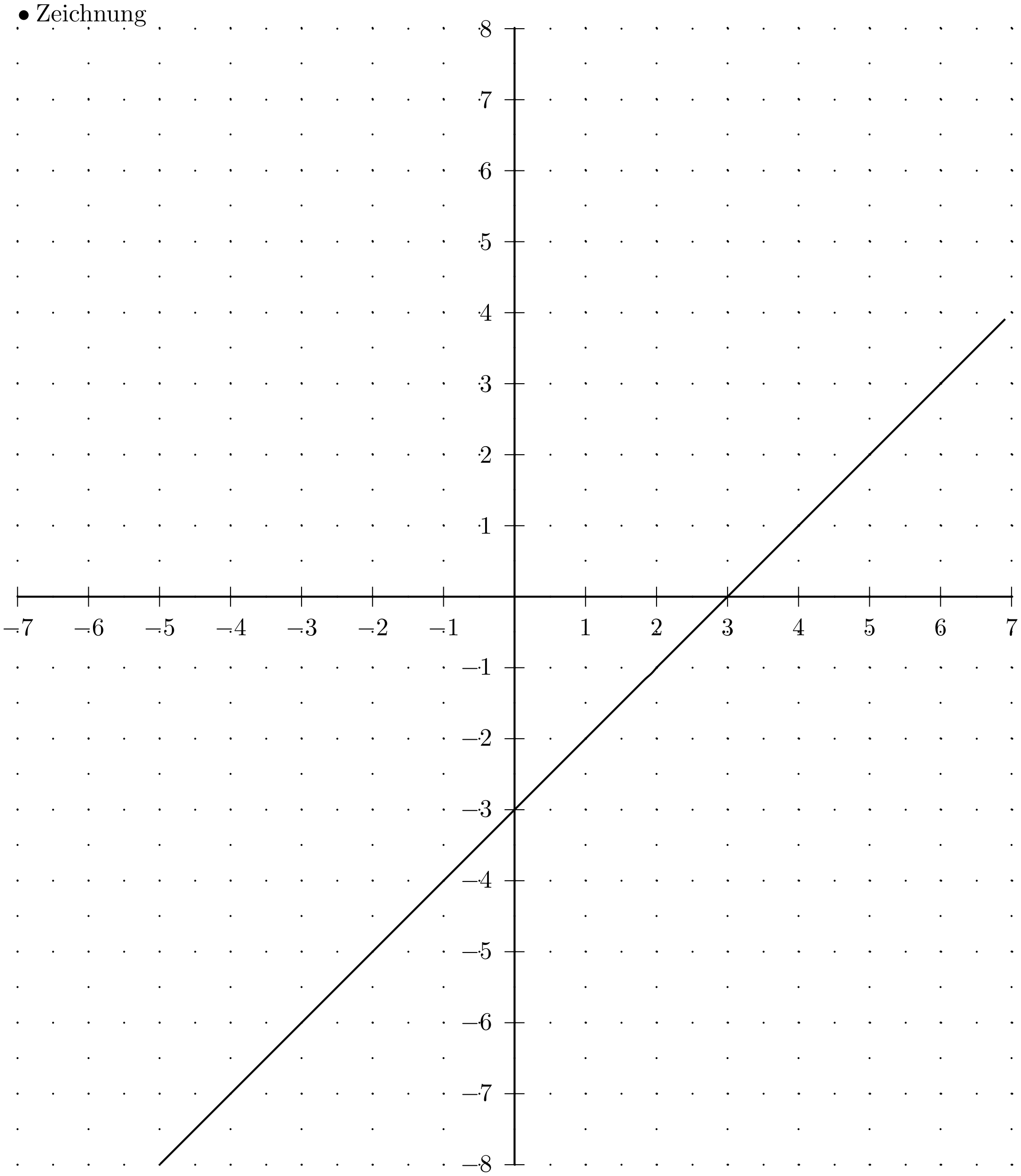
$f(x) = \frac{(x-3)}{1}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-10	1	0
$-6\frac{1}{2}$	$-9\frac{1}{2}$	1	0
-6	-9	1	0
$-5\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$	1	0
-5	-8	1	0
$-4\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{2}$	1	0
-4	-7	1	0
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{2}$	1	0
-3	-6	1	0
$-2\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{2}$	1	0
-2	-5	1	0
$-1\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	1	0
-1	-4	1	0
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$	1	0
0	-3	1	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-3	1	0
$\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	1	0
1	-2	1	0
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	1	0
2	$n.def.$	1	$n.def.$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
3	0	1	0
$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
4	1	1	0
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	1	0
5	2	1	0
$5\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	1	0
6	3	1	0
$6\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	1	0
7	4	1	0

• Zeichnung



Aufgabe (25)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{2x^2-8}{-2x^2+8x-8}$

Zaehler faktorisieren:

$2x^2 - 8 = 0$

$2x^2 - 8 = 0 \qquad / + 8$

$2x^2 = 8 \qquad / : 2$

$x^2 = \frac{8}{2}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-2x^2 + 8x - 8 = 0$

$-2x^2 + 8x - 8 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)}$

$x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{-4}$

$x_{1/2} = \frac{-8 \pm 0}{-4}$

$x_1 = \frac{-8+0}{-4} \qquad x_2 = \frac{-8-0}{-4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$

$\underline{x_3 = 2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{2(x+2)(x-2)}{-2(x-2)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2;\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \frac{2(x+2)}{-2(x-2)}$

$f(x) = \frac{2x+4}{-2x+4}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l} \quad (2x \quad +4 \quad) : (-2x+4) = -1 \\ -(2x \quad -4) \\ \hline \qquad\quad 8 \end{array}$$

$f(x) = -1 + \frac{8}{-2x+4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \frac{2 \cdot (-2x+4) - (2x+4) \cdot (-2)}{(-2x+4)^2}$

$= \frac{(-4x+8) - (-4x-8)}{(-2x+4)^2}$

$= \frac{+16}{(-2x+4)^2}$

$= \frac{+16}{4x^2-16x+16} f'(x) = \frac{16}{4x^2-16x+16}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (4x^2-16x+16) - 16 \cdot (8x-16)}{(4x^2-16x+16)^2}$

$= \frac{0-(128x-256)}{(4x^2-16x+16)^2}$
$= \frac{-128x+256}{(4x^2-16x+16)^2}$
$= \frac{-128x+256}{16x^4-128x^3+384x^2-512x+256}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$2x+4=0$
$x_4 = -2$; 1-fache Nullstelle

• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{-2} = -1$
Horizontale Asymptote: $y = -1$
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = 2$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-2;2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$4x^2-16x+16=0$
$x_{1/2} = \frac{+16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4\cdot 4\cdot 16}}{2\cdot 4}$
$x_{1/2} = \frac{+16 \pm \sqrt{0}}{8}$
$x_{1/2} = \frac{16 \pm 0}{8}$
$x_1 = \frac{16+0}{8} \qquad x_2 = \frac{16-0}{8}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

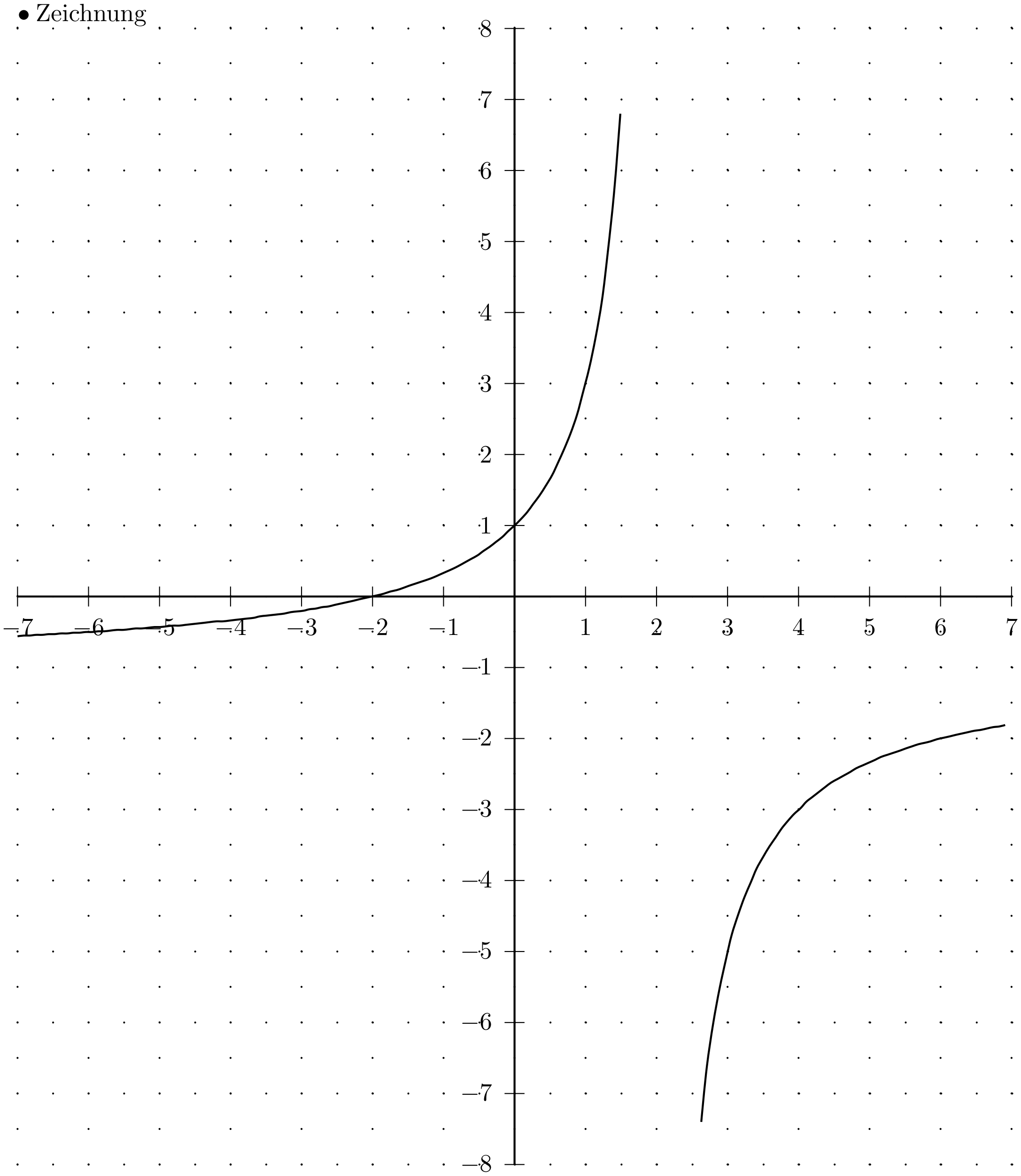
$x \in]-\infty;2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{5}{9}$	$\frac{4}{81}$	$0,011$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{17}$	$0,055$	$0,013$
-6	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{15}$	$0,071$	$0,019$
-5	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{49}$	$0,023$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{13}$	$0,095$	$0,029$
-4	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{11}$	$0,132$	$0,048$
-3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$0,064$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{9}$	$0,198$	$0,088$
-2	0	$0,25$	$0,125$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	$0,327$	$0,187$
-1	$\frac{1}{3}$	$0,444$	$0,296$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$0,64$	$0,512$
0	1	1	1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	$1,778$	$2,371$
1	3	$4,001$	$8,001$
$1\frac{1}{2}$	7	$16,009$	$64,035$
2	$n.def.$	$-29387\frac{37}{49}$	$n.def.$
$2\frac{1}{2}$	-9	$16,009$	$-64,035$
3	-5	$4,001$	$-8,001$
$3\frac{1}{2}$	$-3\frac{2}{3}$	$1,778$	$-2,371$
4	-3	1	-1
$4\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{5}$	$0,64$	$-0,512$
5	$-2\frac{1}{3}$	$0,444$	$-0,296$
$5\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{7}$	$0,327$	$-0,187$
6	-2	$0,25$	$-0,125$
$6\frac{1}{2}$	$-1\frac{8}{9}$	$0,198$	$-0,088$
7	$-1\frac{4}{5}$	$\frac{4}{25}$	$-0,064$

• Zeichnung



Aufgabe (26)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{2x^2+2x}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2+2x+1=0$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2+0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2-0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$2x^2+2x=0$

$x(2x+2)=0 \Rightarrow x=0 \quad \wedge \quad 2x+2=0$

$2x+2=0 \qquad /-2$

$2x=-2 \qquad /:2$

$x = \dfrac{-2}{2}$

$x=-1$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2(x+1)x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;0;\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{(x+1)}{2x}$

$f(x) = \dfrac{x+1}{2x}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l} \;\;(x \quad +1 \quad):(2x) = \frac{1}{2} \\ \;-(x) \\ \hline \qquad\quad 1 \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \dfrac{1\cdot 2x-(x+1)\cdot 2}{(2x)^2}$

$= \dfrac{2x-(2x+2)}{(2x)^2}$

$= \dfrac{-2}{(2x)^2}$

$= \dfrac{-2}{4x^2} f'(x) = \dfrac{-2}{4x^2}$

$f''(x) = \dfrac{0\cdot 4x^2-(-2)\cdot 8x}{(4x^2)^2}$

$= \dfrac{0-(-16x)}{(4x^2)^2}$

$= \frac{16x}{(4x^2)^2}$
$= \frac{16x}{16x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x + 1 = 0$
$\underline{x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Horizontale Asymptote: $y = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = 0$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -(\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-1; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

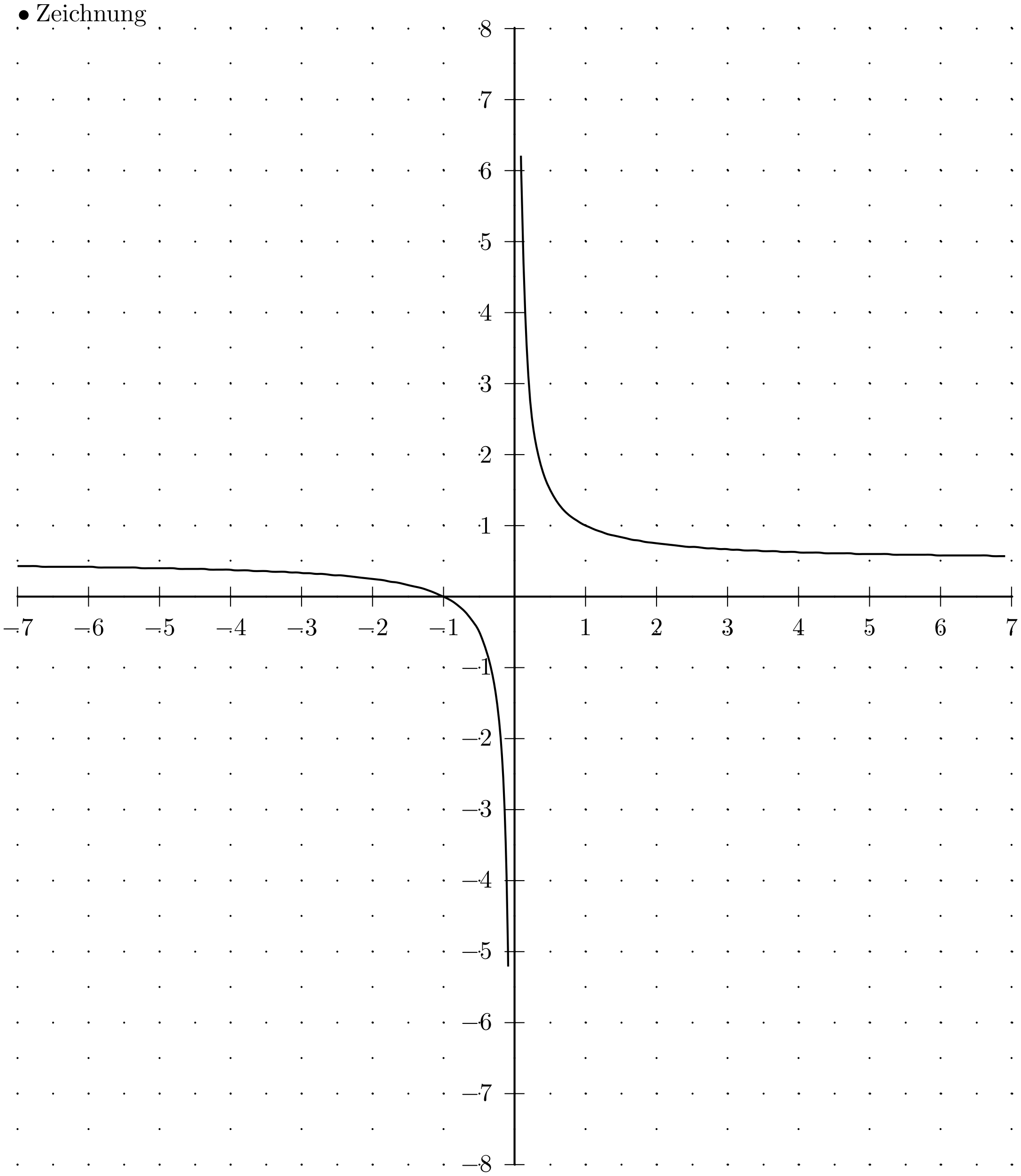
$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{98}$	$-0,003$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{11}{26}$	$-0,012$	$-0,004$
-6	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{72}$	$-0,005$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{9}{22}$	$-0,017$	$-0,006$
-5	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{50}$	$-0,008$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{2}{81}$	$-0,011$
-4	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{64}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{5}{14}$	$-\frac{2}{49}$	$-0,023$
-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{27}$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$-0,08$	$-0,064$
-2	$\frac{1}{4}$	$-0,125$	$-0,125$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-0,222$	$-0,296$
-1	$n.def.$	$-0,5$	$n.def.$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-2,001$	$-8,004$
0	$+unendlich$	$3673\frac{23}{49}$	$-unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$+unendlich$	$3673\frac{23}{49}$	$-unendlich$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$-2,001$	$8,004$
1	1	$-0,5$	1
$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$-0,222$	$0,296$
2	$\frac{3}{4}$	$-0,125$	$0,125$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$-0,08$	$0,064$
3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{1}{27}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{9}{14}$	$-\frac{2}{49}$	$0,023$
4	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{11}{18}$	$-\frac{2}{81}$	$0,011$
5	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{50}$	$0,008$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{13}{22}$	$-0,017$	$0,006$
6	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{72}$	$0,005$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{15}{26}$	$-0,012$	$0,004$
7	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{98}$	$0,003$

• Zeichnung



Aufgabe (27)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\frac{-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{8}}{-\frac{1}{2}}$

Zaehler faktorisieren:

$-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{8}=0$

$-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{8}=0$

$x_{1/2}=\frac{-\frac{2}{5}\pm\sqrt{\frac{2}{5}^2-4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{8}}}{2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$x_{1/2}=\frac{-\frac{2}{5}\pm\sqrt{0,327}}{-\frac{2}{3}}$

$x_{1/2}=\frac{-\frac{2}{5}\pm 0,572}{-\frac{2}{3}}$

$x_1=\frac{-\frac{2}{5}+0,572}{-\frac{2}{3}}\qquad x_2=\frac{-\frac{2}{5}-0,572}{-\frac{2}{3}}$

$x_1=-0,257\qquad x_2=1,457$

$\underline{x_1=-0,257;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=1,457;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\frac{-\frac{1}{3}(x+0,257)(x-1,457)}{-\frac{1}{2}}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f\left(x\right)=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}(x+0,257)(x-1,457)$

$f'\left(x\right)=1\frac{1}{3}x-\frac{4}{5}$

$f''\left(x\right)=1\frac{1}{3}$

$F(x)=\int(\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{1}{4})dx=\frac{2}{9}x^3-\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{4}x+c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$ $\mathbb{W}=](-0,49),\infty[$

• Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=[\frac{2}{3}\cdot\infty^2]=\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=[\frac{2}{3}\cdot(-\infty)^2]=\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f\left(-x\right)=\frac{2}{3}\cdot(-x)^2-\frac{4}{5}\cdot(-x)-\frac{1}{4}$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{1}{4}=0$

$\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{1}{4}=0$

$x_{1/2}=\frac{+\frac{4}{5}\pm\sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}}{2\cdot\frac{2}{3}}$

$x_{1/2} = \dfrac{+\frac{4}{5} \pm \sqrt{1\frac{23}{75}}}{1\frac{1}{3}}$

$x_{1/2} = \dfrac{\frac{4}{5} \pm 1,143}{1\frac{1}{3}}$

$x_1 = \dfrac{\frac{4}{5} + 1,143}{1\frac{1}{3}} \qquad x_2 = \dfrac{\frac{4}{5} - 1,143}{1\frac{1}{3}}$

$x_1 = 1,457 \qquad x_2 = -0,257$

$\underline{x_1 = -0,257; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 1,457; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-0,257$	$< x <$	$1,457$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -0,257[\quad \cup \quad]1,457; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-0,257; 1,457[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = 1\dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{5} = 0$

$1\dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{5} = 0 \qquad / + \dfrac{4}{5}$

$1\dfrac{1}{3}x = \dfrac{4}{5} \qquad / : 1\dfrac{1}{3}$

$x = \dfrac{\frac{4}{5}}{1\frac{1}{3}}$

$x = \dfrac{3}{5}$

$\underline{x_3 = \dfrac{3}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(\dfrac{3}{5}) = 1\dfrac{1}{3} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(\dfrac{3}{5}/-0,49)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$\frac{3}{5}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]\dfrac{3}{5}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

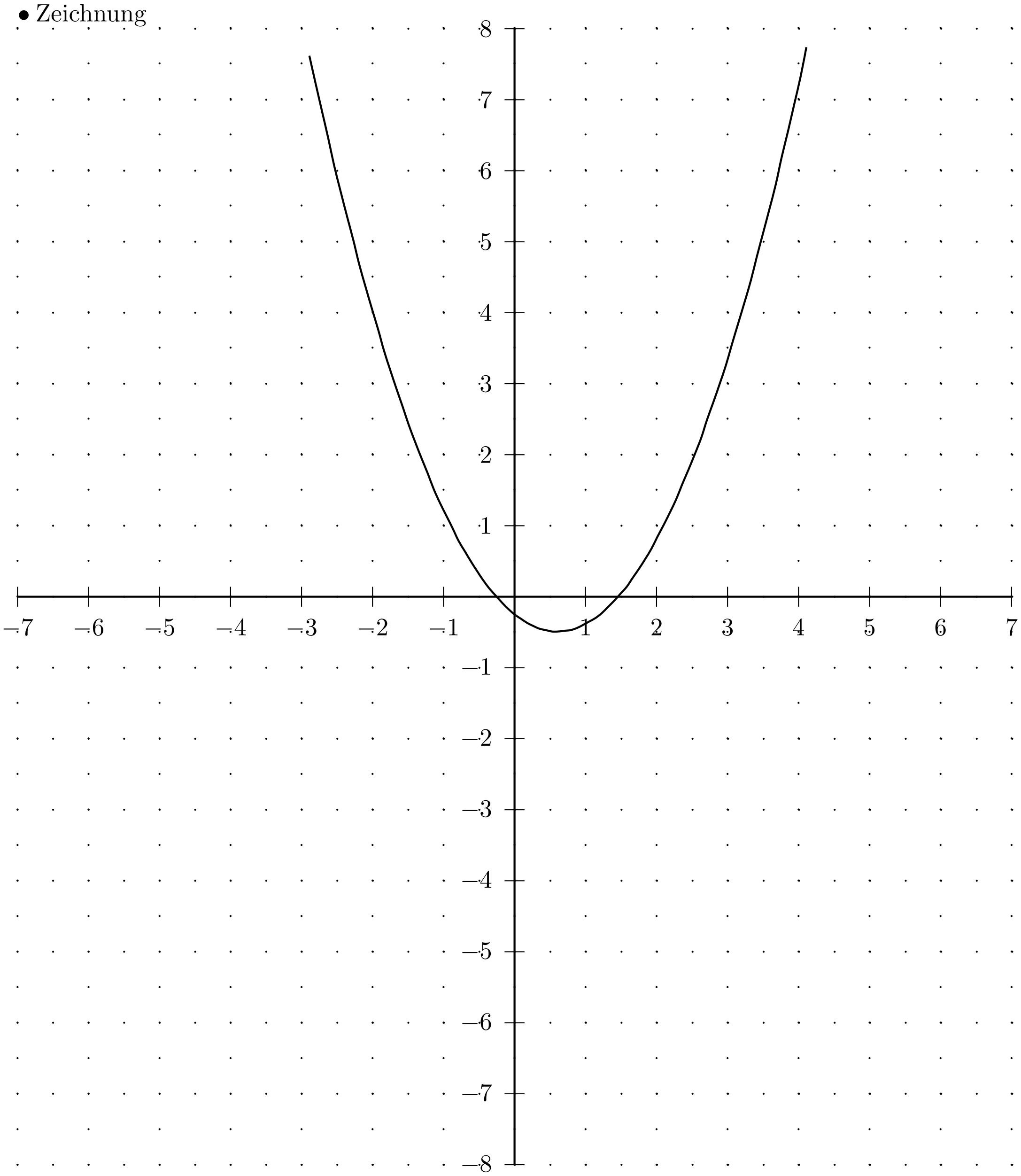
$\underline{x \in]-\infty; \dfrac{3}{5}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$38\frac{1}{60}$	$-10\frac{2}{15}$	$1\frac{1}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$33\frac{7}{60}$	$-9\frac{7}{15}$	$1\frac{1}{3}$
-6	$28\frac{11}{20}$	$-8\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{3}$
$-5\frac{1}{2}$	$24\frac{19}{60}$	$-8\frac{2}{15}$	$1\frac{1}{3}$
-5	$20\frac{5}{12}$	$-7\frac{7}{15}$	$1\frac{1}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$16\frac{17}{20}$	$-6\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{3}$
-4	$13\frac{37}{60}$	$-6\frac{2}{15}$	$1\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$10\frac{43}{60}$	$-5\frac{7}{15}$	$1\frac{1}{3}$
-3	$8\frac{3}{20}$	$-4\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{3}$
$-2\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{12}$	$-4\frac{2}{15}$	$1\frac{1}{3}$
-2	$4\frac{1}{60}$	$-3\frac{7}{15}$	$1\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{9}{20}$	$-2\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{3}$
-1	$1\frac{13}{60}$	$-2\frac{2}{15}$	$1\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{19}{60}$	$-1\frac{7}{15}$	$1\frac{1}{3}$
0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{3}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{29}{60}$	$-\frac{2}{15}$	$1\frac{1}{3}$
1	$-\frac{23}{60}$	$\frac{8}{15}$	$1\frac{1}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{3}$
2	$\frac{49}{60}$	$1\frac{13}{15}$	$1\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{12}$	$2\frac{8}{15}$	$1\frac{1}{3}$
3	$3\frac{7}{20}$	$3\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{3}$
$3\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{60}$	$3\frac{13}{15}$	$1\frac{1}{3}$
4	$7\frac{13}{60}$	$4\frac{8}{15}$	$1\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$9\frac{13}{20}$	$5\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{3}$
5	$12\frac{5}{12}$	$5\frac{13}{15}$	$1\frac{1}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$15\frac{31}{60}$	$6\frac{8}{15}$	$1\frac{1}{3}$
6	$18\frac{19}{20}$	$7\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{3}$
$6\frac{1}{2}$	$22\frac{43}{60}$	$7\frac{13}{15}$	$1\frac{1}{3}$
7	$26\frac{49}{60}$	$8\frac{8}{15}$	$1\frac{1}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (28)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{5x+6}{-x}$
Zaehler faktorisieren:
$5x+6=0$

$5x+6=0 \qquad / -6$
$5x=-6 \qquad / :5$
$x=\frac{-6}{5}$
$x=-1\frac{1}{5}$
$\underline{x_1=-1\frac{1}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$-x=0$
$x=0 \Rightarrow x=0$
$\underline{x_2=0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{5(x+1\frac{1}{5})}{-x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0;\}$
$f(x) = \frac{5x+6}{-x}$
$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l} \;\;(5x \quad +6 \quad):(-x)=-5 \\ -(5x) \\ \hline \qquad\quad 6 \end{array}$$

$f(x)=-5+\frac{6}{-x}$
• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$= f'(x) = \frac{5\cdot(-x)-(5x+6)\cdot(-1)}{(-x)^2}$
$= \frac{(-5x)-(-5x-6)}{(-x)^2}$
$= \frac{+6}{(-x)^2}$
$= \frac{+6}{x^2} f'(x) = \frac{6}{x^2}$
$f''(x) = \frac{0\cdot x^2-6\cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0-12x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-12x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-12x}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler=0$
$5x+6=0$
$\underline{x_3=-1\frac{1}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{-1} = -5$
Horizontale Asymptote: $y=-5$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = 0$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1\frac{1}{5}$	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1\frac{1}{5}; 0[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -1\frac{1}{5}[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

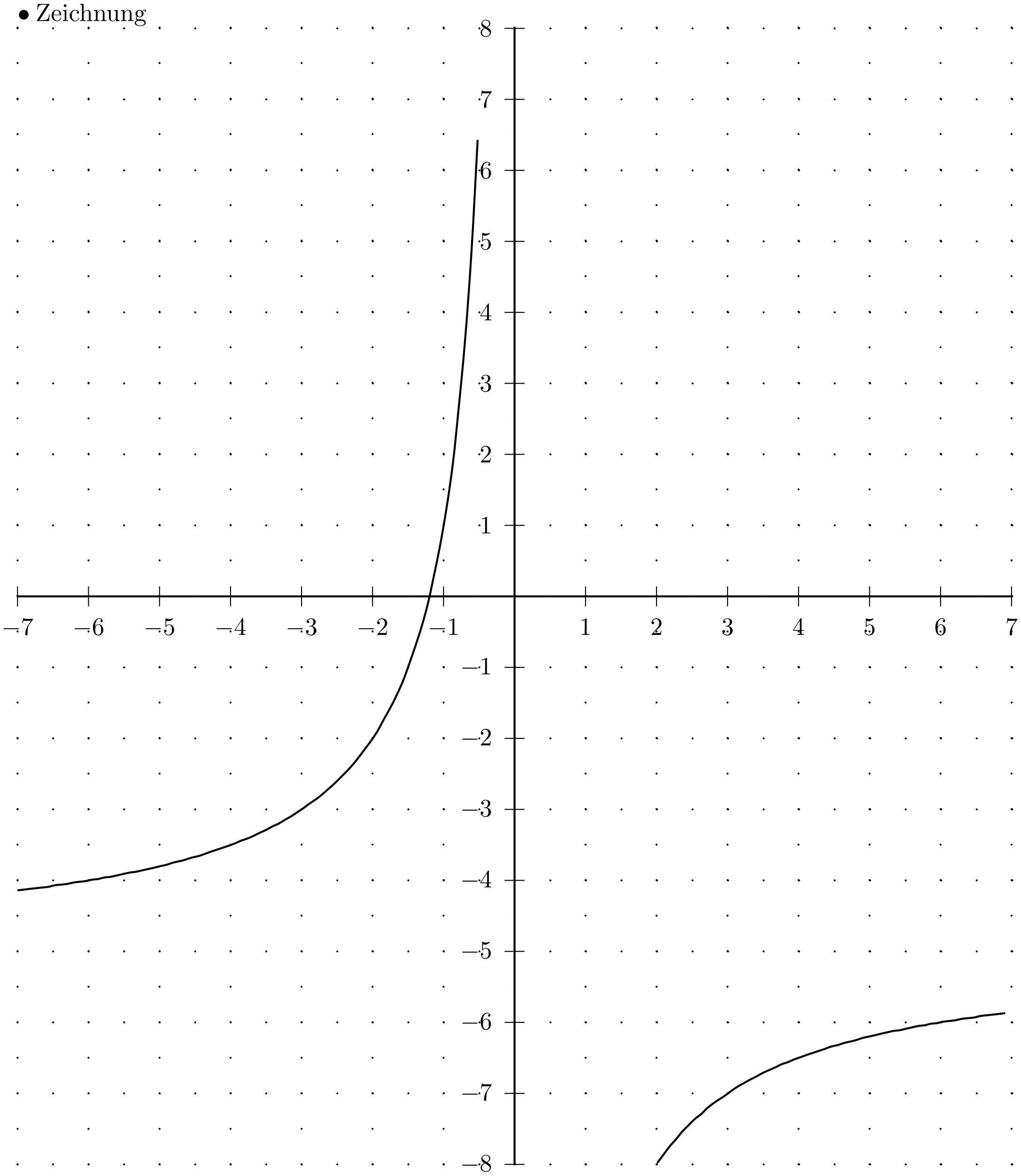
$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-4\frac{1}{7}$	$\frac{6}{49}$	$0,035$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{13}$	$0,142$	$0,044$
-6	-4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{10}{11}$	$0,198$	$0,072$
-5	$-3\frac{4}{5}$	$0,24$	$0,096$
$-4\frac{1}{2}$	$-3\frac{2}{3}$	$0,296$	$0,132$
-4	$-3\frac{1}{2}$	$0,375$	$0,188$
$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{2}{7}$	$0,49$	$0,28$
-3	-3	$0,667$	$0,444$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{5}$	$0,96$	$0,768$
-2	-2	$1,5$	$1,5$
$-1\frac{1}{2}$	-1	$2,667$	$3,556$
-1	1	$6,001$	$12,002$
$-\frac{1}{2}$	7	$24,013$	$96,052$
0	$-unendlich$	$-44081\frac{31}{49}$	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	$-44081\frac{31}{49}$	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	-17	$24,013$	$-96,052$
1	-11	$6,001$	$-12,002$
$1\frac{1}{2}$	-9	$2,667$	$-3,556$
2	-8	$1,5$	$-1,5$
$2\frac{1}{2}$	$-7\frac{2}{5}$	$0,96$	$-0,768$
3	-7	$0,667$	$-0,444$
$3\frac{1}{2}$	$-6\frac{5}{7}$	$0,49$	$-0,28$
4	$-6\frac{1}{2}$	$0,375$	$-0,188$
$4\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{3}$	$0,296$	$-0,132$
5	$-6\frac{1}{5}$	$0,24$	$-0,096$
$5\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{11}$	$0,198$	$-0,072$
6	-6	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{18}$
$6\frac{1}{2}$	$-5\frac{12}{13}$	$0,142$	$-0,044$
7	$-5\frac{6}{7}$	$\frac{6}{49}$	$-0,035$

• Zeichnung



Aufgabe (29)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{-3x+1}{x+2}$
Zaehler faktorisieren:
$-3x+1=0$

$-3x+1=0 \qquad /-1$
$-3x=-1 \qquad /:(-3)$
$x=\dfrac{-1}{-3}$
$x=\dfrac{1}{3}$
$\underline{x_1=\frac{1}{3};\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x+2=0$

$x+2=0 \qquad /-2$
$x=-2$
$\underline{x_2=-2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{-3(x-\frac{1}{3})}{(x+2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2;\}$
$f(x) = \dfrac{-3x+1}{x+2}$
$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{lll} (-3x & +1 &):(x+2) = -3 \\ -(-3x & -6) & \\ \hline & 7 & \end{array}$$

$f(x) = -3 + \dfrac{7}{x+2}$
• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$= f'(x) = \dfrac{(-3)\cdot(x+2)-(-3x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{(-3x-6)-(-3x+1)}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{-7}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{-7}{x^2+4x+4} f'(x) = \dfrac{-7}{x^2+4x+4}$
$f''(x) = \dfrac{0\cdot(x^2+4x+4)-(-7)\cdot(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \dfrac{0-(-14x-28)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \dfrac{14x+28}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \dfrac{14x+28}{x^4+8x^3+24x^2+32x+16}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler=0$
$-3x+1=0$
$\underline{x_3=\frac{1}{3};\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{-3}{1} = -3$
Horizontale Asymptote: $y = -3$
$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = -2$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-2; \frac{1}{3}[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$1x^2 + 4x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 0}{2}$
$x_1 = \frac{-4 + 0}{2} \qquad x_2 = \frac{-4 - 0}{2}$
$x_1 = -2 \qquad x_2 = -2$

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

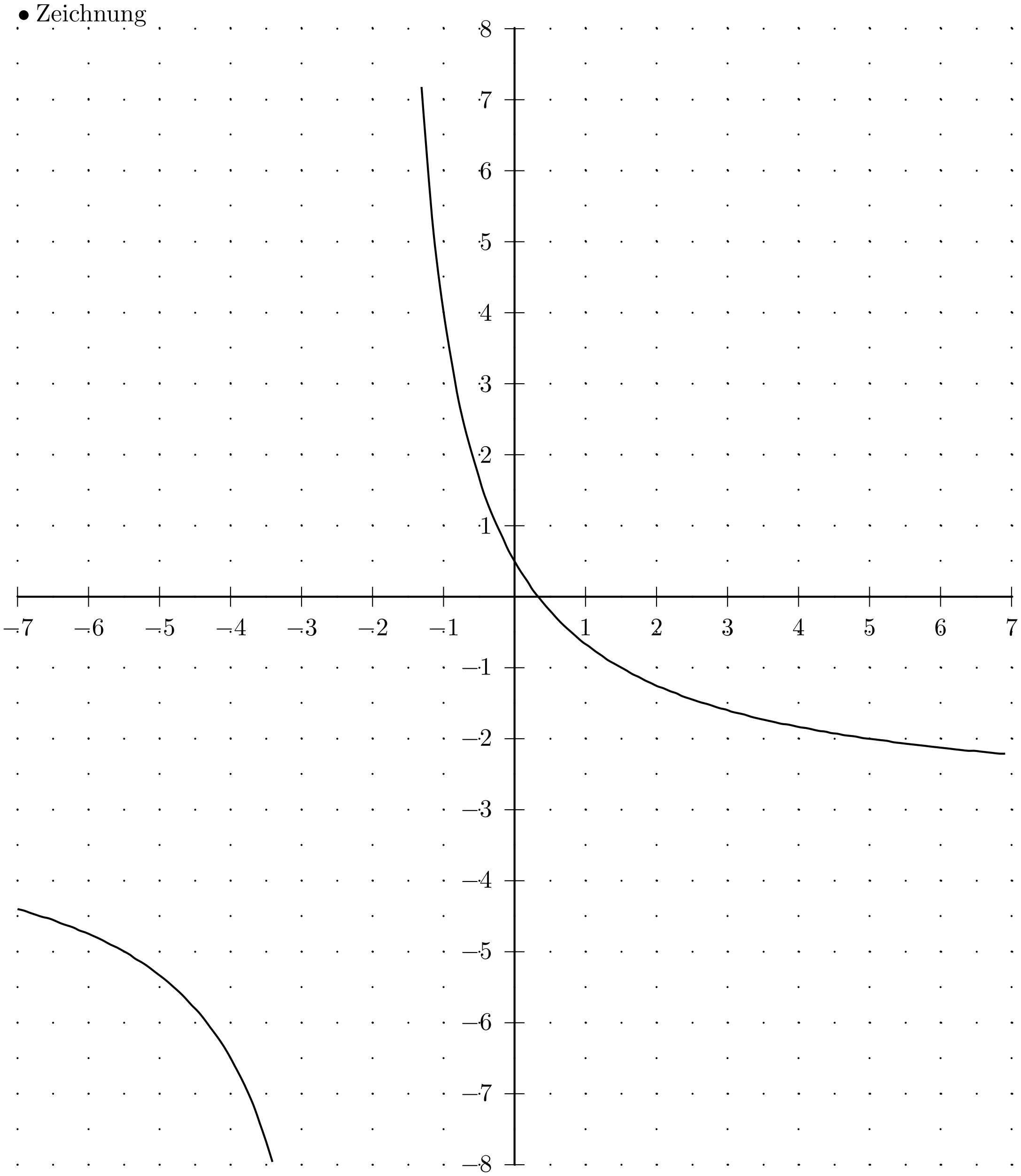
$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-4\frac{2}{5}$	$-0,28$	$-0,112$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{5}{9}$	$-0,346$	$-0,154$
-6	$-4\frac{3}{4}$	$-0,438$	$-0,219$
$-5\frac{1}{2}$	-5	$-0,571$	$-0,327$
-5	$-5\frac{1}{3}$	$-0,778$	$-0,519$
$-4\frac{1}{2}$	$-5\frac{4}{5}$	$-1,12$	$-0,896$
-4	$-6\frac{1}{2}$	$-1,75$	$-1,75$
$-3\frac{1}{2}$	$-7\frac{2}{3}$	$-3,111$	$-4,148$
-3	-10	$-7,001$	$-14,002$
$-2\frac{1}{2}$	-17	$-28,015$	$-112,061$
-2	$+unendlich$	$51428\frac{4}{7}$	$-unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	11	$-28,015$	$112,061$
-1	4	$-7,001$	$14,002$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	$-3,111$	$4,148$
0	$\frac{1}{2}$	$-1,75$	$1,75$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$-1,75$	$1,75$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-1,12$	$0,896$
1	$-\frac{2}{3}$	$-0,778$	$0,519$
$1\frac{1}{2}$	-1	$-0,571$	$0,327$
2	$-1\frac{1}{4}$	$-0,438$	$0,219$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{4}{9}$	$-0,346$	$0,154$
3	$-1\frac{3}{5}$	$-0,28$	$0,112$
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{8}{11}$	$-0,231$	$0,084$
4	$-1\frac{5}{6}$	$-\frac{7}{36}$	$0,065$
$4\frac{1}{2}$	$-1\frac{12}{13}$	$-0,166$	$0,051$
5	-2	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{49}$
$5\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{15}$	$-0,124$	$0,033$
6	$-2\frac{1}{8}$	$-\frac{7}{64}$	$0,027$
$6\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{17}$	$-0,097$	$0,023$
7	$-2\frac{2}{9}$	$-\frac{7}{81}$	$0,019$

• Zeichnung



Aufgabe (30)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}}{-\frac{1}{4}x - 2}$

Zaehler faktorisieren:

$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5} = 0$

$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5} = 0 \qquad / -\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{3}x = -\frac{1}{5} \qquad / : \left(-\frac{1}{3}\right)$

$x = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{3}}$

$x = \frac{3}{5}$

$\underline{x_1 = \frac{3}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-\frac{1}{4}x - 2 = 0$

$-\frac{1}{4}x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$-\frac{1}{4}x = 2 \qquad / : \left(-\frac{1}{4}\right)$

$x = \frac{2}{-\frac{1}{4}}$

$x = -8$

$\underline{x_2 = -8; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}(x - \frac{3}{5})}{-\frac{1}{4}(x + 8)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-8;\}$

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}}{-\frac{1}{4}x - 2}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{lll} (-\frac{1}{3}x & +\frac{1}{5} &) : (-\frac{1}{4}x - 2) = 1\frac{1}{3} \\ -(-\frac{1}{3}x & -2\frac{2}{3}) & \\ \hline & 2\frac{13}{15} & \end{array}$$

$f(x) = 1\frac{1}{3} + \frac{2\frac{13}{15}}{-\frac{1}{4}x - 2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \frac{(-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{4}x - 2) - (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}) \cdot (-\frac{1}{4})}{(-\frac{1}{4}x - 2)^2}$

$= \frac{(\frac{1}{12}x + \frac{2}{3}) - (\frac{1}{12}x - \frac{1}{20})}{(-\frac{1}{4}x - 2)^2}$

$= \frac{+\frac{43}{60}}{(-\frac{1}{4}x - 2)^2}$

$= \frac{+\frac{43}{60}}{\frac{1}{16}x^2 + x + 4} f'(x) = \frac{\frac{43}{60}}{\frac{1}{16}x^2 + x + 4}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (\frac{1}{16}x^2 + x + 4) - \frac{43}{60} \cdot (\frac{1}{8}x + 1)}{(\frac{1}{16}x^2 + x + 4)^2}$

$= \frac{0 - (0,09x + \frac{43}{60})}{(\frac{1}{16}x^2 + x + 4)^2}$

$= \dfrac{-0,09x - \frac{43}{60}}{(\frac{1}{16}x^2 + x + 4)^2}$

$= \dfrac{-0,09x - \frac{43}{60}}{0,004x^4 + \frac{1}{8}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 8x + 16}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{5} = 0$

$x_3 = \dfrac{3}{5}$;   1-fache Nullstelle

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{-0,333333333333333}{-0,25} = 1\dfrac{1}{3}$

Horizontale Asymptote: $y = 1\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x \to -8} f(x) = \infty$

Vertikale Asymptote: $x = -8$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	-8	$< x <$	$\frac{3}{5}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -8[\quad \cup \quad]\frac{3}{5}; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-8; \frac{3}{5}[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$\frac{1}{16}x^2 + x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{16} \cdot 4}}{2 \cdot \frac{1}{16}}$

$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{0}}{\frac{1}{8}}$

$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm 0}{\frac{1}{8}}$

$x_1 = \dfrac{-1 + 0}{\frac{1}{8}} \qquad x_2 = \dfrac{-1 - 0}{\frac{1}{8}}$

$x_1 = -8 \qquad x_2 = -8$

	$x <$	-8	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

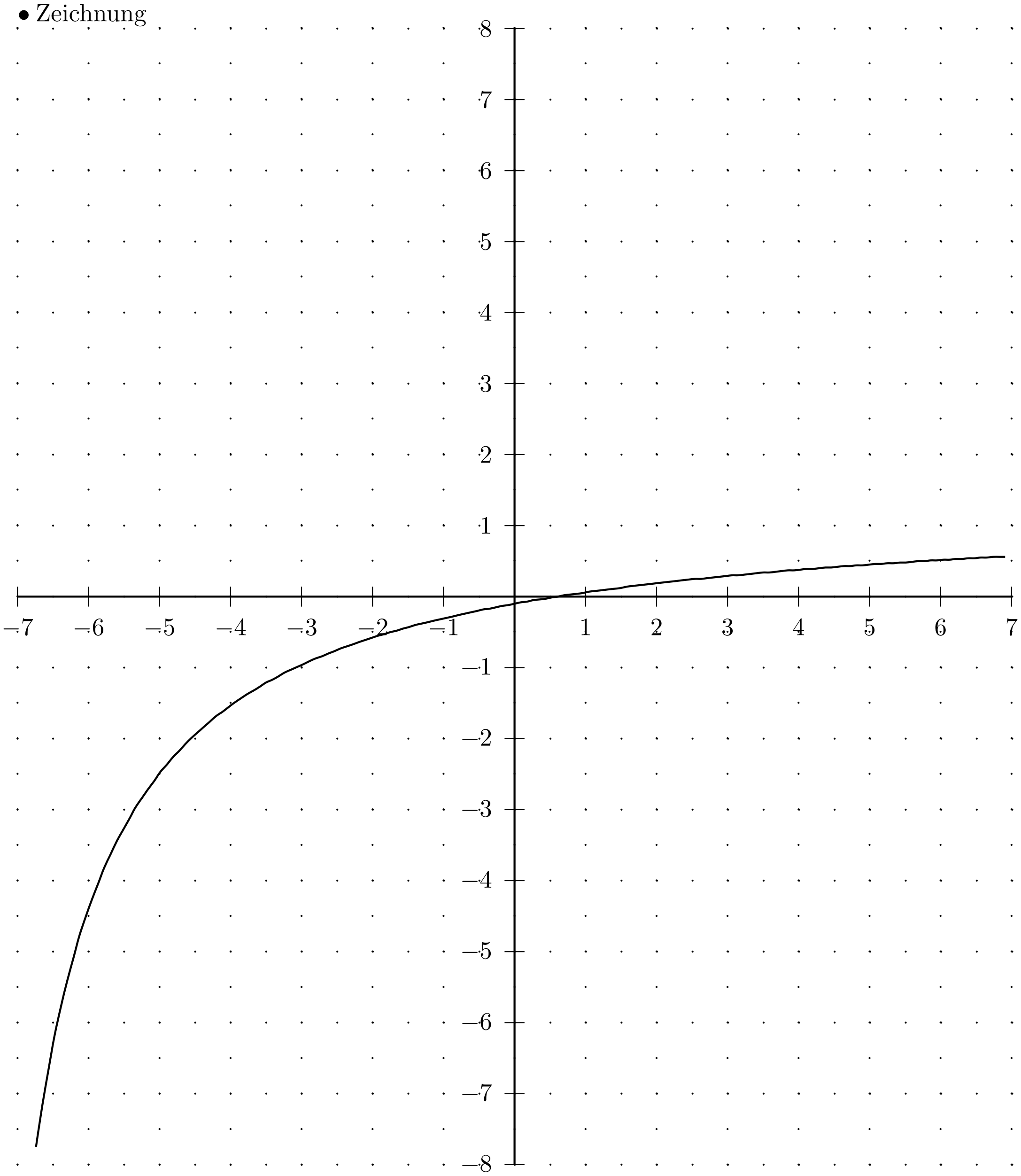
$x \in]-\infty; -8[\quad \cup \quad]-8; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-10\frac{2}{15}$	$11,468$	$-22,936$
$-6\frac{1}{2}$	$-6\frac{14}{45}$	$5,097$	$-6,795$
-6	$-4\frac{2}{5}$	$2,867$	$-2,867$
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{19}{75}$	$1,835$	$-1,468$
-5	$-2\frac{22}{45}$	$1,274$	$-0,849$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{33}{35}$	$0,936$	$-0,535$
-4	$-1\frac{8}{15}$	$0,717$	$-0,358$
$-3\frac{1}{2}$	$-1,215$	$0,566$	$-0,252$
-3	$-\frac{24}{25}$	$0,459$	$-0,183$
$-2\frac{1}{2}$	$-0,752$	$0,379$	$-0,138$
-2	$-\frac{26}{45}$	$0,319$	$-0,106$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{28}{65}$	$0,271$	$-0,084$
-1	$-0,305$	$0,234$	$-0,067$
$-\frac{1}{2}$	$-0,196$	$0,204$	$-0,054$
0	$-\frac{1}{10}$	$0,179$	$-0,045$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{10}$	$0,179$	$-0,045$
$\frac{1}{2}$	$-0,016$	$0,159$	$-0,037$
1	$0,059$	$0,142$	$-0,031$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{12}{95}$	$0,127$	$-0,027$
2	$\frac{14}{75}$	$0,115$	$-0,023$
$2\frac{1}{2}$	$0,241$	$0,104$	$-0,02$
3	$\frac{16}{55}$	$0,095$	$-0,017$
$3\frac{1}{2}$	$0,336$	$0,087$	$-0,015$
4	$\frac{17}{45}$	$0,08$	$-0,013$
$4\frac{1}{2}$	$0,416$	$0,073$	$-0,012$
5	$0,451$	$0,068$	$-0,01$
$5\frac{1}{2}$	$0,484$	$0,063$	$-0,009$
6	$\frac{18}{35}$	$0,059$	$-0,008$
$6\frac{1}{2}$	$0,543$	$0,055$	$-0,008$
7	$0,569$	$0,051$	$-0,007$

• Zeichnung



Aufgabe (31)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^2-5x-27}{x+3}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2-5x-27=0$

$1x^2-5x-27=0$

$x_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot(-27)}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{133}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{5 \pm 11,533}{2}$

$x_1 = \frac{5+11,533}{2} \qquad x_2 = \frac{5-11,533}{2}$

$x_1 = 8,266 \qquad x_2 = -3,266$

$\underline{x_1 = -3,266; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 8,266; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x+3=0$

$x+3=0 \qquad /-3$

$x=-3$

$\underline{x_3 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x+3,266)(x-8,266)}{(x+3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3;\}$

$f(x) = \frac{x^2-5x-27}{x+3}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll}
(x^2 & -5x & -27 &) : (x+3) = x-8 \\
-(x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & -8x & -27 & \\
 & -(-8x & -24) & \\
\hline
 & & -3 &
\end{array}$$

$f(x) = x-8+\frac{-3}{x+3}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \frac{(2x-5)\cdot(x+3)-(x^2-5x-27)\cdot 1}{(x+3)^2}$

$= \frac{(2x^2+x-15)-(x^2-5x-27)}{(x+3)^2}$

$= \frac{x^2+6x+12}{(x+3)^2}$

$= \frac{x^2+6x+12}{x^2+6x+9} f'(x) = \frac{x^2+6x+12}{x^2+6x+9}$

$f''(x) = \frac{(2x+6)\cdot(x^2+6x+9)-(x^2+6x+12)\cdot(2x+6)}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \frac{(2x^3+18x^2+54x+54)-(2x^3+18x^2+60x+72)}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \frac{-6x-18}{(x^2+6x+9)^2}$

$$= \frac{-6x-18}{x^4+12x^3+54x^2+108x+81}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^2-5x-27=0$
$x_4 = -3,266; \quad$ 1-fache Nullstelle
$x_5 = 8,266; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Schiefe Asymptote:$y = x-8$
$\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = -3$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,266$	$< x <$	-3	$< x <$	$8,266$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-3,266;-3[\quad \cup \quad]8,266;\infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-3,266[\quad \cup \quad]-3;8,266[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$1x^2+6x+12=0$
$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1}$$
$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-12}}{2}$$
Diskriminante negativ keine Lösung

$1x^2+6x+9=0$
$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}$$
$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm 0}{2}$$
$$x_1 = \frac{-6+0}{2} \qquad x_2 = \frac{-6-0}{2}$$
$x_1 = -3 \qquad x_2 = -3$

	$x <$	-3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

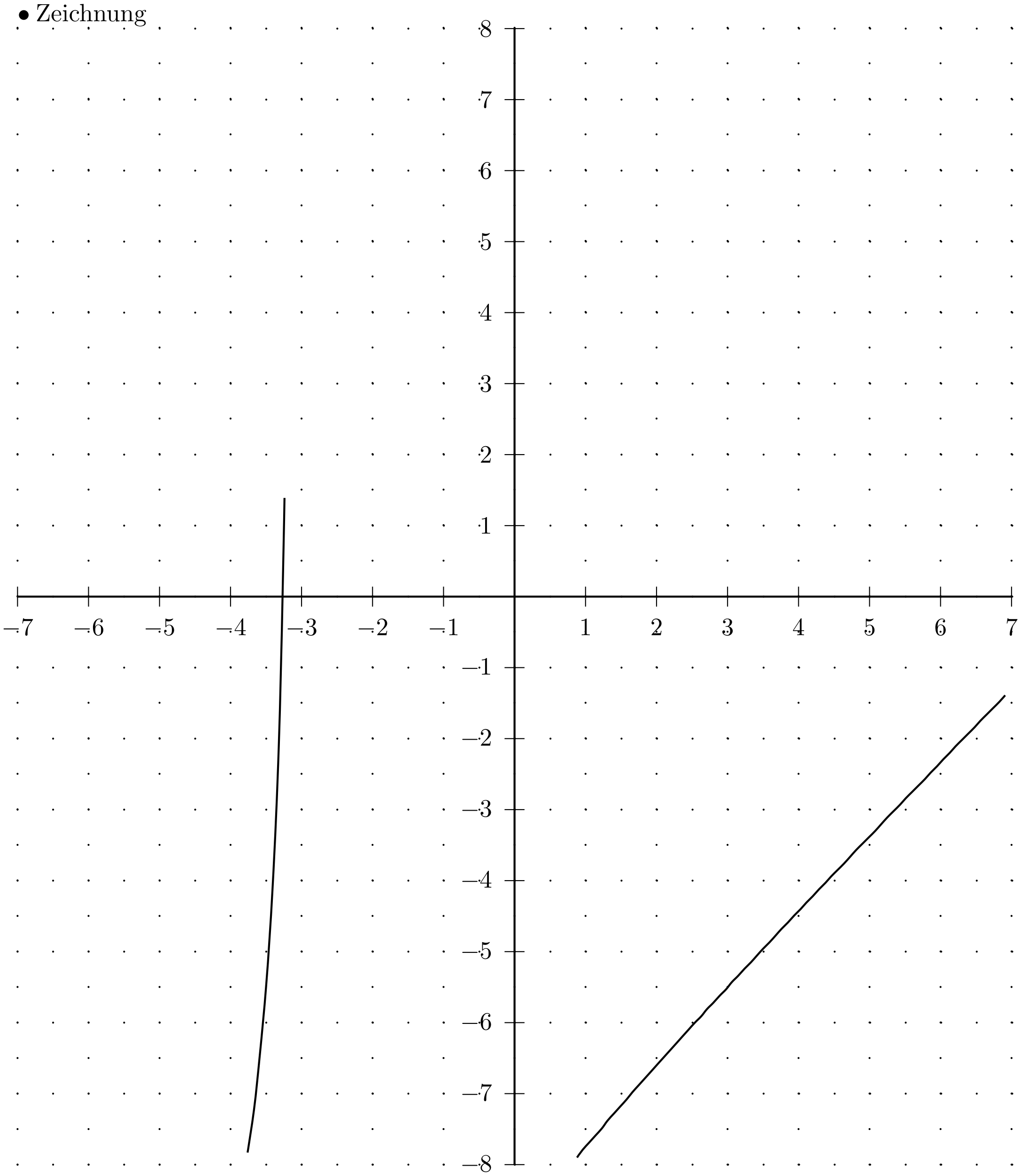
$x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]-3;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-14\frac{1}{4}$	$1,188$	$\frac{3}{32}$
$-6\frac{1}{2}$	$-13\frac{9}{14}$	$1,245$	$0,14$
-6	-13	$1,333$	$0,222$
$-5\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{10}$	$1,48$	$0,384$
-5	$-11\frac{1}{2}$	$1,75$	$0,75$
$-4\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{2}$	$2,333$	$1,778$
-4	-9	4	$6,001$
$-3\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{2}$	$13,007$	$48,026$
-3	$-unendlich$	$-22039\frac{40}{49}$	$+unendlich$
$-2\frac{1}{2}$	$-16\frac{1}{2}$	$13,007$	$-48,026$
-2	-13	4	$-6,001$
$-1\frac{1}{2}$	$-11\frac{1}{2}$	$2,333$	$-1,778$
-1	$-10\frac{1}{2}$	$1,75$	$-0,75$
$-\frac{1}{2}$	$-9\frac{7}{10}$	$1,48$	$-0,384$
0	-9	$1,333$	$-0,222$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-9	$1,333$	$-0,222$
$\frac{1}{2}$	$-8\frac{5}{14}$	$1,245$	$-0,14$
1	$-7\frac{3}{4}$	$1,188$	$-\frac{3}{32}$
$1\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{6}$	$1\frac{4}{27}$	$-0,066$
2	$-6\frac{3}{5}$	$1\frac{3}{25}$	$-0,048$
$2\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{22}$	$1,099$	$-0,036$
3	$-5\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{36}$
$3\frac{1}{2}$	$-4\frac{25}{26}$	$1,071$	$-0,022$
4	$-4\frac{3}{7}$	$1\frac{3}{49}$	$-0,017$
$4\frac{1}{2}$	$-3\frac{9}{10}$	$1\frac{4}{75}$	$-0,014$
5	$-3\frac{3}{8}$	$1\frac{3}{64}$	$-0,012$
$5\frac{1}{2}$	$-2\frac{29}{34}$	$1,042$	$-0,01$
6	$-2\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{27}$	$-0,008$
$6\frac{1}{2}$	$-1\frac{31}{38}$	$1,033$	$-0,007$
7	$-1\frac{3}{10}$	$1,03$	$-0,006$

• Zeichnung



Aufgabe (32)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{4x^2 + 12x + 5}{2x + 1}$

Zaehler faktorisieren:

$4x^2 + 12x + 5 = 0$

$4x^2 + 12x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4}$

$x_{1/2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{64}}{8}$

$x_{1/2} = \dfrac{-12 \pm 8}{8}$

$x_1 = \dfrac{-12 + 8}{8} \qquad x_2 = \dfrac{-12 - 8}{8}$

$x_1 = -\dfrac{1}{2} \qquad x_2 = -2\dfrac{1}{2}$

$\underline{x_1 = -2\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$2x + 1 = 0$

$2x + 1 = 0 \qquad / - 1$

$2x = -1 \qquad / : 2$

$x = \dfrac{-1}{2}$

$x = -\dfrac{1}{2}$

$\underline{x_3 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{4(x + 2\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})}{2(x + \frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}; \right\}$

• Term gekürzen

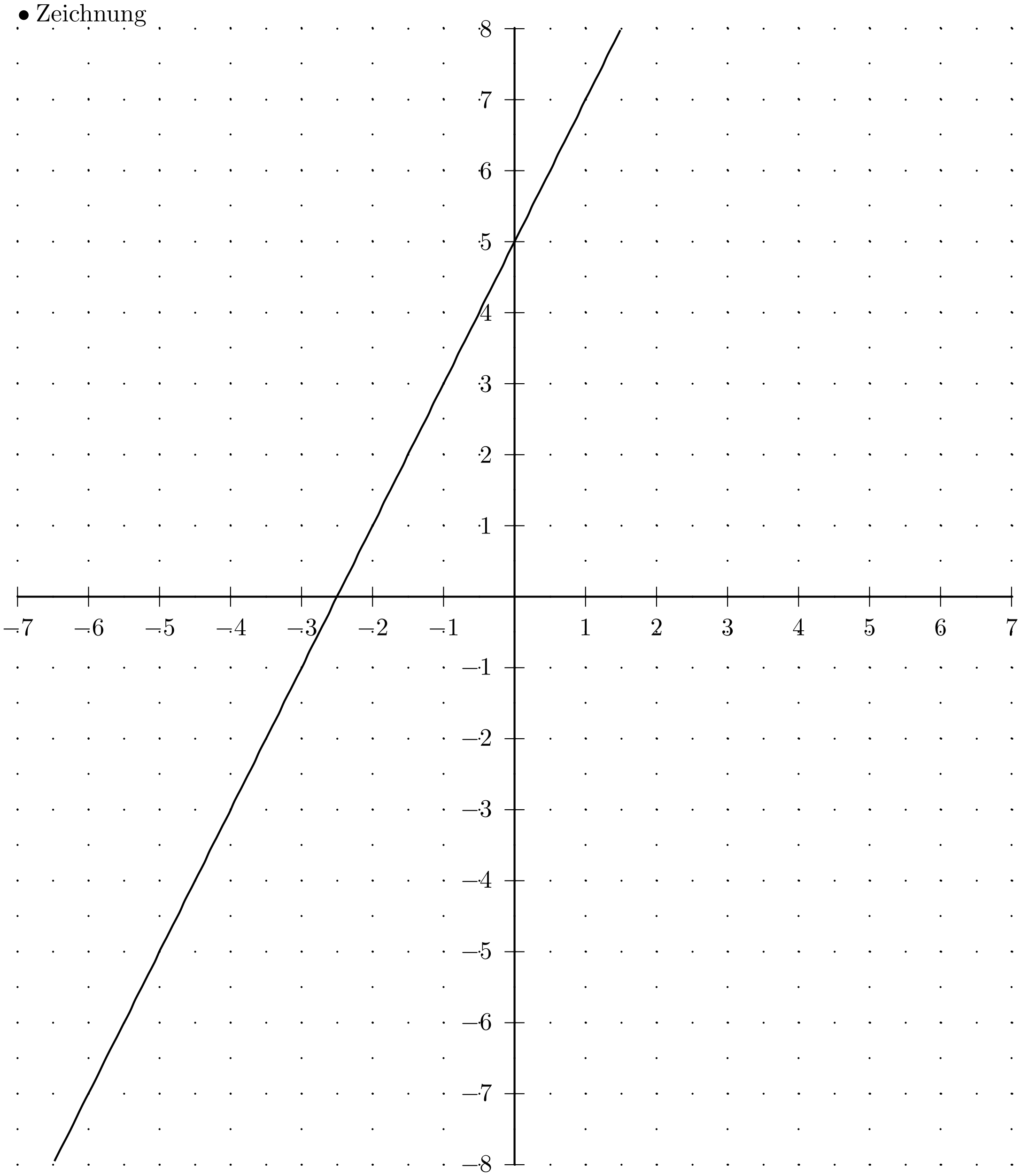
$f(x) = \dfrac{4(x + 2\frac{1}{2})}{2}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-9	2	0
$-6\frac{1}{2}$	-8	2	0
-6	-7	2	0
$-5\frac{1}{2}$	-6	2	0
-5	-5	2	0
$-4\frac{1}{2}$	-4	2	0
-4	-3	2	0
$-3\frac{1}{2}$	-2	2	0
-3	-1	2	0
$-2\frac{1}{2}$	0	2	0
-2	1	2	0
$-1\frac{1}{2}$	2	2	0
-1	3	2	0
$-\frac{1}{2}$	$n.def.$	2	$n.def.$
0	5	2	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	5	2	0
$\frac{1}{2}$	6	2	0
1	7	2	0
$1\frac{1}{2}$	8	2	0
2	9	2	0
$2\frac{1}{2}$	10	2	0
3	11	2	0
$3\frac{1}{2}$	12	2	0
4	13	2	0
$4\frac{1}{2}$	14	2	0
5	15	2	0
$5\frac{1}{2}$	16	2	0
6	17	2	0
$6\frac{1}{2}$	18	2	0
7	19	2	0

• Zeichnung



Aufgabe (33)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{3x^3 - 10x^2 + 7x - 12}{x - 3}$

Zaehler faktorisieren:

$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$

$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:3

$$\begin{array}{llllll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 &) : (x-3) = 3x^2 - x + 4 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & & \\ \hline
 & -x^2 & +7x & -12 & \\
 & -(-x^2 & +3x) & & \\ \hline
 & & 4x & -12 & \\
 & & -(4x & -12) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$3x^2 - x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$

$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$\underline{x_1 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 3 = 0$

$x - 3 = 0 \qquad / + 3$

$x = 3$

$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})(x-3)}{(x-3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3;\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = 3x^2 - x + 4$

$f'(x) = 6x - 1$

$f''(x) = 6$

$F(x) = \displaystyle\int (3x^2 - x + 4)dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]3\dfrac{11}{12}, \infty[$

• Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [3 \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [3 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x) + 4$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = 3x^2 - x + 4 = 0$

$3x^2 - x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichentabelle:
kein Vorzeichenwechsel
$x \in \mathbb{R} \qquad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 6x - 1 = 0$

$6x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$6x = 1 \qquad / : 6$
$x = \dfrac{1}{6}$
$x = \dfrac{1}{6}$
$x_1 = \dfrac{1}{6}; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f''(\frac{1}{6}) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(\frac{1}{6}/3\frac{11}{12})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$\frac{1}{6}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

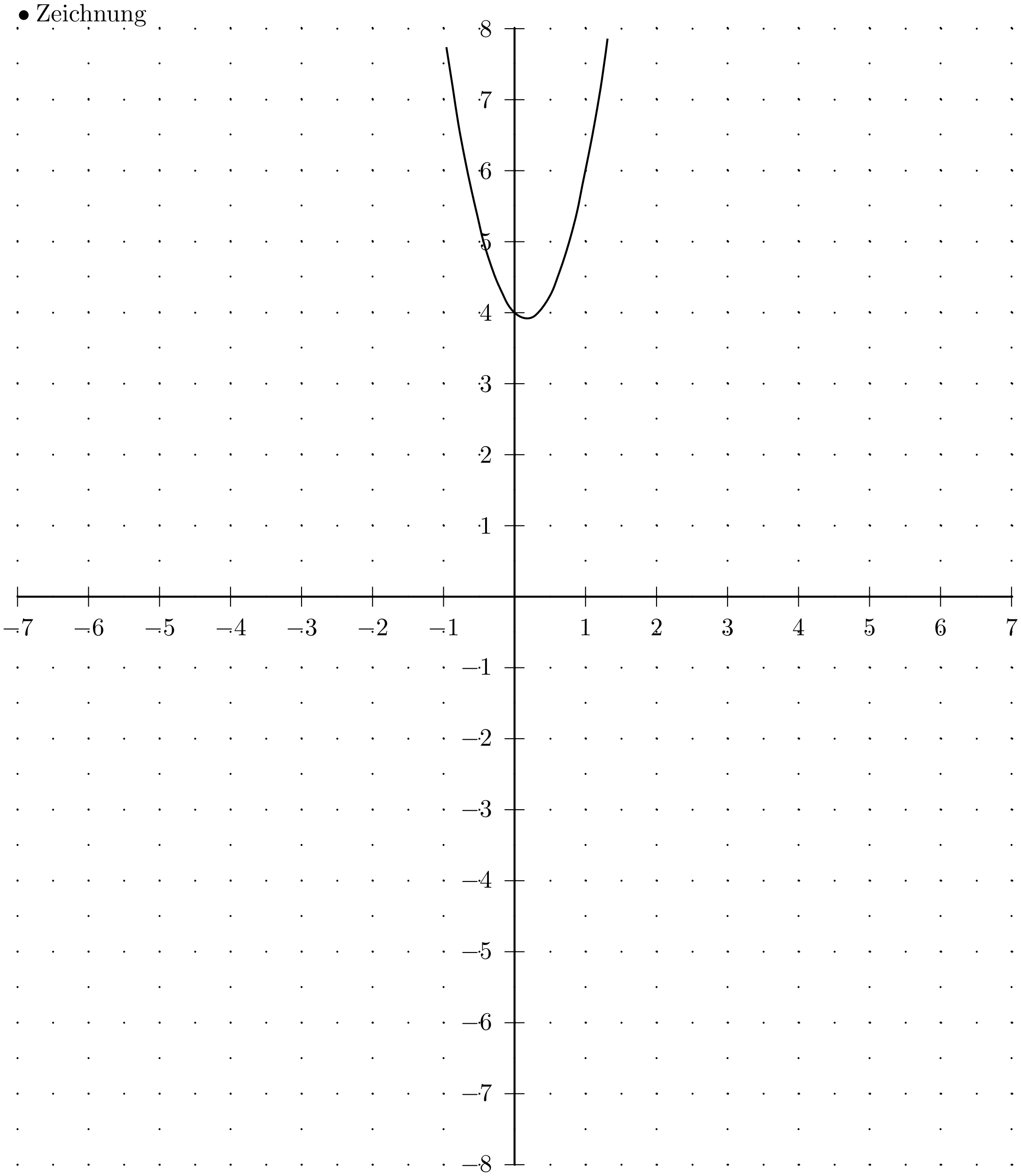
$x \in]\frac{1}{6}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend
$x \in] - \infty; \frac{1}{6}[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	158	-43	6
$-6\frac{1}{2}$	$137\frac{1}{4}$	-40	6
-6	118	-37	6
$-5\frac{1}{2}$	$100\frac{1}{4}$	-34	6
-5	84	-31	6
$-4\frac{1}{2}$	$69\frac{1}{4}$	-28	6
-4	56	-25	6
$-3\frac{1}{2}$	$44\frac{1}{4}$	-22	6
-3	34	-19	6
$-2\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{4}$	-16	6
-2	18	-13	6
$-1\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	-10	6
-1	8	-7	6
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-4	6
0	4	-1	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	-1	6
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	2	6
1	6	5	6
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	8	6
2	14	11	6
$2\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	14	6
3	$n.def.$	17	$n.def.$
$3\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{4}$	20	6
4	48	23	6
$4\frac{1}{2}$	$60\frac{1}{4}$	26	6
5	74	29	6
$5\frac{1}{2}$	$89\frac{1}{4}$	32	6
6	106	35	6
$6\frac{1}{2}$	$124\frac{1}{4}$	38	6
7	144	41	6

• Zeichnung



Aufgabe (34)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llllll} (x^3 & -6x^2 & +11x & -6 &) : (x-1) = x^2 - 5x + 6 \\ -(x^3 & -x^2) & & & \\ \hline & -5x^2 & +11x & -6 & \\ & -(-5x^2 & +5x) & & \\ \hline & & 6x & -6 & \\ & & -(6x & -6) & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

$1x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{+5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$x_1 = \dfrac{5+1}{2} \qquad x_2 = \dfrac{5-1}{2}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$

$\underline{x_1 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$x = 2$

$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2;\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

$f'(x) = 2x - 4$

$f''(x) = 2$

$F(x) = \displaystyle\int (x^2 - 4x + 3)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-1), \infty[$

• Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 4 \cdot (-x) + 3$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$

$1x^2 - 4x + 3 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{4 \pm 2}{2}$
$x_1 = \frac{4+2}{2} \qquad x_2 = \frac{4-2}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$
$\underline{x_1 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	1	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 1[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]1; 3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x - 4 = 0$

$2x - 4 = 0 \qquad / + 4$
$2x = 4 \qquad / : 2$
$x = \frac{4}{2}$
$x = 2$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2/-1)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

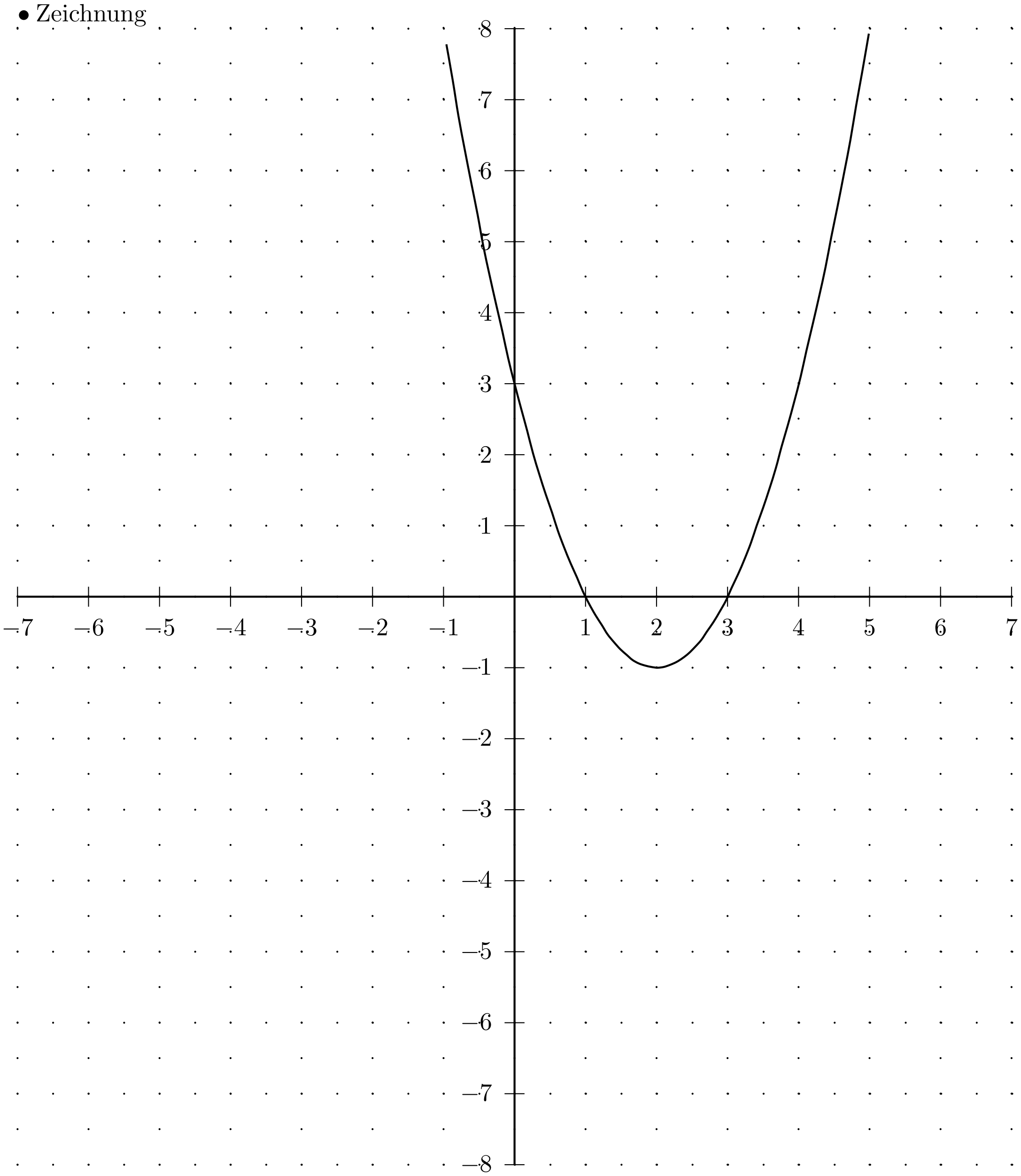
$\underline{\quad x \in]-\infty; 2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	80	-18	2
$-6\frac{1}{2}$	$71\frac{1}{4}$	-17	2
-6	63	-16	2
$-5\frac{1}{2}$	$55\frac{1}{4}$	-15	2
-5	48	-14	2
$-4\frac{1}{2}$	$41\frac{1}{4}$	-13	2
-4	35	-12	2
$-3\frac{1}{2}$	$29\frac{1}{4}$	-11	2
-3	24	-10	2
$-2\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$	-9	2
-2	15	-8	2
$-1\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	-7	2
-1	8	-6	2
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-5	2
0	3	-4	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	3	-4	2
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	-3	2
1	0	-2	2
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	2
2	$n.def.$	0	$n.def.$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	1	2
3	0	2	2
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	3	2
4	3	4	2
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	5	2
5	8	6	2
$5\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	7	2
6	15	8	2
$6\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$	9	2
7	24	10	2

• Zeichnung



Aufgabe (35)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 1}$
Zaehler faktorisieren:
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$
\begin{array}{llll}
(x^3 & -2x^2 & -5x & +6 \quad) : (x-1) = x^2 - x - 6 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & -x^2 & -5x & +6 \\
 & -(-x^2 & +x) & \\
\hline
 & & -6x & +6 \\
 & & -(-6x & +6) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$1x^2 - x - 6 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{25}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$
$x_1 = \dfrac{1+5}{2} \qquad x_2 = \dfrac{1-5}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x - 1 = 0$

$x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$x = 1$
$\underline{x_4 = 1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)(x-3)}{(x-1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1;\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \dfrac{(x+2)(x-3)}{1}$
• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$
$f'(x) = 2x - 1$
$f''(x) = 2$
$F(x) = \displaystyle\int (x^2 - x - 6)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-6\frac{1}{4}), \infty[$

• Grenzwerte:
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x) - 6$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 - x - 6 = 0$

$1x^2 - x - 6 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{25}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$
$x_1 = \dfrac{1+5}{2} \qquad x_2 = \dfrac{1-5}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2; 3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x - 1 = 0$

$2x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$2x = 1 \qquad / : 2$
$x = \dfrac{1}{2}$
$x = \dfrac{1}{2}$
$\underline{x_3 = \dfrac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(\frac{1}{2}/-6\frac{1}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

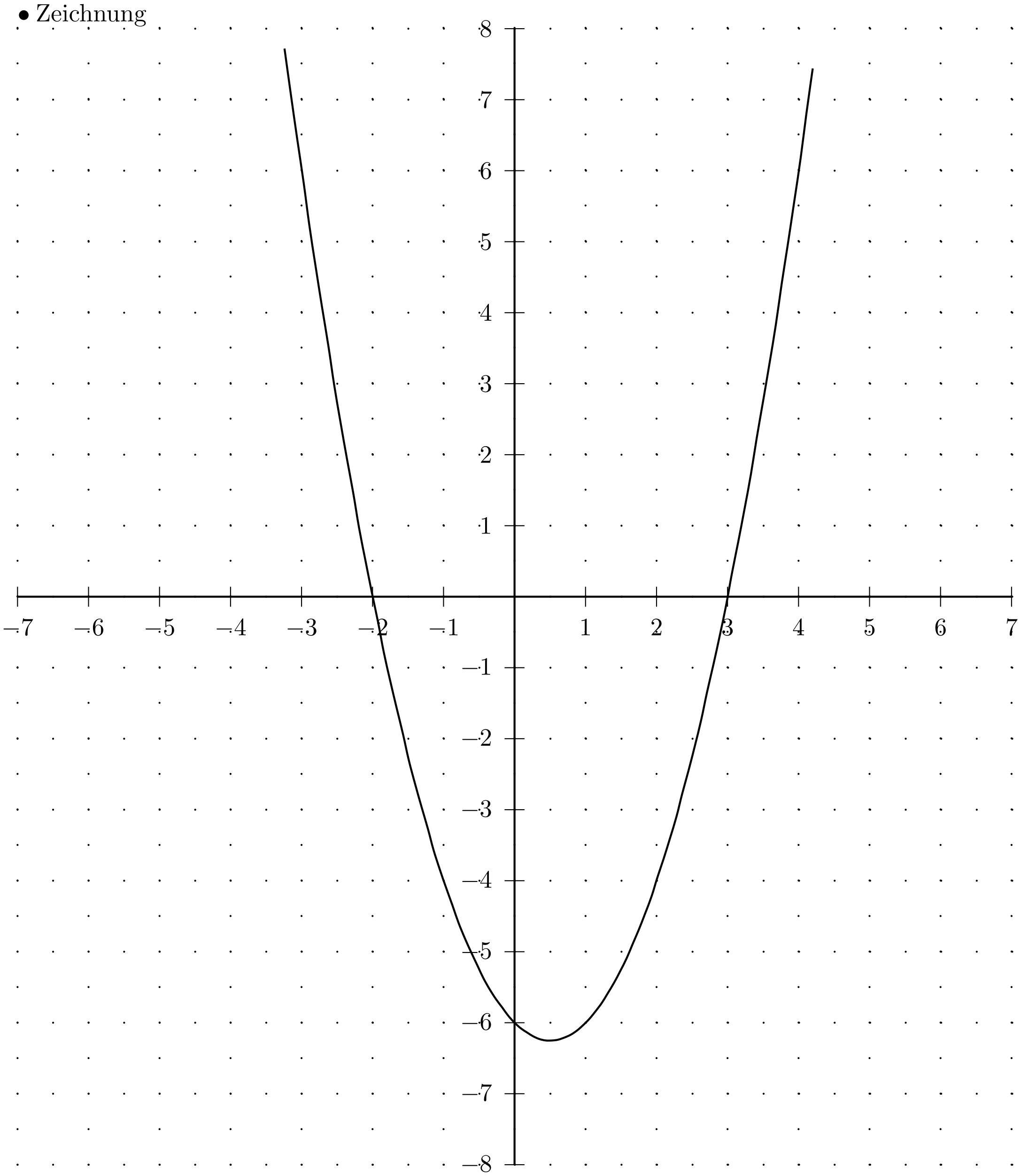
$\underline{x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	50	-15	2
$-6\frac{1}{2}$	$42\frac{3}{4}$	-14	2
-6	36	-13	2
$-5\frac{1}{2}$	$29\frac{3}{4}$	-12	2
-5	24	-11	2
$-4\frac{1}{2}$	$18\frac{3}{4}$	-10	2
-4	14	-9	2
$-3\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{4}$	-8	2
-3	6	-7	2
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	-6	2
-2	0	-5	2
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	-4	2
-1	-4	-3	2
$-\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	-2	2
0	-6	-1	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-6	-1	2
$\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{4}$	0	2
1	$n.def.$	1	$n.def.$
$1\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	2	2
2	-4	3	2
$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	4	2
3	0	5	2
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	6	2
4	6	7	2
$4\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{4}$	8	2
5	14	9	2
$5\frac{1}{2}$	$18\frac{3}{4}$	10	2
6	24	11	2
$6\frac{1}{2}$	$29\frac{3}{4}$	12	2
7	36	13	2

• Zeichnung



Aufgabe (36)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{3x^3 - 10x^2 + 7x - 12}{x - 3}$

Zaehler faktorisieren:

$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$

$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:3

$$\begin{array}{llllll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 &) : (x-3) = 3x^2 - x + 4 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12 & \\
 & -(-x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & & 4x & -12 & \\
 & & -(4x & -12) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$3x^2 - x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$

$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$\underline{x_1 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 3 = 0$

$x - 3 = 0 \qquad / + 3$

$x = 3$

$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})(x - 3)}{(x - 3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3;\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = 3x^2 - x + 4$

$f'(x) = 6x - 1$

$f''(x) = 6$

$F(x) = \displaystyle\int (3x^2 - x + 4)dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]3\dfrac{11}{12}, \infty[$

• Grenzwerte:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [3 \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [3 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x) + 4$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = 3x^2 - x + 4 = 0$

$3x^2 - x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichentabelle:
kein Vorzeichenwechsel
$x \in \mathbb{R} \qquad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 6x - 1 = 0$

$6x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$6x = 1 \qquad / : 6$
$x = \frac{1}{6}$
$x = \frac{1}{6}$
$x_1 = \frac{1}{6}; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f''(\frac{1}{6}) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(\frac{1}{6}/3\frac{11}{12})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$\frac{1}{6}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

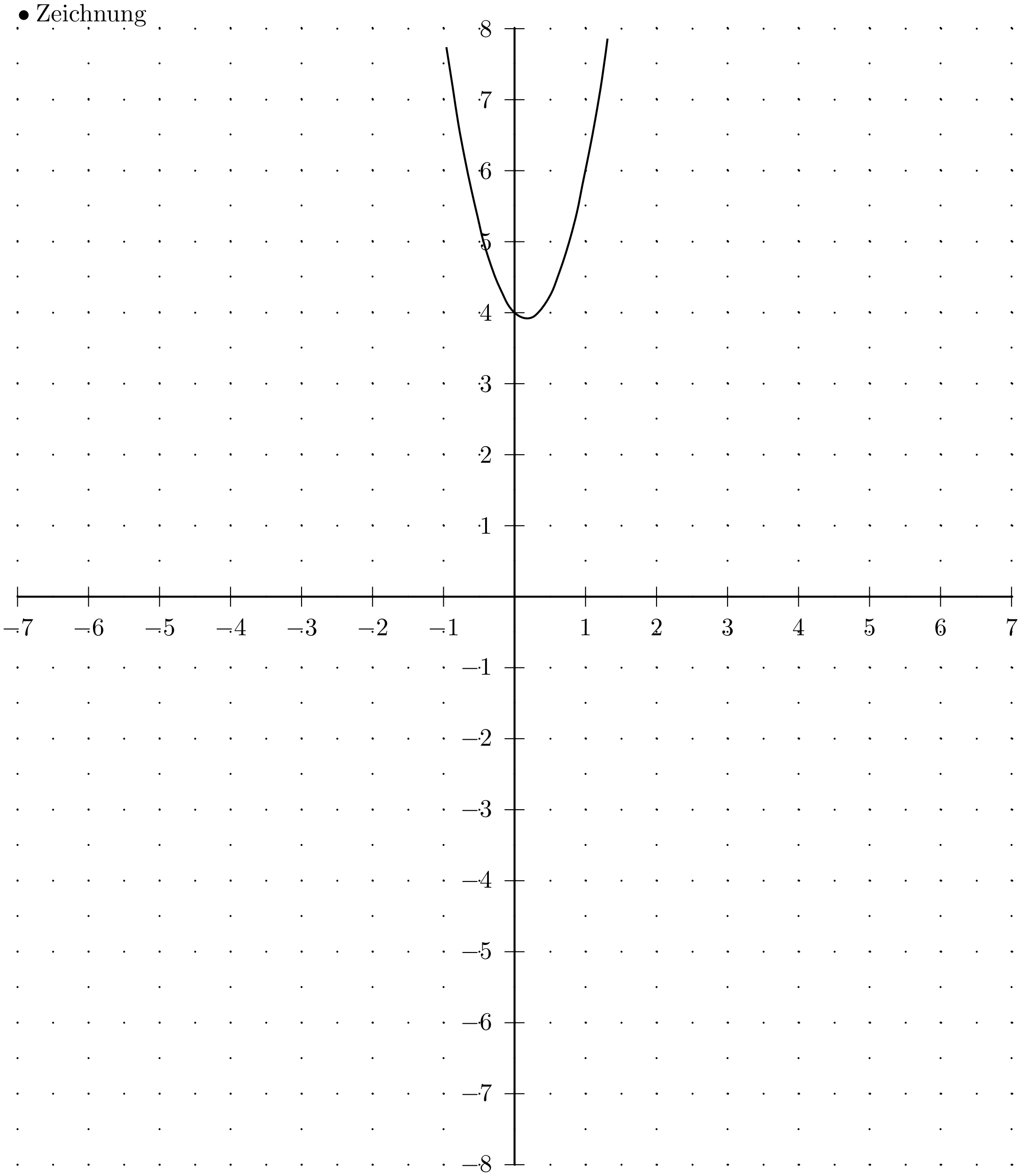
$x \in]\frac{1}{6}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend
$x \in]-\infty; \frac{1}{6}[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	158	-43	6
$-6\frac{1}{2}$	$137\frac{1}{4}$	-40	6
-6	118	-37	6
$-5\frac{1}{2}$	$100\frac{1}{4}$	-34	6
-5	84	-31	6
$-4\frac{1}{2}$	$69\frac{1}{4}$	-28	6
-4	56	-25	6
$-3\frac{1}{2}$	$44\frac{1}{4}$	-22	6
-3	34	-19	6
$-2\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{4}$	-16	6
-2	18	-13	6
$-1\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	-10	6
-1	8	-7	6
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-4	6
0	4	-1	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	-1	6
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	2	6
1	6	5	6
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	8	6
2	14	11	6
$2\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	14	6
3	$n.def.$	17	$n.def.$
$3\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{4}$	20	6
4	48	23	6
$4\frac{1}{2}$	$60\frac{1}{4}$	26	6
5	74	29	6
$5\frac{1}{2}$	$89\frac{1}{4}$	32	6
6	106	35	6
$6\frac{1}{2}$	$124\frac{1}{4}$	38	6
7	144	41	6

• Zeichnung



Aufgabe (37)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2}{x-2}$

Zaehler faktorisieren:

$\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 = 0$

$\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 = 0$

$NumerischeSuche:$

$\underline{x_1 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$x = 2$

$\underline{x_4 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{\frac{1}{3}(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2;\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \frac{\frac{1}{3}(x+1)(x-3)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{3}(x+1)(x-3)$

$f'(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$f''(x) = \frac{2}{3}$

$F(x) = \int (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1)dx = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-1\frac{1}{3}), \infty[$

• Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{3} \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{3} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f(-x) = \frac{1}{3} \cdot (-x)^2 - \frac{2}{3} \cdot (-x) - 1$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0$

$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1)}}{2 \cdot \frac{1}{3}}$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{2}{3} \pm \sqrt{1\frac{7}{9}}}{\frac{2}{3}}$

$x_{1/2} = \frac{\frac{2}{3} \pm 1\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$

$x_1 = \frac{\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \qquad x_2 = \frac{\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -(\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-1; 3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \qquad / + \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \qquad / : \frac{2}{3}$

$x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$

$x = 1$

$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(1) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1/-1\frac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

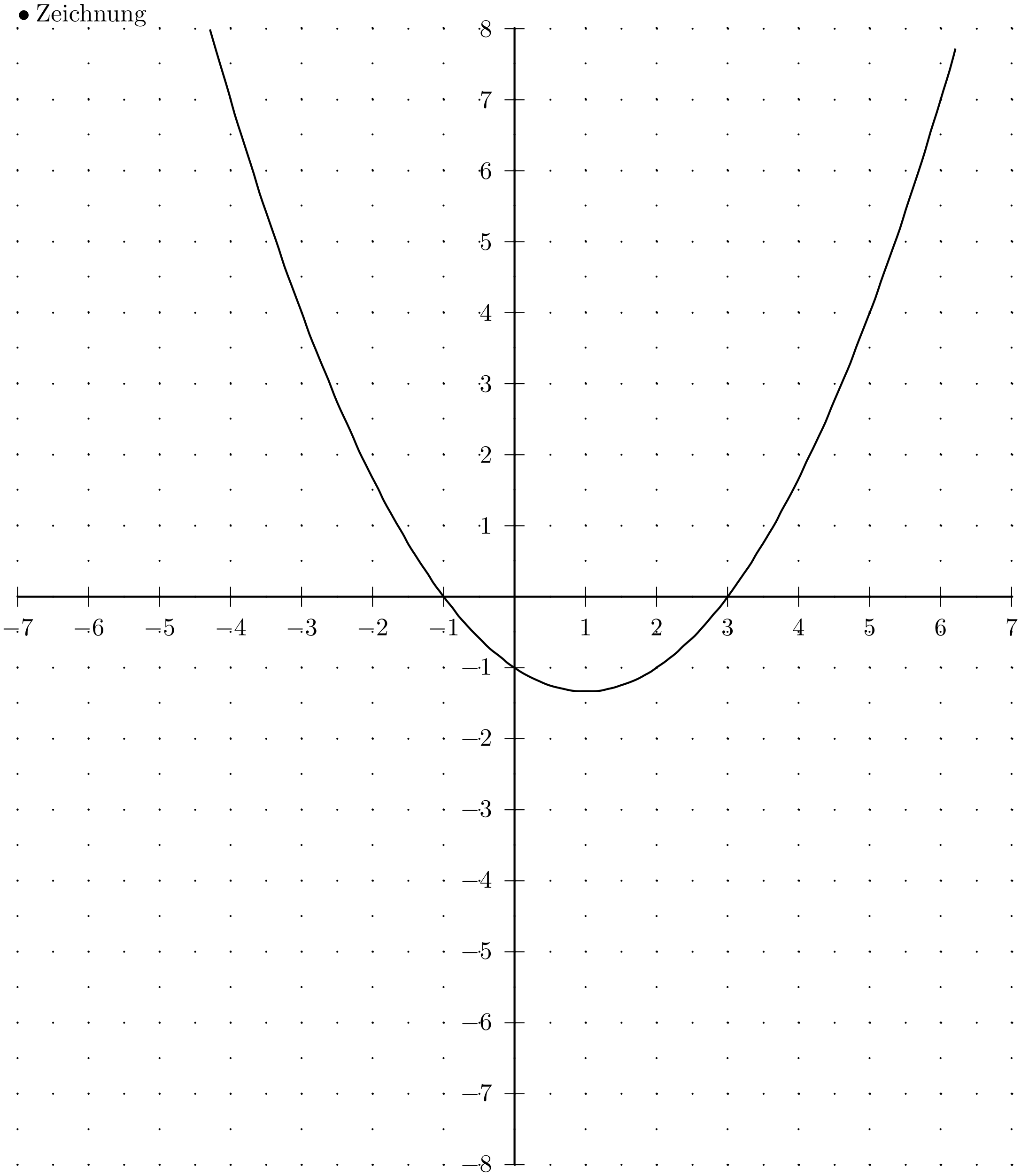
$\underline{\quad x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	20	$-5\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$17\frac{5}{12}$	-5	$\frac{2}{3}$
-6	15	$-4\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-5\frac{1}{2}$	$12\frac{3}{4}$	$-4\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
-5	$10\frac{2}{3}$	-4	$\frac{2}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	$-3\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
-4	7	$-3\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$5\frac{5}{12}$	-3	$\frac{2}{3}$
-3	4	$-2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
-2	$1\frac{2}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
-1	0	$-1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{12}$	-1	$\frac{2}{3}$
0	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	$-1\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$+unendlich$	$\frac{2}{3}$	$-unendlich$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{12}$	1	$\frac{2}{3}$
3	0	$1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
4	$1\frac{2}{3}$	2	$\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
5	4	$2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{5}{12}$	3	$\frac{2}{3}$
6	7	$3\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$6\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	$3\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
7	$10\frac{2}{3}$	4	$\frac{2}{3}$

• Zeichnung



Aufgabe (38)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x - 2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{lllll} (x^3 & +x^2 & -4x & -4 &) : (x+1) = x^2 - 4 \\ -(x^3 & +x^2) & & & \\ \hline & -4x & -4 & & \\ & & -(-4x & -4) & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

$1x^2 - 4 = 0 \quad / + 4$

$1x^2 = 4 \quad / : 1$

$x^2 = \frac{4}{1}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \quad / + 2$

$x = 2$

$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2;\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$

$f'(x) = 2x + 3$

$f''(x) = 2$

$F(x) = \int (x^2 + 3x + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-\frac{1}{4}), \infty[$

• Grenzwerte:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 2$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = x^2 + 3x + 2 = 0$

$1x^2 + 3x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2}$
$x_1 = \dfrac{-3+1}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-3-1}{2}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-2; -(\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x + 3 = 0$

$2x + 3 = 0 \qquad / -3$
$2x = -3 \qquad / : 2$
$x = \dfrac{-3}{2}$
$x = -1\dfrac{1}{2}$
$\underline{x_3 = -1\dfrac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1\dfrac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1\dfrac{1}{2}/-\dfrac{1}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-1\dfrac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

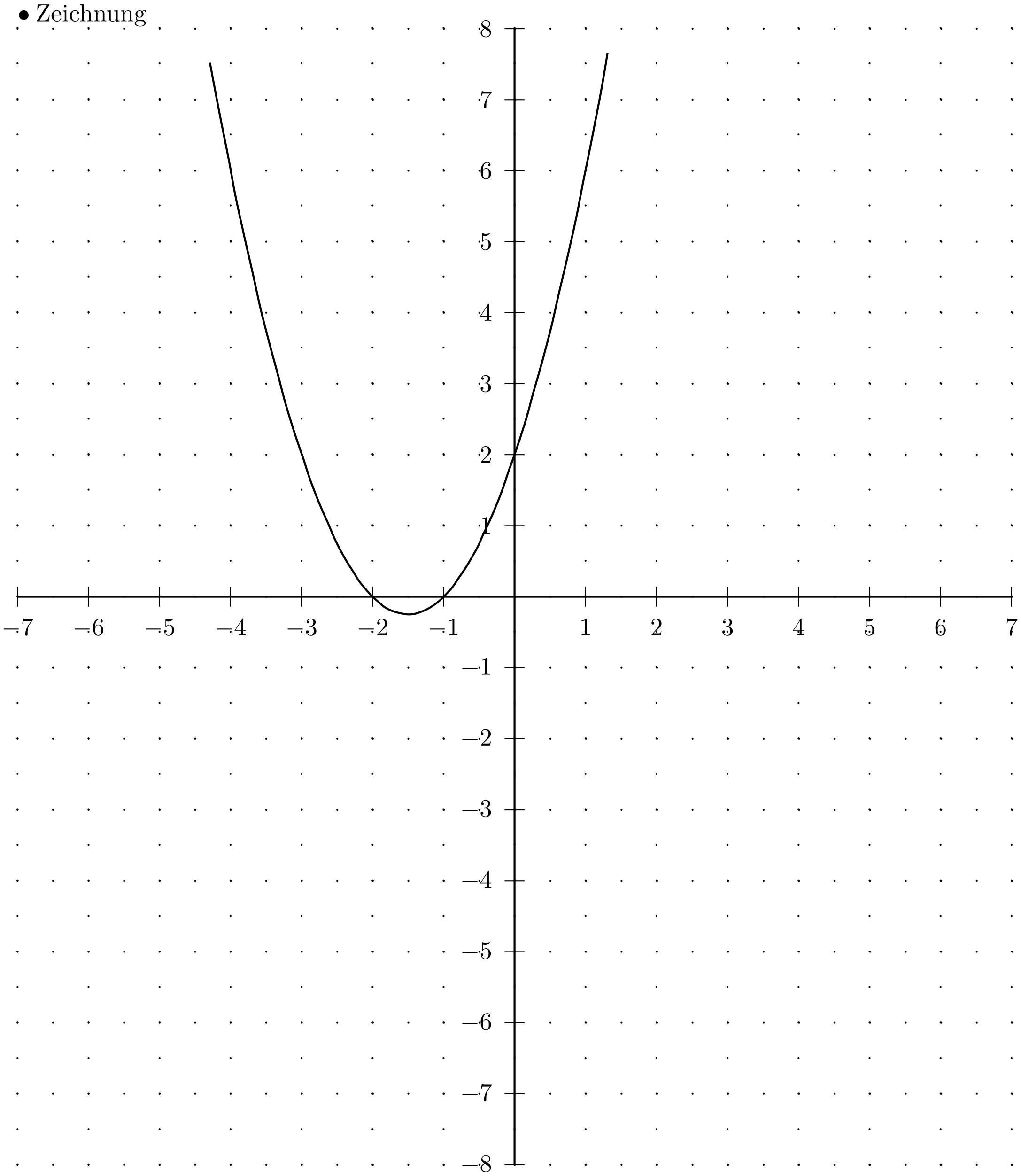
$\underline{\quad x \in]-\infty; -1\dfrac{1}{2}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	30	-11	2
$-6\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	-10	2
-6	20	-9	2
$-5\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	-8	2
-5	12	-7	2
$-4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	-6	2
-4	6	-5	2
$-3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	-4	2
-3	2	-3	2
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-2	2
-2	0	-1	2
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	2
-1	0	1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	2	2
0	2	3	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	2	3	2
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4	2
1	6	5	2
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	6	2
2	$n.def.$	7	$n.def.$
$2\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	8	2
3	20	9	2
$3\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	10	2
4	30	11	2
$4\frac{1}{2}$	$35\frac{3}{4}$	12	2
5	42	13	2
$5\frac{1}{2}$	$48\frac{3}{4}$	14	2
6	56	15	2
$6\frac{1}{2}$	$63\frac{3}{4}$	16	2
7	72	17	2

• Zeichnung



Aufgabe (39)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^3+5x^2-x-5}{x+1}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3+5x^2-x-5=0$

$x^3+5x^2-x-5=0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & +5x^2 & -x & -5 &):(x-1)=x^2+6x+5 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\ \hline
 & 6x^2 & -x & -5 & \\
 & -(6x^2 & -6x) & & \\ \hline
 & & 5x & -5 & \\
 & & -(5x & -5) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2+6x+5=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{16}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm 4}{2}$

$x_1 = \dfrac{-6+4}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-6-4}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -5$

$\underline{x_1 = -5;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x+1=0$

$x+1=0 \qquad /-1$

$x=-1$

$\underline{x_4 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+5)(x+1)(x-1)}{(x+1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{(x+5)(x-1)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = x^2+4x-5 = (x+5)(x-1)$

$f'(x) = 2x+4$

$f''(x) = 2$

$F(x) = \int (x^2+4x-5)dx = \dfrac{1}{3}x^3+2x^2-5x+c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-9), \infty[$

• Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1\cdot\infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1\cdot(-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f(-x) = 1\cdot(-x)^2+4\cdot(-x)-5$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 + 4x - 5 = 0$

$1x^2 + 4x - 5 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 6}{2}$
$x_1 = \dfrac{-4 + 6}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-4 - 6}{2}$
$x_1 = 1 \quad x_2 = -5$
$\underline{x_1 = -5; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-5	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -5[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-5; 1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x + 4 = 0$

$2x + 4 = 0 \qquad / - 4$
$2x = -4 \qquad / : 2$
$x = \dfrac{-4}{2}$
$x = -2$
$\underline{x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2/-9)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

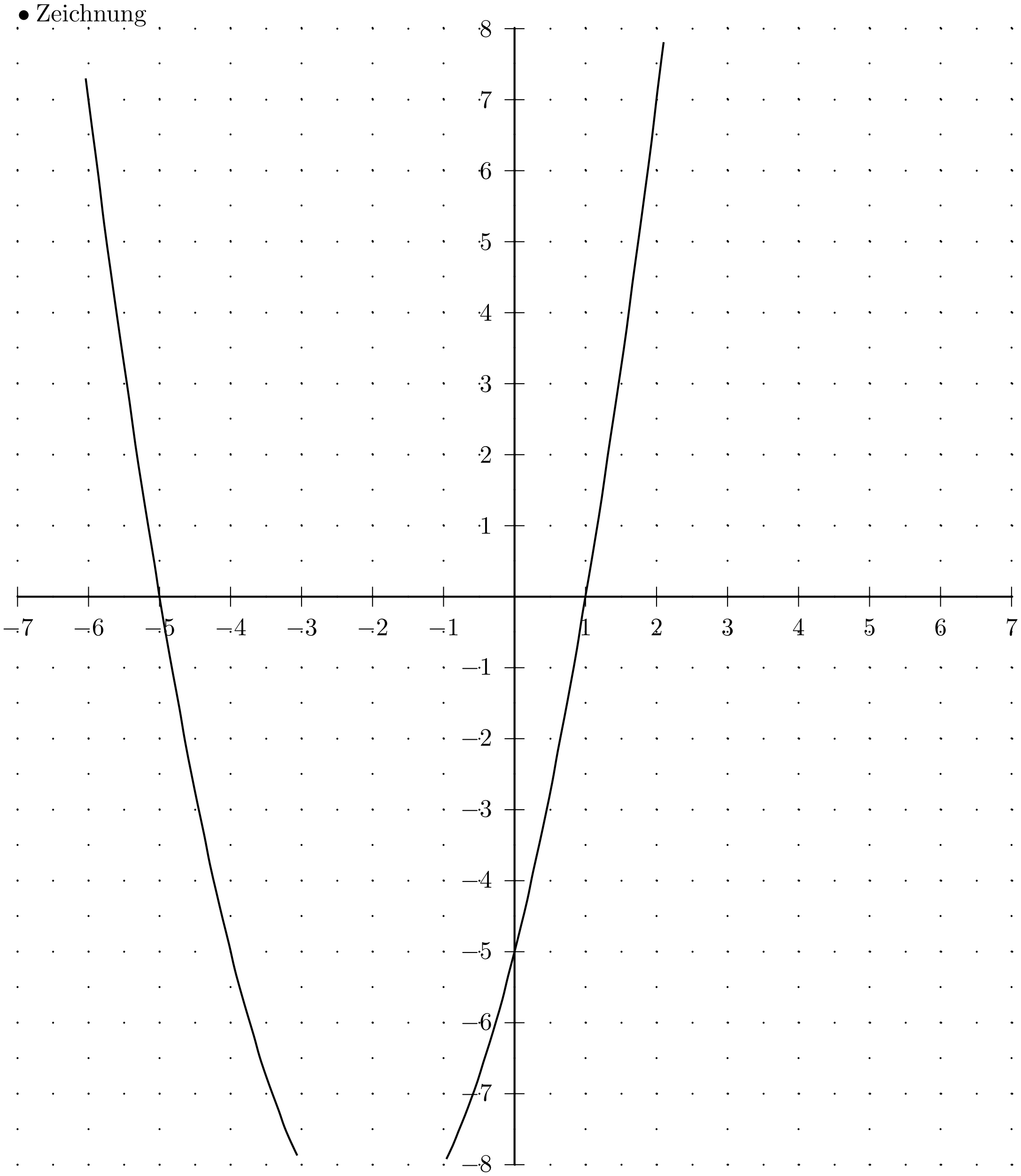
$\underline{\quad x \in]-\infty; -2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	16	-10	2
$-6\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	-9	2
-6	7	-8	2
$-5\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	-7	2
-5	0	-6	2
$-4\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	-5	2
-4	-5	-4	2
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$	-3	2
-3	-8	-2	2
$-2\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	-1	2
-2	-9	0	2
$-1\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	1	2
-1	$n.def.$	2	$n.def.$
$-\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$	3	2
0	-5	4	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-5	4	2
$\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	5	2
1	0	6	2
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	7	2
2	7	8	2
$2\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	9	2
3	16	10	2
$3\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	11	2
4	27	12	2
$4\frac{1}{2}$	$33\frac{1}{4}$	13	2
5	40	14	2
$5\frac{1}{2}$	$47\frac{1}{4}$	15	2
6	55	16	2
$6\frac{1}{2}$	$63\frac{1}{4}$	17	2
7	72	18	2

• Zeichnung



Aufgabe (40)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{3x^3 - x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

Zaehler faktorisieren:

$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$

$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llll}
(3x^3 & -x^2 & -3x & +1 \quad) : (x-1) = 3x^2 + 2x - 1 \\
-(3x^3 & -3x^2) & & \\
\hline
 & 2x^2 & -3x & +1 \\
 & -(2x^2 & -2x) & \\
\hline
 & & -x & +1 \\
 & & -(-x & +1) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{6}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 4}{6}$

$x_1 = \dfrac{-2 + 4}{6} \qquad x_2 = \dfrac{-2 - 4}{6}$

$x_1 = \dfrac{1}{3} \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = \frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 1 = 0$

$x - 1 = 0 \qquad / + 1$

$x = 1$

$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{3(x+1)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(x-1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1;\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{3(x+1)(x-\frac{1}{3})}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 3(x+1)(x - \dfrac{1}{3})$

$f'(x) = 6x + 2$

$f''(x) = 6$

$F(x) = \displaystyle\int (3x^2 + 2x - 1)dx = x^3 + x^2 - x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-1\frac{1}{3}), \infty[$

• Grenzwerte:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [3 \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [3 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 + 2 \cdot (-x) - 1$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6}$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 4}{6}$
$x_1 = \frac{-2+4}{6} \qquad x_2 = \frac{-2-4}{6}$
$x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = \frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -(\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-1; \frac{1}{3}[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 6x + 2 = 0$

$6x + 2 = 0 \qquad / -2$
$6x = -2 \qquad / : 6$
$x = \frac{-2}{6}$
$x = -\frac{1}{3}$
$\underline{x_3 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-\frac{1}{3}) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-\frac{1}{3}/-1\frac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

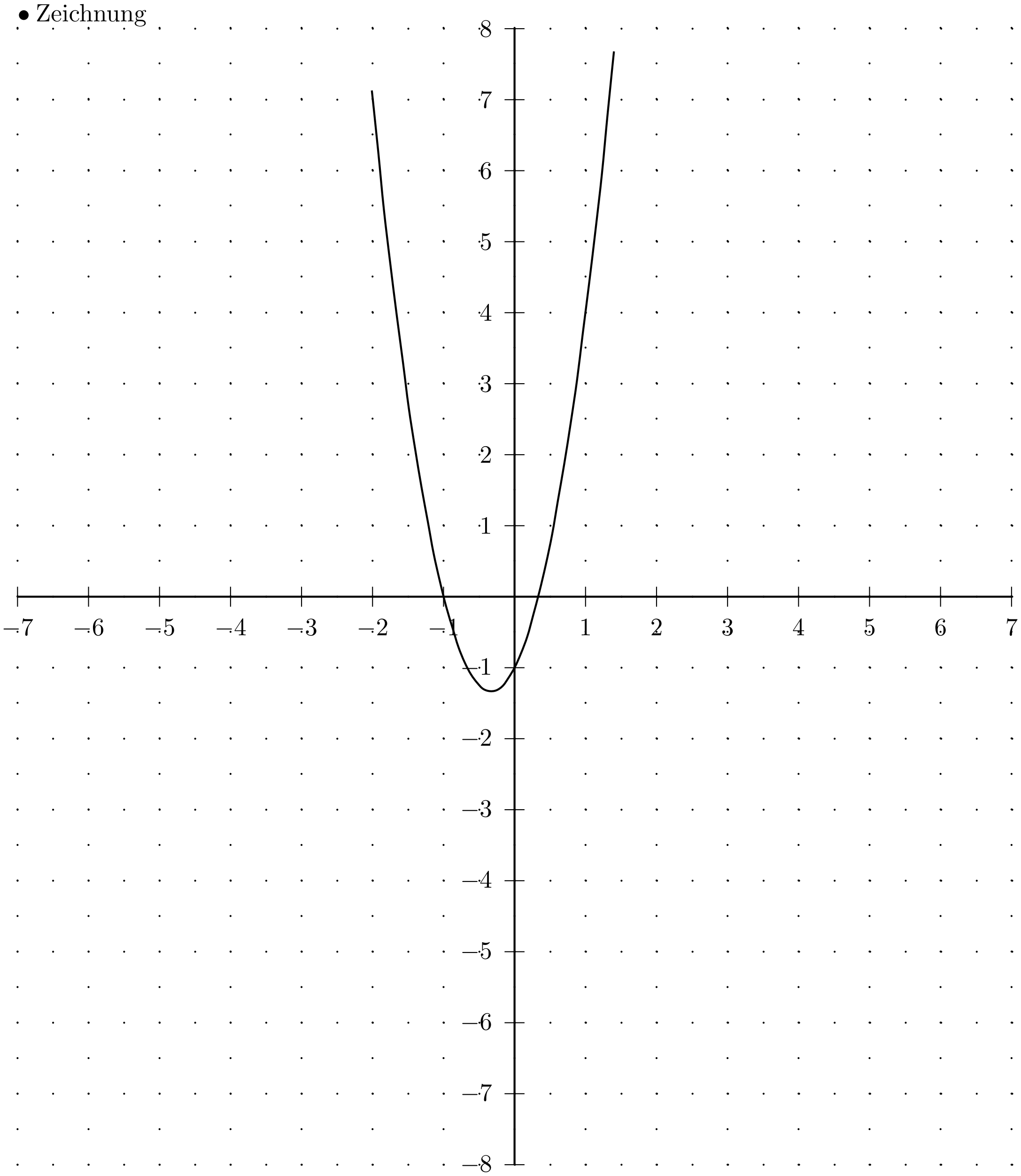
$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	132	-40	6
$-6\frac{1}{2}$	$112\frac{3}{4}$	-37	6
-6	95	-34	6
$-5\frac{1}{2}$	$78\frac{3}{4}$	-31	6
-5	64	-28	6
$-4\frac{1}{2}$	$50\frac{3}{4}$	-25	6
-4	39	-22	6
$-3\frac{1}{2}$	$28\frac{3}{4}$	-19	6
-3	20	-16	6
$-2\frac{1}{2}$	$12\frac{3}{4}$	-13	6
-2	7	-10	6
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	-7	6
-1	0	-4	6
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	-1	6
0	-1	2	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-1	2	6
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5	6
1	$n.def.$	8	$n.def.$
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	11	6
2	15	14	6
$2\frac{1}{2}$	$22\frac{3}{4}$	17	6
3	32	20	6
$3\frac{1}{2}$	$42\frac{3}{4}$	23	6
4	55	26	6
$4\frac{1}{2}$	$68\frac{3}{4}$	29	6
5	84	32	6
$5\frac{1}{2}$	$100\frac{3}{4}$	35	6
6	119	38	6
$6\frac{1}{2}$	$138\frac{3}{4}$	41	6
7	160	44	6

• Zeichnung



Aufgabe (41)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 - 8x + 2 = 0$

$x^3 - 8x + 2 = 0$

$NumerischeSuche:$

$\underline{x_1 = -2,946; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 0,252; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 2,694; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x + 2 = 0$

$x + 2 = 0 \qquad / - 2$

$x = -2$

$\underline{x_4 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x + 2,946)(x - 0,252)(x - 2,694)}{(x + 2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2;\}$

$f(x) = \dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 2}$

$Polynomdivision:$

$$
\begin{array}{llllll}
(x^3 & & -8x & +2 &) : (x+2) = x^2 - 2x - 4 \\
-(x^3 & +2x^2) & & & \\
\hline
 & -2x^2 & -8x & +2 & \\
 & -(-2x^2 & -4x) & & \\
\hline
 & & -4x & +2 & \\
 & & -(-4x & -8) & \\
\hline
 & & & 10 &
\end{array}
$$

$f(x) = x^2 - 2x - 4 + \dfrac{10}{x + 2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$= f'(x) = \dfrac{(3x^2 - 8) \cdot (x + 2) - (x^3 - 8x + 2) \cdot 1}{(x + 2)^2}$

$= \dfrac{(3x^3 + 6x^2 - 8x - 16) - (x^3 - 8x + 2)}{(x + 2)^2}$

$= \dfrac{2x^3 + 6x^2 - 18}{(x + 2)^2}$

$= \dfrac{2x^3 + 6x^2 - 18}{x^2 + 4x + 4} f'(x) = \dfrac{2x^3 + 6x^2 - 18}{x^2 + 4x + 4}$

$f''(x) = \dfrac{(6x^2 + 12x) \cdot (x^2 + 4x + 4) - (2x^3 + 6x^2 - 18) \cdot (2x + 4)}{(x^2 + 4x + 4)^2}$

$= \dfrac{(6x^4 + 36x^3 + 72x^2 + 48x) - (4x^4 + 20x^3 + 24x^2 - 36x - 72)}{(x^2 + 4x + 4)^2}$

$= \dfrac{2x^4 + 16x^3 + 48x^2 + 84x + 72}{(x^2 + 4x + 4)^2}$

$= \dfrac{2x^4 + 16x^3 + 48x^2 + 84x + 72}{x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$x^3 - 8x + 2 = 0$

$\underline{x_5 = -2,946; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$x_6 = 0,252;$ 1-fache Nullstelle
$x_7 = 2,694;$ 1-fache Nullstelle

• Grenzwerte und Asymtoten:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \infty$
Vertikale Asymptote: $x = -2$

•Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2,946$	$< x <$	-2	$< x <$	$0,252$	$< x <$	$2,694$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -2,946[\quad \cup \quad]-2; 0,252[\quad \cup \quad]2,694; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-2,946; -2[\quad \cup \quad]0,252; 2,694[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$2x^3 + 6x^2 - 18 = 0$
$Numerische Suche:$

$1x^2 + 4x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{2}$
$x_1 = \dfrac{-4 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-4 - 0}{2}$
$x_1 = -2 \qquad x_2 = -2$

	$x <$	-2	$< x <$	$1,426$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]1,426; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

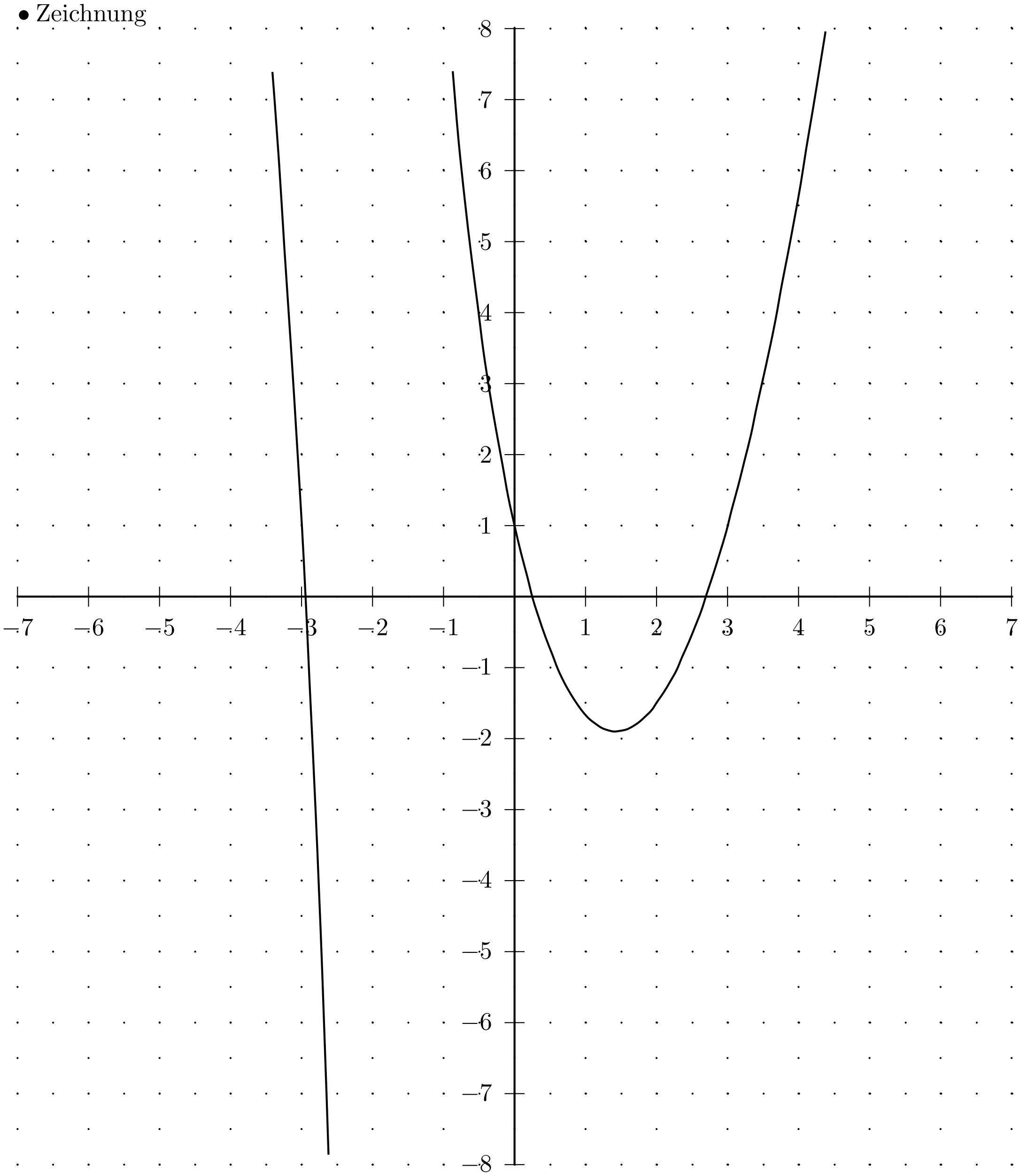
$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; 1,426[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	57	$-16,4$	$1\frac{21}{25}$
$-6\frac{1}{2}$	$49\frac{1}{36}$	$-15,494$	$1,781$
-6	$41\frac{1}{2}$	$-14,625$	$1,687$
$-5\frac{1}{2}$	$34\frac{11}{28}$	$-13,816$	$1,534$
-5	$27\frac{2}{3}$	$-13,111$	$1,259$
$-4\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	$-12,6$	$0,72$
-4	15	$-12,5$	$-0,5$
$-3\frac{1}{2}$	$8\frac{7}{12}$	$-13,445$	$-3,926$
-3	1	$-18,001$	$-18,003$
$-2\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{4}$	$-47,022$	$-158,087$
-2	$+unendlich$	$73463\frac{19}{49}$	$-unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	$-45,022$	$162,087$
-1	9	$-14,001$	$22,003$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{12}$	$-7,445$	$7,926$
0	1	$-4,5$	$4,5$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$-4,5$	$4,5$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-2,6$	$3,28$
1	$-1\frac{2}{3}$	$-1,111$	$2,741$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{25}{28}$	$0,184$	$2,466$
2	$-1\frac{1}{2}$	$1,375$	$2,313$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{19}{36}$	$2,506$	$2,219$
3	1	$3,6$	$2\frac{4}{25}$
$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{44}$	$4,669$	$2,12$
4	$5\frac{2}{3}$	$5,722$	$2\frac{5}{54}$
$4\frac{1}{2}$	$8\frac{41}{52}$	$6,763$	$2,073$
5	$12\frac{3}{7}$	$7\frac{39}{49}$	$2,058$
$5\frac{1}{2}$	$16\frac{7}{12}$	$8\frac{37}{45}$	$2,047$
6	$21\frac{1}{4}$	$9\frac{27}{32}$	$2,039$
$6\frac{1}{2}$	$26\frac{29}{68}$	$10,862$	$2,033$
7	$32\frac{1}{9}$	$11\frac{71}{81}$	$2,027$

• Zeichnung



Aufgabe (42)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^2 - 4}$

Zaehler faktorisieren:

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$

$1u^2 - 3u - 4 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$

$u_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{25}}{2}$

$u_{1/2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$

$u_1 = \dfrac{3+5}{2} \qquad u_2 = \dfrac{3-5}{2}$

$u_1 = 4 \qquad u_2 = -1$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$x^2 = -1 x = \pm\sqrt{-1}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - 4 = 0$

$1x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$

$1x^2 = 4 \qquad / : 1$

$x^2 = \dfrac{4}{1}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+2)(x^2+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2;\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{(x^2+1)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

$F(x) = \displaystyle\int (x^2 - 1)dx = \frac{1}{3}x^3 - x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-1), \infty[$

• Grenzwerte:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 1$
$f(-x) = 1 \cdot x^2 - 1$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 - 1 = 0$

$1x^2 - 1 = 0 \qquad / + 1$
$1x^2 = 1 \qquad / : 1$
$x^2 = \frac{1}{1}$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -(\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-1; 1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/-1)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

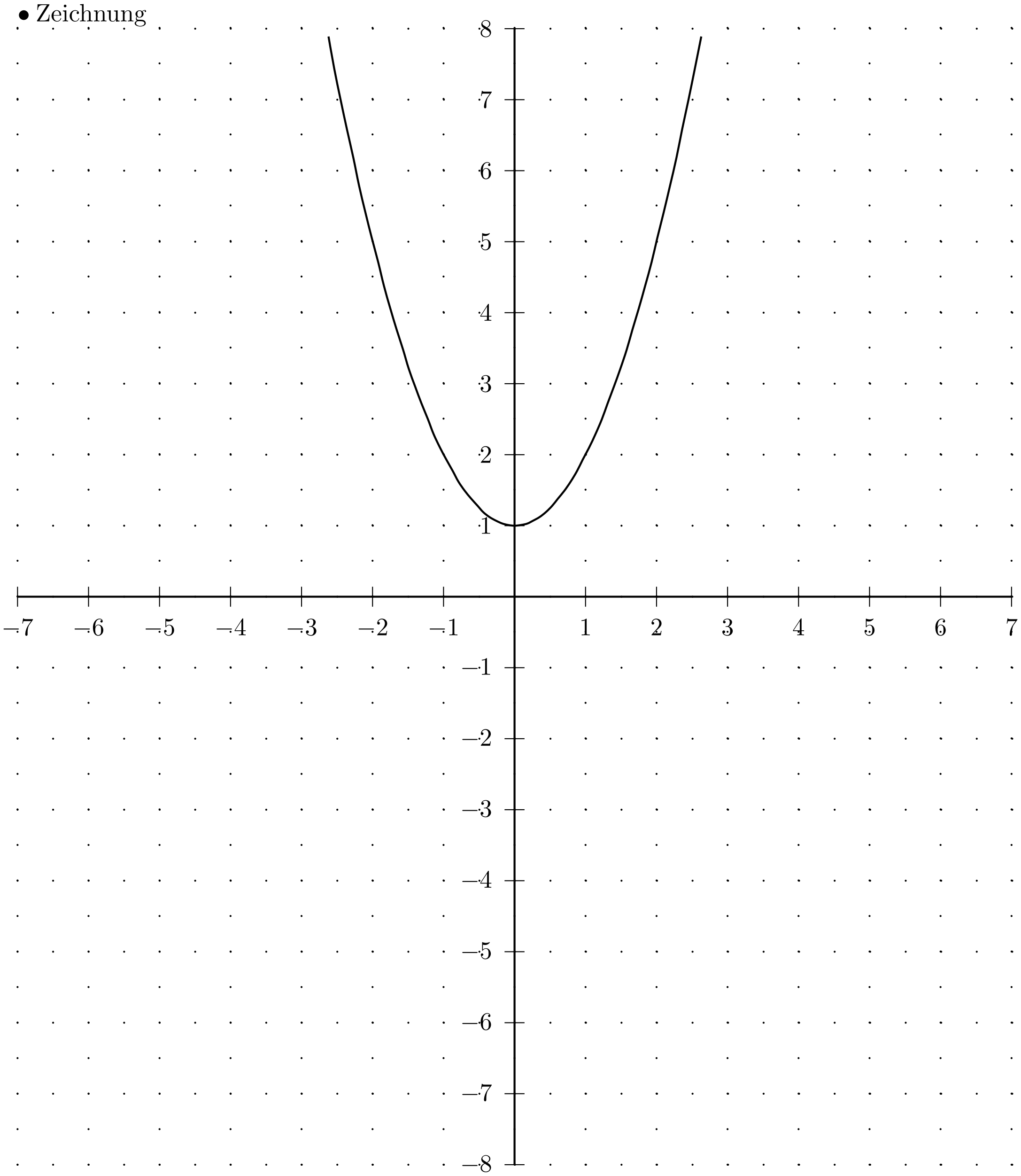
$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	50	-14	2
$-6\frac{1}{2}$	$43\frac{1}{4}$	-13	2
-6	37	-12	2
$-5\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{4}$	-11	2
-5	26	-10	2
$-4\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	-9	2
-4	17	-8	2
$-3\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{4}$	-7	2
-3	10	-6	2
$-2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4}$	-5	2
-2	$n.def.$	-4	$n.def.$
$-1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	-3	2
-1	2	-2	2
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	-1	2
0	1	0	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	0	2
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	1	2
1	2	2	2
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	3	2
2	$n.def.$	4	$n.def.$
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4}$	5	2
3	10	6	2
$3\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{4}$	7	2
4	17	8	2
$4\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	9	2
5	26	10	2
$5\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{4}$	11	2
6	37	12	2
$6\frac{1}{2}$	$43\frac{1}{4}$	13	2
7	50	14	2

• Zeichnung



Aufgabe (43)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$

$1u^2 - 5u + 4 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$u_{1/2} = \dfrac{+5 \pm \sqrt{9}}{2}$

$u_{1/2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$

$u_1 = \dfrac{5 + 3}{2} \qquad u_2 = \dfrac{5 - 3}{2}$

$u_1 = 4 \qquad u_2 = 1$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$1x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$

$x_1 = \dfrac{3 + 1}{2} \qquad x_2 = \dfrac{3 - 1}{2}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$

$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_6 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2; \}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{(x+2)(x+1)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$

$f'(x) = 2x + 3$

$f''(x) = 2$

$F(x) = \int (x^2 + 3x + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-\frac{1}{4}), \infty[$

• Grenzwerte:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 + 3x + 2 = 0$

$1x^2 + 3x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$
$x_1 = \frac{-3 + 1}{2}$ $x_2 = \frac{-3 - 1}{2}$
$x_1 = -1$ $x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-2; -($ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x + 3 = 0$

$2x + 3 = 0 \qquad / - 3$
$2x = -3 \qquad / : 2$
$x = \frac{-3}{2}$
$x = -1\frac{1}{2}$
$\underline{x_3 = -1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1\frac{1}{2}/ - \frac{1}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -1\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

•Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	30	-11	2
$-6\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	-10	2
-6	20	-9	2
$-5\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	-8	2
-5	12	-7	2
$-4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	-6	2
-4	6	-5	2
$-3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	-4	2
-3	2	-3	2
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-2	2
-2	0	-1	2
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	2
-1	0	1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	2	2
0	2	3	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	2	3	2
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4	2
1	$n.def.$	5	$n.def.$
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	6	2
2	$n.def.$	7	$n.def.$
$2\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	8	2
3	20	9	2
$3\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	10	2
4	30	11	2
$4\frac{1}{2}$	$35\frac{3}{4}$	12	2
5	42	13	2
$5\frac{1}{2}$	$48\frac{3}{4}$	14	2
6	56	15	2
$6\frac{1}{2}$	$63\frac{3}{4}$	16	2
7	72	17	2

• Zeichnung