

# Analytische Geometrie

## Aufgaben und Lösungen

<http://www.fersch.de>

©Klemens Fersch

3. August 2017

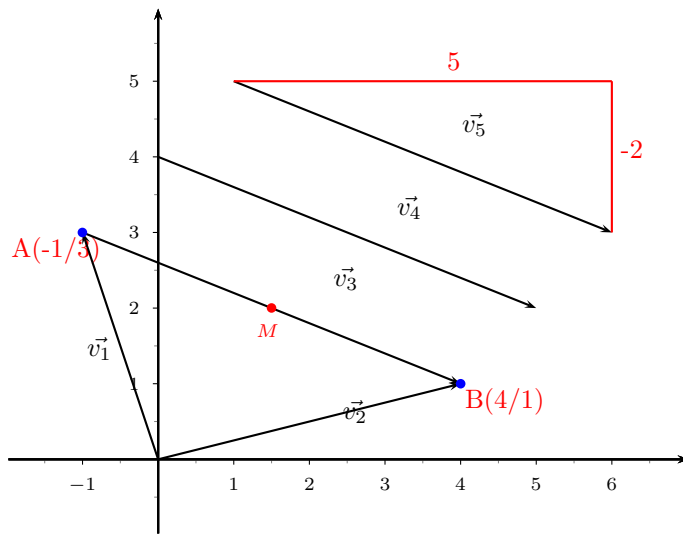
## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vektor - Abstand - Steigung - Mittelpunkt</b>	<b>3</b>
1.1	Aufgaben	4
1.2	Lösungen	5
<b>2</b>	<b>Skalarprodukt - Fläche - Winkel</b>	<b>6</b>
2.1	Aufgaben	7
2.2	Lösungen	8
<b>3</b>	<b>Vektor - Abstand - Mittelpunkt</b>	<b>10</b>
3.1	Aufgaben	11
3.2	Lösungen	12
<b>4</b>	<b>Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit</b>	<b>14</b>
4.1	Aufgaben	15
4.2	Lösungen	16
<b>5</b>	<b>Spatprodukt - lineare Abhängigkeit - Basisvektoren - Komplanarität</b>	<b>21</b>
5.1	Aufgaben	22
5.2	Lösungen	23
<b>6</b>	<b>Gerade aus 2 Punkten</b>	<b>25</b>
6.1	Aufgaben	25
6.2	Lösungen	26
<b>7</b>	<b>Ebenengleichung aufstellen</b>	<b>27</b>
7.1	3 Punkte	29
7.1.1	Aufgaben	29
7.1.2	Lösungen	30
7.2	Punkt und Gerade	32
7.2.1	Aufgaben	32
7.2.2	Lösungen	33
7.3	Parallele Geraden	35
7.3.1	Aufgaben	35
7.3.2	Lösungen	36
<b>8</b>	<b>Parameterform - Koordinatenform</b>	<b>38</b>
8.1	Determinante	38
8.1.1	Aufgaben	38
8.1.2	Lösungen	40
8.2	Vektorprodukt	45
8.2.1	Aufgaben	45
8.2.2	Lösungen	46
<b>9</b>	<b>Koordinatenform - Hessesche Normalenform</b>	<b>52</b>
9.1	Aufgaben	52
9.2	Lösungen	53

---

<b>10 Punkt - Gerade</b>	<b>54</b>
10.1 Aufgaben . . . . .	55
10.2 Lösungen . . . . .	56
<b>11 Gerade - Gerade</b>	<b>62</b>
11.1 Aufgaben . . . . .	62
11.2 Lösungen . . . . .	64
<b>12 Punkt - Ebene (Koordinatenform)</b>	<b>75</b>
12.1 Aufgaben . . . . .	75
12.2 Lösungen . . . . .	77
<b>13 Gerade - Ebene (Koordinatenform)</b>	<b>79</b>
13.1 Aufgaben . . . . .	79
13.2 Lösungen . . . . .	81
<b>14 Ebene - Ebene</b>	<b>82</b>
14.1 Aufgaben . . . . .	83
14.2 Lösungen . . . . .	84

# 1 Vektor - Abstand - Steigung - Mittelpunkt



## Vektor - Ortsvektor

- Vektor  $\vec{v}$  - Menge aller parallelgleicher Pfeile
- $$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Ortsvektor  $\vec{v}$  - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung
- $$A(x_a/y_a)$$
- $$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$$
- Gegenvektor  $\vec{v}$  - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung
- $$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Vektoren:  $\vec{AB} = \vec{v}_3 = \vec{v}_4 = \vec{v}_5$   
 $= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ortsvektor:  $\vec{A} = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ortsvektor:  $\vec{B} = \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu  $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

## Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte:  $A(x_a/y_a)$   $B(x_b/y_b)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

Punkte:  $A(-1/3)$   $B(4/1)$   
 Vektor zwischen zwei Punkten  
 $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 + 1 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

## Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

$$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

$$\left| \vec{AB} \right| = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{5^2 + (-2)^2}$$

$$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{29}$$

$$\left| \vec{AB} \right| = 5,39$$

**Steigung der Geraden AB**

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Steigung der Geraden AB

$$m = \frac{y}{x}$$

Winkel des Vektors mit der x-Achse

$$\tan \alpha = m$$

Steigung der Geraden AB

$$m = \frac{-2}{5}$$

**Mittelpunkt der Strecke AB**

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \right)$$

$$M\left(\frac{x_a+x_b}{2} / \frac{y_a+y_b}{2}\right)$$

Mittelpunkt der Strecke AB

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$M(1\frac{1}{2}/2)$$

**Vektorkette**Punkt:  $A(x_a/y_a)$ 

$$\text{Vektor : } \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{v} \quad \vec{B} = \vec{A} + \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A(-1/3) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B(4/1)$$

**1.1 Aufgaben**Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)Gegeben: Punkte:  $A(x_a/y_a)$   $B(x_b/y_b)$ 

Gesucht: Vektor zwischen 2 Punkten

Länge des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten - Mittelpunkt einer Strecke

(1) Punkte:  $A(4/5)$   $B(6/-2)$

(2) Punkte:  $A(-2/1)$   $B(-3/6)$

(3) Punkte:  $A(\frac{2}{3}/-\frac{1}{5})$   $B(23/2\frac{1}{2})$

## 1.2 Lösungen

### Aufgabe (1)

Punkte:  $A(4/5)$   $B(6/-2)$

- Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

- Abstand von 2 Punkten (Betrag des Vektors)

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + (-7)^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{53}$$

$$|\vec{AB}| = 7,28$$

- Steigung der Geraden AB

$$m = \frac{-7}{2} = -3\frac{1}{2}$$

- Mittelpunkt der Strecke AB

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M(5/1\frac{1}{2})$$

### Aufgabe (2)

Punkte:  $A(-2/1)$   $B(-3/6)$

- Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Abstand von 2 Punkten (Betrag des Vektors)

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{26}$$

$$|\vec{AB}| = 5,1$$

- Steigung der Geraden AB

$$m = \frac{5}{-1} = -5$$

- Mittelpunkt der Strecke AB

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M(-2\frac{1}{2}/3\frac{1}{2})$$

### Aufgabe (3)

Punkte:  $A(\frac{2}{3}/-\frac{1}{5})$   $B(23/2\frac{1}{2})$

- Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 23-\frac{2}{3} \\ 2\frac{1}{2}+\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22\frac{1}{3} \\ 2\frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

- Abstand von 2 Punkten (Betrag des Vektors)

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(22\frac{1}{3})^2 + (2\frac{7}{10})^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{506}$$

$$|\vec{AB}| = 22,5$$

- Steigung der Geraden AB

$$m = \frac{2\frac{7}{10}}{22\frac{1}{3}} = 0,121$$

- Mittelpunkt der Strecke AB

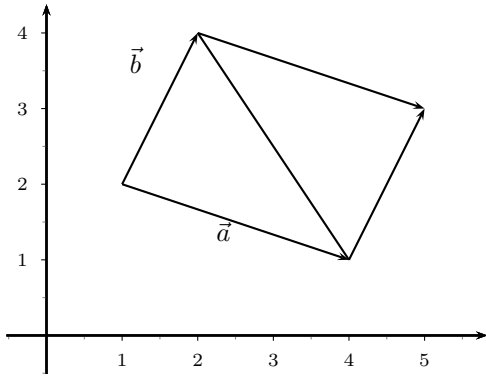
$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 11\frac{5}{6} \\ 1\frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

$$M(11\frac{5}{6}/1\frac{3}{20})$$

## 2 Skalarprodukt - Fläche - Winkel



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### Steigung der Vektoren

$$m_a = \frac{y_a}{x_a} \quad m_b = \frac{y_b}{x_b}$$

$m_a = m_b \Rightarrow$  Vektoren sind parallel

Steigung

$$m_s = \frac{y_a}{x_a} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$m_b = \frac{y_b}{x_b} = \frac{2}{1} = 2$$

### Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Senkrechte Vektoren:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1$$

### Fläche aus 2 Vektoren

Fläche des Parallelogramms aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b$$

Fläche des Dreiecks aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b)$$

Fläche des Parallelogramms aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 7$$

Fläche des Dreiecks aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = 3\frac{1}{2}$$

### Winkel zwischen Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{1}{3,16 \cdot 2,24} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,141|$$

$$\alpha = 81,9$$

## 2.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

$$\text{Vektoren: } \vec{A} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

Gesucht:

Länge der Vektoren:

Fläche des Parallelogramms

Skalarprodukt

$$(1) \quad \text{Vektor: } \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \text{Vektor: } \vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \text{Vektor: } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ 1\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{5} \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \text{Vektor: } \vec{A} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• Steigung

$$m_s = \frac{y_a}{x_a} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$m_b = \frac{y_b}{x_b} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

• Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,61$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6,32$$

• Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 18$$

• Fläche des Parallelogramms aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = -14$$

Fläche des Dreiecks aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2 \cdot 2 - 3 \cdot 6) = -7$$

• Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 2}{3,61 \cdot 6,32}$$

$$\cos \alpha = \frac{18}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2}}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{18}{3,61 \cdot 6,32} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,789|$$

$$\alpha = 37,9$$

Aufgabe (2)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

• Steigung

$$m_s = \frac{y_a}{x_a} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

$$m_b = \frac{y_b}{x_b} = \frac{6}{3} = 2$$

• Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = 3,61$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6,71$$

• Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 3$$

• Fläche des Parallelogramms aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -3 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = -24$$

Fläche des Dreiecks aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-3 \cdot 6 - 2 \cdot 3) = -12$$

• Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2}}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{3}{3,61 \cdot 6,71} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,124|$$

$$\alpha = 82,9$$

Aufgabe (3)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ 1\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{5} \\ 6 \end{pmatrix}$$

• Steigung

$$m_s = \frac{y_a}{x_a} = \frac{1\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = 4$$

$$m_b = \frac{y_b}{x_b} = \frac{6}{2\frac{2}{5}} = 2\frac{1}{2}$$

• Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(1\frac{1}{5}\right)^2} = 1,24$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2} = \sqrt{\left(2\frac{2}{5}\right)^2 + 6^2} = 6,46$$

• Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ 1\frac{1}{5} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2\frac{2}{5} \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \cdot 2\frac{2}{5} + 1\frac{1}{5} \cdot 6 = 7\frac{23}{25}$$

• Fläche des Parallelogramms aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{3}{10} & 2\frac{2}{5} \\ 1\frac{1}{5} & 6 \end{vmatrix} = \frac{3}{10} \cdot 6 - 1\frac{1}{5} \cdot 2\frac{2}{5} = -1\frac{2}{25}$$

Fläche des Dreiecks aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{3}{10} & 2\frac{2}{5} \\ 1\frac{1}{5} & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{10} \cdot 6 - 1\frac{1}{5} \cdot 2\frac{2}{5}\right) = -\frac{27}{50}$$

• Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\frac{3}{10} \cdot 2\frac{2}{5} + 1\frac{1}{5} \cdot 6}{\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(1\frac{1}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(2\frac{2}{5}\right)^2 + 6^2}}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{7\frac{23}{25}}{1,24 \cdot 6,46} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,991|$$

$$\alpha = 7,77$$

Aufgabe (4)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

• Steigung

$$m_s = \frac{y_a}{x_a} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$m_b = \frac{y_b}{x_b} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$



- Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = 4,12$$

- Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 12 \cdot 4 + 9 \cdot (-1) = 39$$

- Fläche des Parallelogramms aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot -1 - 9 \cdot 4 = -48$$

Fläche des Dreiecks aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(12 \cdot -1 - 9 \cdot 4) = -24$$

- Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

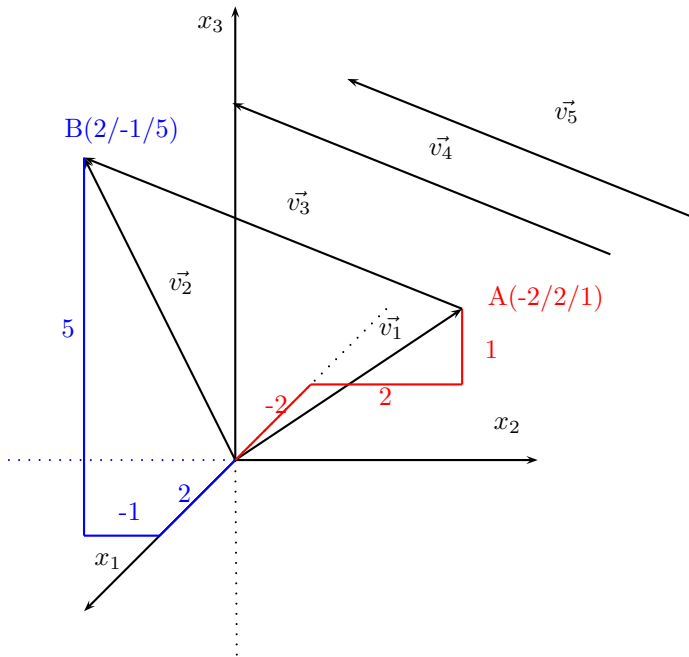
$$\cos \alpha = \frac{12 \cdot 4 + 9 \cdot (-1)}{\sqrt{12^2 + 9^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-1)^2}}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{39}{15 \cdot 4,12} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,631|$$

$$\alpha = 50,9$$

### 3 Vektor - Abstand - Mittelpunkt



#### Vektor - Ortsvektor

- Vektor  $\vec{v}$  - Menge aller parallelgleicher Pfeile

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Ortsvektor  $\vec{v}$  - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung

$A(x_a/y_a)$

$$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- Gegenvektor  $\vec{v}$  - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Vektoren:  $\vec{AB} = \vec{v}_3 = \vec{v}_4$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor:  $\vec{A} = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ortsvektor:  $\vec{B} = \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

#### Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte:  $A(a_1/a_2/a_3)$   $B(b_1/b_2/b_3)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkte:  $A(-2/2/1)$   $B(2/-1/5)$

Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 + 2 \\ -1 - 2 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten**

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \\ \vec{AB} &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \\ \vec{AB} &= \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 4^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{41} \\ |\vec{AB}| &= 6,4 \end{aligned}$$

**Mittelpunkt der Strecke AB**

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}) \\ \vec{M} &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \\ M &= \left( \frac{a_1+b_1}{2} / \frac{a_2+b_2}{2} / \frac{a_3+b_3}{2} \right) \end{aligned}$$

Mittelpunkt der Strecke AB

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}) \\ \vec{M} &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ \vec{M} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \\ M &= (0 / \frac{1}{2} / 3) \end{aligned}$$

**3.1 Aufgaben**

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben: Punkte: A(a<sub>1</sub>/a<sub>2</sub>/a<sub>3</sub>) B(b<sub>1</sub>/b<sub>2</sub>/b<sub>3</sub>)

Gesucht: Vektor zwischen 2 Punkten

Länge des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten - Mittelpunkt einer Strecke

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| (1) Punkte: A(4/3/7) B(6/4/5)   | (6) Punkte: A(2 <sup>3</sup> / <sub>5</sub> /1 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> / <sup>5</sup> / <sub>9</sub> ) B(4/1 <sup>1</sup> / <sub>9</sub> /1 <sup>1</sup> / <sub>15</sub> ) |
| (2) Punkte: A(8/3/-8) B(4/-7/2) | (7) Punkte: A(2 <sup>3</sup> / <sub>5</sub> /- <sup>4</sup> / <sub>5</sub> / <sup>1</sup> / <sub>9</sub> ) B(-5 <sup>1</sup> / <sub>8</sub> /0/-1)                             |
| (3) Punkte: A(2/3/45) B(5/6/7)  | (8) Punkte: A(-2/2/1) B(2/-1/5)  |
| (4) Punkte: A(2/4/-8) B(6/7/-9) |  |
| (5) Punkte: A(-1/2/5) B(-4/5/4) |  |

### 3.2 Lösungen

Aufgabe (1)

Punkte: A(4/3/7) B(6/4/5)

- Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 4-3 \\ 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Abstand von 2 Punkten (Betrag des Vektors)

$$|\vec{AB}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{9}$$

$$|\vec{AB}| = 3$$

- Mittelpunkt der Strecke AB

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3\frac{1}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$M(5/3\frac{1}{2}/6)$$

Aufgabe (2)

Punkte: A(8/3/-8) B(4/-7/2)

- Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-8 \\ -7-3 \\ 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- Abstand von 2 Punkten (Betrag des Vektors)

$$|\vec{AB}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-10)^2 + 10^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{216}$$

$$|\vec{AB}| = 14,7$$

- Mittelpunkt der Strecke AB

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$M(6/-2/-3)$$

Aufgabe (3)

Punkte: A(2/3/45) B(5/6/7)

- Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 6-3 \\ 7-45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -38 \end{pmatrix}$$

- Abstand von 2 Punkten (Betrag des Vektors)

$$|\vec{AB}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-38)^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1,46 \cdot 10^3}$$

$$|\vec{AB}| = 38,2$$

- Mittelpunkt der Strecke AB

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$M(3\frac{1}{2}/4\frac{1}{2}/26)$$

Aufgabe (4)

Punkte: A(2/4/-8) B(6/7/-9)

- Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 7-4 \\ -9+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Abstand von 2 Punkten (Betrag des Vektors)

$$|\vec{AB}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-1)^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{26}$$

$$|\vec{AB}| = 5,1$$

- Mittelpunkt der Strecke AB

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5\frac{1}{2} \\ -8\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M(4/5\frac{1}{2}/-8\frac{1}{2})$$

Aufgabe (5)

Punkte: A(-1/2/5) B(-4/5/4)

- Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4+1 \\ 5-2 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Abstand von 2 Punkten (Betrag des Vektors)

$$|\vec{AB}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-1)^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{19} \\ |\vec{AB}| &= 4,36 \end{aligned}$$

• Mittelpunkt der Strecke AB

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}) \\ \vec{M} &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ \vec{M} &= \begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ M &(-2\frac{1}{2}/3\frac{1}{2}/4\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Aufgabe (6)

Punkte:  $A(2\frac{3}{5}/1\frac{1}{2}/\frac{5}{9})$   $B(4/1\frac{1}{9}/1\frac{1}{15})$

• Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 2\frac{3}{5} \\ 1\frac{1}{9} - 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{15} - \frac{5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{2}{5} \\ -\frac{7}{18} \\ \frac{23}{45} \end{pmatrix}$$

• Abstand von 2 Punkten (Betrag des Vektors)

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{(1\frac{2}{5})^2 + (-\frac{7}{18})^2 + (\frac{23}{45})^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{2,37} \\ |\vec{AB}| &= 1,54 \end{aligned}$$

• Mittelpunkt der Strecke AB

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}) \\ \vec{M} &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2\frac{3}{5} \\ 1\frac{1}{2} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1\frac{1}{9} \\ 1\frac{1}{15} \end{pmatrix} \right) \\ \vec{M} &= \begin{pmatrix} 3\frac{3}{10} \\ 1\frac{11}{36} \\ \frac{73}{90} \end{pmatrix} \\ M &(3\frac{3}{10}/1\frac{11}{36}/\frac{73}{90}) \end{aligned}$$

Aufgabe (7)

Punkte:  $A(2\frac{3}{5}/-\frac{4}{5}/-1\frac{1}{9})$   $B(-5\frac{1}{8}/0/-1)$

• Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5\frac{1}{8} - 2\frac{3}{5} \\ 0 + \frac{4}{5} \\ -1 + 1\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\frac{29}{40} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

• Abstand von 2 Punkten (Betrag des Vektors)

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{(-7\frac{29}{40})^2 + (\frac{4}{5})^2 + (\frac{1}{9})^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{60,3} \\ |\vec{AB}| &= 7,77 \end{aligned}$$

• Mittelpunkt der Strecke AB

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}) \\ \vec{M} &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ -1\frac{1}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5\frac{1}{8} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ \vec{M} &= \begin{pmatrix} -1\frac{21}{80} \\ -\frac{5}{8} \\ -1\frac{1}{18} \end{pmatrix} \\ M &(-1\frac{21}{80}/-\frac{5}{8}/-1\frac{1}{18}) \end{aligned}$$

Aufgabe (8)

Punkte:  $A(-2/2/1)$   $B(2/-1/5)$

• Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 + 2 \\ -1 - 2 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

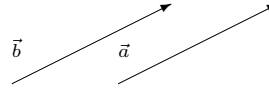
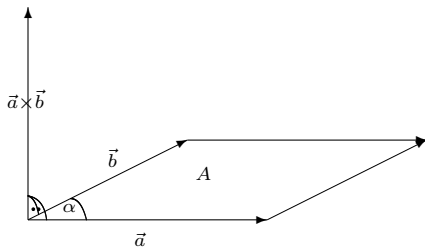
• Abstand von 2 Punkten (Betrag des Vektors)

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 4^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{41} \\ |\vec{AB}| &= 6,4 \end{aligned}$$

• Mittelpunkt der Strecke AB

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}) \\ \vec{M} &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ \vec{M} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \\ M &(0/\frac{1}{2}/3) \end{aligned}$$

## 4 Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

### Länge der Vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$$

$$|\vec{a}| = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$|\vec{b}| = 3$$

### Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Senkrechte Vektoren:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -7$$

### Vektorprodukt - Fläche des Parallelogramms

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = |\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

Fläche des Dreiecks aus  $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}$$

$$|\vec{c}| = 5,657$$

## Winkel zwischen Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{-7}{3 \cdot 3}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{-7}{9} \right|$$

$$\alpha = 38,942$$

## Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$a_1 = b_1 k \quad / : b_1 \Rightarrow k_1$$

$$a_2 = b_2 k \quad / : b_2 \Rightarrow k_2$$

$$a_3 = b_3 k \quad / : b_3 \Rightarrow k_3$$

$$k_1 = k_2 = k_3 \Rightarrow$$

Vektoren sind linear abhängig - parallel  
nicht alle k gleich  $\Rightarrow$   
Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2 = -2k \quad / : -2 \Rightarrow k = -1$$

$$1 = 1k \quad / : 1 \Rightarrow k = 1$$

$$2 = -2k \quad / : -2 \Rightarrow k = -1$$

$\Rightarrow$  Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

## 4.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

$$\text{Vektoren: } \vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

Länge der Vektoren:

Fläche des Parallelogramms

Vektorprodukt

Skalarprodukt

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

(1) Vektor:  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) Vektor:  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) Vektor:  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(4) Vektor:  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$

(5) Vektor:  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(6) Vektor:  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(7) Vektor:  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

(8) Vektor:  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

(9) Vektor:  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(10) Vektor:  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

(11) Vektor:  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

## 4.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$$

$$|\vec{a}| = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$|\vec{b}| = 3$$

- Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot -2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot -2 = -7$$

- Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Fläche des Parallelogramms

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}$$

$$|\vec{c}| = 5,66$$

- Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{-7}{3 \cdot 3}$$

$$\cos \alpha = \left| -\frac{7}{9} \right|$$

$$\alpha = 38,9$$

- Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2 = -2k \quad /: -2 \Rightarrow k = -1$$

$$1 = 1k \quad /: 1 \Rightarrow k = 1$$

$$2 = -2k \quad /: -2 \Rightarrow k = -1$$

$\Rightarrow$  Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Aufgabe (2)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2}$$

$$|\vec{a}| = 4,58$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 4^2}$$

$$|\vec{b}| = 4,58$$

- Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot -2 + 1 \cdot -1 - 4 \cdot 4 = -21$$

- Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 - (-4) \cdot (-1) \\ -4 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Fläche des Parallelogramms

$$|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2}$$

$$|\vec{c}| = 0$$

- Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{-21}{4,58 \cdot 4,58}$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{-1}$$

$$\alpha = 0$$

- Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2 = -2k \quad /: -2 \Rightarrow k = -1$$

$$1 = -1k \quad /: -1 \Rightarrow k = -1$$

$$-4 = 4k \quad /: 4 \Rightarrow k = -1$$

$\Rightarrow$  Vektoren sind linear abhängig - parallel

Aufgabe (3)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 4^2}$$

$$|\vec{a}| = 7,48$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + (-3)^2}$$

$$|\vec{b}| = 8,6$$

- Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot -8 + 6 \cdot -1 + 4 \cdot -3 = -34$$

- Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-8) - (-3) \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) - 6 \cdot (-8) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -14 \\ -26 \\ 46 \end{pmatrix}$$

- Fläche des Parallelogramms



$$|\vec{c}| = \sqrt{(-14)^2 + (-26)^2 + 46^2}$$

$$|\vec{c}| = 54,7$$

• **Schnittwinkel:**

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{-34}{7,48 \cdot 8,6} \right|$$

$$\cos \alpha = |-0,528|$$

$$\alpha = 58,1$$

• **Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$2 = -8k \quad /: -8 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

$$6 = -1k \quad /: -1 \Rightarrow k = -6$$

$$4 = -3k \quad /: -3 \Rightarrow k = -1\frac{1}{3}$$

⇒ Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Aufgabe (4)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

• **Länge der Vektoren:**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2}$$

$$|\vec{a}| = 5,1$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-8)^2}$$

$$|\vec{b}| = 10,2$$

• **Skalarprodukt:**

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 1 \cdot -2 + 3 \cdot -6 + 4 \cdot -8 = -52$$

• **Vektorprodukt:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-6) \\ 4 \cdot (-2) - (-8) \cdot 1 \\ 1 \cdot (-6) - 3 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• **Fläche des Parallelogramms**

$$|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2}$$

$$|\vec{c}| = 0$$

• **Schnittwinkel:**

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{-52}{5,1 \cdot 10,2} \right|$$

$$\cos \alpha = |-1|$$

$$\alpha = NaN$$

• **Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$1 = -2k \quad /: -2 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$3 = -6k \quad /: -6 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$4 = -8k \quad /: -8 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

⇒ Vektoren sind linear abhängig - parallel

Aufgabe (5)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• **Länge der Vektoren:**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{8^2 + 5^2 + 9^2}$$

$$|\vec{a}| = 13$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{9^2 + 0^2 + 2^2}$$

$$|\vec{b}| = 9,22$$

• **Skalarprodukt:**

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 8 \cdot 9 + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 2 = 90$$

• **Vektorprodukt:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 - 9 \cdot 0 \\ 9 \cdot 9 - 2 \cdot 8 \\ 8 \cdot 0 - 5 \cdot 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 65 \\ -45 \end{pmatrix}$$

• **Fläche des Parallelogramms**

$$|\vec{c}| = \sqrt{10^2 + 65^2 + (-45)^2}$$

$$|\vec{c}| = 79,7$$

• **Schnittwinkel:**

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{90}{13 \cdot 9,22} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,749|$$

$$\alpha = 41,5$$

• **Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren**

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$8 = 9k \quad /: 9 \Rightarrow k = \frac{8}{9}$$

$$5 = 0k \quad /: 0 \Rightarrow k = \infty$$

$$9 = 2k \quad /: 2 \Rightarrow k = 4\frac{1}{2}$$

⇒ Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Aufgabe (6)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• **Länge der Vektoren:**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 6^2}$$

$$|\vec{a}| = 8,72$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{8^2 + 0^2 + 1^2}$$

$$|\vec{b}| = 8,06$$

• Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot 8 + 6 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 22$$

• Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 - 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 8 - 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 - 6 \cdot 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 46 \\ -48 \end{pmatrix}$$

• Fläche des Parallelogramms

$$|\vec{c}| = \sqrt{6^2 + 46^2 + (-48)^2}$$

$$|\vec{c}| = 66,8$$

• Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{22}{8,72 \cdot 8,06} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,313|$$

$$\alpha = 71,8$$

• Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2 = 8k \quad / : 8 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$6 = 0k \quad / : 0 \Rightarrow k = \infty$$

$$6 = 1k \quad / : 1 \Rightarrow k = 6$$

⇒ Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Aufgabe (7)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 7^2}$$

$$|\vec{a}| = 8,19$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 9^2 + 2^2}$$

$$|\vec{b}| = 9,22$$

• Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 9 + 7 \cdot 2 = 41$$

• Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 7 \cdot 9 \\ 7 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 9 - 3 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -57 \\ -6 \\ 27 \end{pmatrix}$$

• Fläche des Parallelogramms

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-57)^2 + (-6)^2 + 27^2}$$

$$|\vec{c}| = 63,4$$

• Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{41}{8,19 \cdot 9,22} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,543|$$

$$\alpha = 57,1$$

• Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3 = 0k \quad / : 0 \Rightarrow k = \infty$$

$$3 = 9k \quad / : 9 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$7 = 2k \quad / : 2 \Rightarrow k = 3\frac{1}{2}$$

⇒ Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Aufgabe (8)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 5^2 + 3^2}$$

$$|\vec{a}| = 8,37$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 9^2 + 1^2}$$

$$|\vec{b}| = 9,11$$

• Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 9 + 3 \cdot 1 = 54$$

• Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 - 3 \cdot 9 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 6 \\ 6 \cdot 9 - 5 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -22 \\ -3 \\ 49 \end{pmatrix}$$

• Fläche des Parallelogramms

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-22)^2 + (-3)^2 + 49^2}$$

$$|\vec{c}| = 53,8$$

• Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{54}{8,37 \cdot 9,11} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,708|$$

$$\alpha = 44,9$$

• Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 6 &= 1k & / : 1 &\Rightarrow k = 6 \\ 5 &= 9k & / : 9 &\Rightarrow k = \frac{5}{9} \\ 3 &= 1k & / : 1 &\Rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

⇒ Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Aufgabe (9)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

• Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}$$

$$|\vec{a}| = 2,24$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (4\frac{1}{2})^2 + (1\frac{1}{2})^2}$$

$$|\vec{b}| = 4,74$$

• Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4\frac{1}{2} + 0 \cdot 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

• Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1\frac{1}{2} - 0 \cdot 4\frac{1}{2} \\ 0 \cdot 0 - 1\frac{1}{2} \cdot 2 \\ 2 \cdot 4\frac{1}{2} - 1 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

• Fläche des Parallelogramms

$$|\vec{c}| = \sqrt{(1\frac{1}{2})^2 + (-3)^2 + 9^2}$$

$$|\vec{c}| = 9,6$$

• Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{4\frac{1}{2}}{2,24 \cdot 4,74} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,424|$$

$$\alpha = 64,9$$

• Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$2 = 0k \quad / : 0 \Rightarrow k = \infty$$

$$1 = 4\frac{1}{2}k \quad / : 4\frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{2}{9}$$

$$0 = 1\frac{1}{2}k \quad / : 1\frac{1}{2} \Rightarrow k = 0$$

⇒ Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Aufgabe (10)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 8^2 + 9^2}$$

$$|\vec{a}| = 13$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 2^2}$$

$$|\vec{b}| = 8,72$$

• Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 5 \cdot 6 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 2 = 96$$

• Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 2 - 9 \cdot 6 \\ 9 \cdot 6 - 2 \cdot 5 \\ 5 \cdot 6 - 8 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -38 \\ 44 \\ -18 \end{pmatrix}$$

• Fläche des Parallelogramms

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-38)^2 + 44^2 + (-18)^2}$$

$$|\vec{c}| = 60,9$$

• Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{96}{13 \cdot 8,72} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,845|$$

$$\alpha = 32,4$$

• Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$5 = 6k \quad / : 6 \Rightarrow k = \frac{5}{6}$$

$$8 = 6k \quad / : 6 \Rightarrow k = 1\frac{1}{3}$$

$$9 = 2k \quad / : 2 \Rightarrow k = 4\frac{1}{2}$$

⇒ Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Aufgabe (11)

$$\text{Vektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• Länge der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}$$

$$|\vec{a}| = 3,74$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2}$$

$$|\vec{b}| = 7,48$$

• Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 28$$

• Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Fläche des Parallelogramms

$$|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2}$$

$$|\vec{c}| = 0$$

- Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{28}{3,74 \cdot 7,48} \right|$$

$$\cos \alpha = |1|$$

$$\alpha = 0$$

- Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

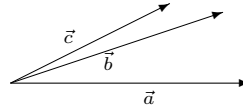
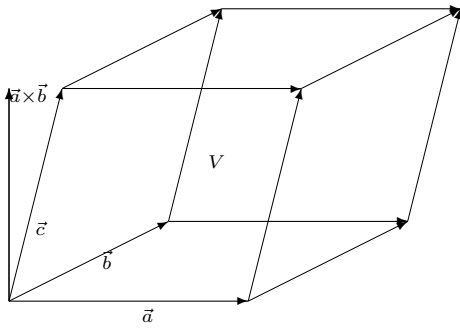
$$2 = 4k \quad / : 4 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$3 = 6k \quad / : 6 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$1 = 2k \quad / : 2 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

⇒ Vektoren sind linear abhängig - parallel

# 5 Spatprodukt - lineare Abhängigkeit - Basisvektoren - Komplanarität



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Spatprodukt:  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$

$$\left( \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt von  $\vec{a}, \vec{b}$  skalar multipliziert mit  $\vec{c}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left( \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot 2 - 4 \cdot (-7) \\ 4 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-7) - (-3) \cdot (-4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ -33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 44$$

## Spatprodukt = Wert der Determinante

Spatprodukt:  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$D = 3 \cdot (-7) \cdot 2 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) \cdot 2 - 7 \cdot (-7) \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-3) \cdot 2$$

$$D = 44$$

## Spatprodukt - Volumen

- Volumen von Prisma oder Spat

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- Volumen einer Pyramide mit den Grundflächen:

Quadrat, Rechteck, Parallelogramm

$$V = \frac{1}{3} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- Volumen ein dreiseitigen Pyramide

$$V = \frac{1}{6} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$V = 3 \cdot (-7) \cdot 2 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) \cdot 2 - 7 \cdot (-7) \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-3) \cdot 2$$

$$V = 44$$

**Eigenschaften von 3 Vektoren**

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow$  die drei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 
  - sind linear abhängig
  - liegen in einer Ebene (komplanar)
  - sind keine Basisvektoren
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$  die drei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 
  - sind linear unabhängig
  - liegen nicht in einer Ebene
  - sind Basisvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 44$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$$
 die drei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear unabhängig
- liegen nicht in einer Ebene
- sind Basisvektoren

**5.1 Aufgaben**

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Spatprodukt, lineare Abhängigkeit, Basisvektoren

$$(1) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## 5.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$V = 5 \cdot 6 \cdot 8 + 0 \cdot 7 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \cdot 0$$

$$- 0 \cdot 6 \cdot 0 - 5 \cdot 7 \cdot 0 - 0 \cdot 5 \cdot 8$$

$$V = 240$$

Die 3 Vektoren sind linear unabhängig - Basisvektoren

Aufgabe (2)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -4 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 7 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$V = 3 \cdot 7 \cdot 2 + (-3) \cdot 2 \cdot 7 + 4 \cdot (-4) \cdot 2$$

$$- 4 \cdot 7 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-4) \cdot 2$$

$$V = -264$$

Die 3 Vektoren sind linear unabhängig - Basisvektoren

Aufgabe (3)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -4 & -7 & 2 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -4 & -7 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$V = 3 \cdot (-7) \cdot 2 + (-3) \cdot 2 \cdot 7 + 4 \cdot (-4) \cdot 2$$

$$- 4 \cdot (-7) \cdot 7 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-4) \cdot 2$$

$$V = 44$$

Die 3 Vektoren sind linear unabhängig - Basisvektoren

Aufgabe (4)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$V = 2 \cdot 4 \cdot 2 + (-3) \cdot (-5) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0$$

$$- 1 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot (-5) \cdot 0 - (-3) \cdot 1 \cdot 2$$

$$V = 22$$

Die 3 Vektoren sind linear unabhängig - Basisvektoren

## Aufgabe (5)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & | & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$V = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-6) \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 0$$

$$- 4 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-6) \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 4$$

$$V = 0$$

Die 3 Vektoren sind linear abhängig - komplanar

## Aufgabe (6)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & | & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & | & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$V = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2)$$

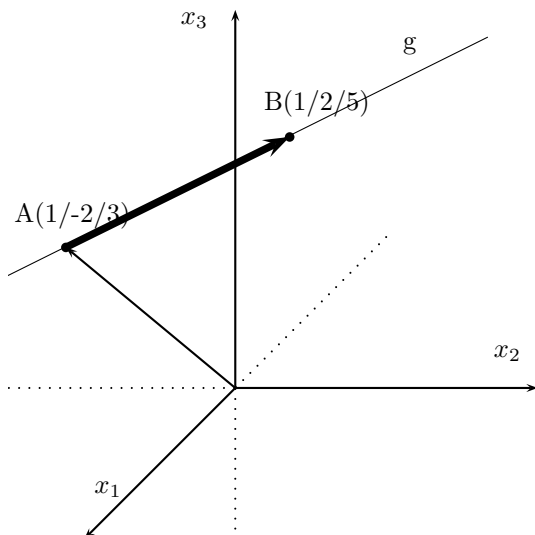
$$- 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot 3$$

$$V = 0$$

Die 3 Vektoren sind linear abhängig - komplanar



## 6 Gerade aus 2 Punkten



Punkte:  $A(a_1/a_2/a_3)$   $B(b_1/b_2/b_3)$

Richtungsvektor

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkt A oder B als Aufpunkt wählen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkte:  $A(1/-3/3)$   $B(1/2/5)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 2 + 3 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### Besondere Geraden

$x_1$  - Achse

$x_2$  - Achse

$x_3$  - Achse

$$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 6.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Punkte:  $A(a_1/a_2/a_3)$   $B(b_1/b_2/b_3)$

Gesucht:

Gerade aus zwei Punkten

(1) Punkte:  $A(2/6/8)$   $B(8/3/5)$

(2) Punkte:  $A(7/8/6)$   $B(3/1/5)$

(3) Punkte:  $A(3/-4\frac{1}{2}/4)$   $B(5/-5/1)$

(4) Punkte:  $A(2/-4/-5)$   $B(6/7/8)$

(5) Punkte:  $A(2/3/0)$   $B(0/-4/5)$

(6) Punkte:  $A(3/4/-3)$   $B(2/-3/1)$

(7) Punkte:  $A(1/-3/3)$   $B(1/2/5)$

## 6.2 Lösungen

Aufgabe (1)

Punkte:  $A(2/6/8)$   $B(8/3/5)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 3-6 \\ 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (2)

Punkte:  $A(7/8/6)$   $B(3/1/5)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-7 \\ 1-8 \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (3)

Punkte:  $A(3/-4\frac{1}{2}/4)$   $B(5/-5/1)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ -5+4\frac{1}{2} \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4\frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (4)

Punkte:  $A(2/-4/-5)$   $B(6/7/8)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 7+4 \\ 8+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (5)

Punkte:  $A(2/3/0)$   $B(0/-4/5)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ -4-3 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (6)

Punkte:  $A(3/4/-3)$   $B(2/-3/1)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ -3-4 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (7)

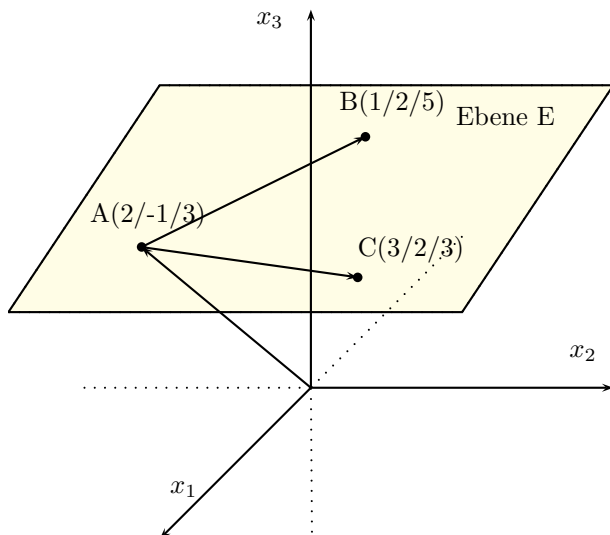
Punkte:  $A(1/-3/3)$   $B(1/2/5)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2+3 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## 7 Ebenengleichung aufstellen



### Ebene aus 3 Punkten

Punkte:  $A(a_1/a_2/a_3)$   $B(b_1/b_2/b_3)$   $C(c_1/c_2/c_3)$   
 Die 3 Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen.  
 Ebene aus drei Punkten:

$$\text{Richtungsvektor: } \vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtungsvektor: } \vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung aus Aufpunkt und den Richtungsvektoren.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Punkte:  $A(2/-1/3)$   $B(1/2/5)$   $C(3/2/3)$

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2+1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Ebene aus Gerade und Punkt

Der Punkte darf nicht auf der Geraden liegen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(c_1/c_2/c_3)$

Richtungsvektor zwischen Aufpunkt A und dem Punkt C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(2/0/1)$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

### Ebene aus zwei parallelen Geraden

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Bei parallelen Geraden sind Richtungsvektoren linear abhängig. Für die Ebenengleichung muß ein 2. Richtungsvektor erstellt werden. 2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C.

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 2 = +4k \quad / : 4 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \\ 0 = +0k \quad / : 0 \Rightarrow k = \text{beliebig} \\ -1 = -2k \quad / : -2 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \end{array}$$

⇒ Geraden sind parallel

Aufpunkt von Gerade 2 in Gerade 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkt: A(3/4/5)

$$\begin{array}{l} 3 = 1 + 2\lambda \quad / -1 \\ 4 = 3 + 0\lambda \quad / -3 \\ 5 = 0 - 1\lambda \quad / -0 \\ 2 = 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = 1 \\ 1 = 0\lambda \quad \Rightarrow \text{falsch} \\ 5 = -1\lambda \quad / : -1 \Rightarrow \lambda = -5 \end{array}$$

⇒

Geraden sind echt parallel

2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 4 - 3 \\ 5 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

### Ebene aus zwei sich schneidenden Geraden

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Bei sich schneidenden Geraden sind Richtungsvektoren linear unabhängig.

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Geraden schneiden sich im Punkt S(5, -9, 0)

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

## 7.1 3 Punkte

### 7.1.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben: Punkte:  $A(a_1, a_2, a_3)$   $B(b_1, b_2, b_3)$   $C(c_1, c_2, c_3)$

Gesucht: Ebene in Parameterform.

- |     |                       |               |               |     |                       |              |              |
|-----|-----------------------|---------------|---------------|-----|-----------------------|--------------|--------------|
| (1) | Punkte: $A(4, 1, 5)$  | $B(1, 3, 4)$  | $C(6, 3, 5)$  | (6) | Punkte: $A(7, 9, 6)$  | $B(7, 8, 4)$ | $C(8, 7, 7)$ |
| (2) | Punkte: $A(3, 6, 6)$  | $B(1, 6, 6)$  | $C(7, 1, 2)$  | (7) | Punkte: $A(9, 6, 9)$  | $B(1, 4, 4)$ | $C(1, 5, 4)$ |
| (3) | Punkte: $A(2, 3, 0)$  | $B(0, 0, 5)$  | $C(5, 4, 6)$  | (8) | Punkte: $A(2, -1, 3)$ | $B(1, 2, 5)$ | $C(3, 2, 3)$ |
| (4) | Punkte: $A(1, 3, -3)$ | $B(5, -3, 6)$ | $C(-6, 3, 4)$ |     |                       |              |              |
| (5) | Punkte: $A(1, 9, -5)$ | $B(-3, 6, 3)$ | $C(4, 5, 3)$  |     |                       |              |              |

## 7.1.2 Lösungen

Aufgabe (1)

Punkte:  $A(4, 1, 5)$   $B(1, 3, 4)$   $C(6, 3, 5)$ 

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 3-1 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 3-1 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (2)

Punkte:  $A(3, 6, 6)$   $B(1, 6, 6)$   $C(7, 1, 2)$ 

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 6-6 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ 1-6 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (3)

Punkte:  $A(2, 3, 0)$   $B(0, 0, 5)$   $C(5, 4, 6)$ 

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-3 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-3 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (4)

Punkte:  $A(1, 3, -3)$   $B(5, -3, 6)$   $C(-6, 3, 4)$ 

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -3-3 \\ 6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -6-1 \\ 3-3 \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (5)

Punkte:  $A(1, 9, -5)$   $B(-3, 6, 3)$   $C(4, 5, 3)$ 

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 6-9 \\ 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-9 \\ 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (6)

Punkte:  $A(7, 9, 6)$   $B(7, 8, 4)$   $C(8, 7, 7)$ 

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7-7 \\ 8-9 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 8-7 \\ 7-9 \\ 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (7)

Punkte:  $A(9, 6, 9)$   $B(1, 4, 4)$   $C(1, 5, 4)$ 

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-9 \\ 4-6 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-9 \\ 5-6 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (8)

Punkte:  $A(2, -1, 3)$   $B(1, 2, 5)$   $C(3, 2, 3)$ 

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2+1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 7.2 Punkt und Gerade

### 7.2.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

$$\text{Gegeben: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(c_1/c_2/c_3)$

Gesucht: Ebene aus Punkt und Gerade

$$(1) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(6/7/8)$

$$(2) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(4/4/4)$

$$(3) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(7/8/3)$

$$(4) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(2/0/1)$



## 7.2.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(6/7/8)$ 

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 7-0 \\ 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (2)

$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(4/4/4)$ 

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 4-5 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (3)

$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(7/8/3)$ 

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 8-3 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (4)

$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(2/0/1)$ 

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

## 7.3 Parallele Geraden

### 7.3.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben: Zwei parallele Geraden

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Ebene aus zwei Geraden

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(1) Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(2) Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(3) Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(4) Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5) Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(6) Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

## 7.3.2 Lösungen

Aufgabe (1)

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-7 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (2)

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-7 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (3)

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-7 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (4)

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 3-4 \\ -3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (5)

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5+5 \\ 3-8 \\ -3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (6)

Gerade1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gerade2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-3 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

## 8 Parameterform - Koordinatenform

### 1. Methode: Determinante

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 & c_1 & x_1 - a_1 & b_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 & c_2 & x_2 - a_2 & b_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 & c_3 & x_3 - a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1 - a_1) \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot (x_3 - a_3) + c_1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot (x_3 - a_3) - (x_1 - a_1) \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot c_3 = 0$$

Koordinatenform:

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & -2 & 2 & x_1 - 1 & -2 \\ x_2 + 3 & 4 & -5 & x_2 + 3 & 4 \\ x_3 - 2 & 3 & 0 & x_3 - 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1 - 1) \cdot 4 \cdot 0 + (-2) \cdot (-5) \cdot (x_3 - 2) + 2 \cdot (x_2 + 3) \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 1) \cdot (-5) \cdot 3 - (-2) \cdot (x_2 + 3) \cdot 0 = 0$$

$$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$$

Koordinatenform:

$$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$$

### 2. Methode: Vektorprodukt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene mit dem Vektorprodukt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2 \\ b_3 \cdot c_1 - c_3 \cdot b_1 \\ b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene und Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 + k = 0$$

k berechnen

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + k = 0$$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + k = 0$$

$$k = -4$$

Koordinatenform

$$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$$

## 8.1 Determinante

### 8.1.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Ebene in Koordinatenform:  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$

$$(1) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(9) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## 8.1.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_1 - 0 & 0 & 0 & x_1 - 0 & 0 \\ x_2 + 2 & 4 & -3 & x_2 + 2 & 4 \\ x_3 - 2 & -9 & 8 & x_3 - 2 & -9 \end{array} \right| = 0$$

$$(x_1 - 0) \cdot 4 \cdot 8 + 0 \cdot (-3) \cdot (x_3 - 2) + 0 \cdot (x_2 + 2) \cdot (-9) - 0 \cdot 4 \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 0) \cdot (-3) \cdot (-9) - 0 \cdot (x_2 + 2) \cdot 8 = 0$$

$$5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0 = 0$$

$$5x_1 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2}$$

$$|\vec{n}| = 5$$

$$\text{HNF: } \frac{5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0}{5} = 0$$

Aufgabe (2)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_1 - 1 & -4 & 3 & x_1 - 1 & -4 \\ x_2 + 4 & 3 & 2 & x_2 + 4 & 3 \\ x_3 - 2 & -2 & 2 & x_3 - 2 & -2 \end{array} \right| = 0$$

$$(x_1 - 1) \cdot 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 2 \cdot (x_3 - 2) + 3 \cdot (x_2 + 4) \cdot (-2) - 3 \cdot 3 \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 1) \cdot 2 \cdot (-2) - (-4) \cdot (x_2 + 4) \cdot 2 = 0$$

$$10x_1 + 2x_2 - 17x_3 + 32 = 0$$

$$10x_1 + 2x_2 - 17x_3 + 32 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$10x_1 + 2x_2 - 17x_3 + 32 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{10^2 + 2^2 + (-17)^2}$$

$$|\vec{n}| = 19,8$$

$$\text{HNF: } \frac{10x_1 + 2x_2 - 17x_3 + 32}{-19,8} = 0$$

Aufgabe (3)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$



$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_1 - 1 & -3 & 2 & x_1 - 1 & -3 \\ x_2 + 2 & 4 & 3 & x_2 + 2 & 4 \\ x_3 - 2 & -5 & 6 & x_3 - 2 & -5 \end{array} \right| = 0$$

$$(x_1 - 1) \cdot 4 \cdot 6 + (-3) \cdot 3 \cdot (x_3 - 2) + 2 \cdot (x_2 + 2) \cdot (-5) - 2 \cdot 4 \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 1) \cdot 3 \cdot (-5) - (-3) \cdot (x_2 + 2) \cdot 6 = 0$$

$$39x_1 + 8x_2 - 17x_3 + 11 = 0$$

$$39x_1 + 8x_2 - 17x_3 + 11 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$39x_1 + 8x_2 - 17x_3 + 11 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 39 \\ 8 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{39^2 + 8^2 + (-17)^2}$$

$$|\vec{n}| = 43,3$$

HNF:  $\frac{39x_1 + 8x_2 - 17x_3 + 11}{-43,3} = 0$

Aufgabe (4)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_1 - 1 & -3 & 2 & x_1 - 1 & -3 \\ x_2 + 2 & 4 & 3 & x_2 + 2 & 4 \\ x_3 - 2 & -5 & 0 & x_3 - 2 & -5 \end{array} \right| = 0$$

$$(x_1 - 1) \cdot 4 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 \cdot (x_3 - 2) + 2 \cdot (x_2 + 2) \cdot (-5) - 2 \cdot 4 \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 1) \cdot 3 \cdot (-5) - (-3) \cdot (x_2 + 2) \cdot 0 = 0$$

$$15x_1 - 10x_2 - 17x_3 - 1 = 0$$

$$15x_1 - 10x_2 - 17x_3 - 1 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$15x_1 - 10x_2 - 17x_3 - 1 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{15^2 + (-10)^2 + (-17)^2}$$

$$|\vec{n}| = 24,8$$

HNF:  $\frac{15x_1 - 10x_2 - 17x_3 - 1}{24,8} = 0$

Aufgabe (5)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_1 - 1 & 1 & -1 & x_1 - 1 & 1 \\ x_2 - 2 & -1 & 0 & x_2 - 2 & -1 \\ x_3 + 7 & 0 & 1 & x_3 + 7 & 0 \end{array} \right| = 0$$

$$(x_1 - 1) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot (x_3 + 7) + (-1) \cdot (x_2 - 2) \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \cdot (x_3 + 7) - (x_1 - 1) \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot (x_2 - 2) \cdot 1 = 0$$

$$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$$

$$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}$$

$$|\vec{n}| = 1,73$$

$$\text{HNF: } \frac{-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4}{1,73} = 0$$

Aufgabe (6)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_1 - 2 & 0 & -4 & x_1 - 2 & 0 \\ x_2 + 1 & 1 & 5 & x_2 + 1 & 1 \\ x_3 + 3 & 0 & -2 & x_3 + 3 & 0 \end{array} \right| = 0$$

$$(x_1 - 2) \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 \cdot (x_3 + 3) + (-4) \cdot (x_2 + 1) \cdot 0$$

$$- (-4) \cdot 1 \cdot (x_3 + 3) - (x_1 - 2) \cdot 5 \cdot 0 - 0 \cdot (x_2 + 1) \cdot (-2) = 0$$

$$-2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 16 = 0$$

$$-2x_1 + 4x_3 + 16 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$-2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 16 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2}$$

$$|\vec{n}| = 4,47$$

$$\text{HNF: } \frac{-2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 16}{-4,47} = 0$$

Aufgabe (7)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_1 - 0 & 4 & -5 & x_1 - 0 & 4 \\ x_2 - 5 & -2 & 6 & x_2 - 5 & -2 \\ x_3 - 0 & -3 & 2 & x_3 - 0 & -3 \end{array} \right| = 0$$

$$(x_1 - 0) \cdot (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 6 \cdot (x_3 - 0) + (-5) \cdot (x_2 - 5) \cdot (-3)$$

$$- (-5) \cdot (-2) \cdot (x_3 - 0) - (x_1 - 0) \cdot 6 \cdot (-3) - 4 \cdot (x_2 - 5) \cdot 2 = 0$$

$$14x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 35 = 0$$

$$14x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 35 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$14x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 35 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{14^2 + 7^2 + 14^2}$$

$$|\vec{n}| = 21$$

$$\text{HNF: } \frac{14x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 35}{21} = 0$$

Aufgabe (8)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_1 - 5 & 3 & 0 & x_1 - 5 & 3 \\ x_2 + 1 & 0 & 3 & x_2 + 1 & 0 \\ x_3 - 2 & 2 & -1 & x_3 - 2 & 2 \end{array} \right| = 0$$

$$\begin{aligned} & (x_1 - 5) \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \cdot (x_3 - 2) + 0 \cdot (x_2 + 1) \cdot 2 \\ & - 0 \cdot 0 \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 5) \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot (x_2 + 1) \cdot (-1) = 0 \\ & - 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 15 = 0 \\ & - 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 15 = 0 \end{aligned}$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$- 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 15 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 9^2}$$

$$|\vec{n}| = 11,2$$

$$\text{HNF: } \frac{-6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 15}{-11,2} = 0$$

Aufgabe (9)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_1 - 3 & 5 & 2 & x_1 - 3 & 5 \\ x_2 - 0 & -2 & 0 & x_2 - 0 & -2 \\ x_3 - 2 & 8 & 4 & x_3 - 2 & 8 \end{array} \right| = 0$$

$$\begin{aligned} & (x_1 - 3) \cdot (-2) \cdot 4 + 5 \cdot 0 \cdot (x_3 - 2) + 2 \cdot (x_2 - 0) \cdot 8 \\ & - 2 \cdot (-2) \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 3) \cdot 0 \cdot 8 - 5 \cdot (x_2 - 0) \cdot 4 = 0 \\ & - 8x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 16 = 0 \\ & - 8x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 16 = 0 \end{aligned}$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$- 8x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 16 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + 4^2}$$

$$|\vec{n}| = 9,8$$

$$\text{HNF: } \frac{-8x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 16}{-9,8} = 0$$

## 8.2 Vektorprodukt

### 8.2.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Ebene in Koordinatenform:  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$

$$(1) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(9) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## 8.2.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 8 - (-9) \cdot (-3) \\ -9 \cdot 0 - 8 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-3) - 4 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$$5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + k = 0$$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$5 \cdot 0 + 0 \cdot -2 + 0 \cdot 0 + k = 0$$

$$k = 0$$

Koordinatenform

$$5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0 = 0$$

$$5x_1 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2}$$

$$|\vec{n}| = 5$$

$$\text{HNF: } \frac{5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0}{5} = 0$$

Aufgabe (2)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - (-2) \cdot 2 \\ -2 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) \\ -4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$$10x_1 + 2x_2 - 17x_3 + k = 0$$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$10 \cdot 1 + 2 \cdot -4 - 17 \cdot 1 + k = 0$$

$$k = 32$$

Koordinatenform

$$10x_1 + 2x_2 - 17x_3 + 32 = 0$$

$$10x_1 + 2x_2 - 17x_3 + 32 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$10x_1 + 2x_2 - 17x_3 + 32 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{10^2 + 2^2 + (-17)^2}$$

$$|\vec{n}| = 19,8$$

$$\text{HNF: } \frac{10x_1 + 2x_2 - 17x_3 + 32}{-19,8} = 0$$

Aufgabe (3)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 6 - (-5) \cdot 3 \\ -5 \cdot 2 - 6 \cdot (-3) \\ -3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 39 \\ 8 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$$39x_1 + 8x_2 - 17x_3 + k = 0$$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$39 \cdot 1 + 8 \cdot -2 - 17 \cdot 1 + k = 0$$

$$k = 11$$

Koordinatenform

$$39x_1 + 8x_2 - 17x_3 + 11 = 0$$

$$39x_1 + 8x_2 - 17x_3 + 11 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$39x_1 + 8x_2 - 17x_3 + 11 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 39 \\ 8 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{39^2 + 8^2 + (-17)^2}$$

$$|\vec{n}| = 43,3$$

$$\text{HNF: } \frac{39x_1 + 8x_2 - 17x_3 + 11}{-43,3} = 0$$

Aufgabe (4)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 - (-5) \cdot 3 \\ -5 \cdot 2 - 0 \cdot (-3) \\ -3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$$15x_1 - 10x_2 - 17x_3 + k = 0$$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$15 \cdot 1 - 10 \cdot -2 - 17 \cdot 1 + k = 0$$

$$k = -1$$

Koordinatenform

$$15x_1 - 10x_2 - 17x_3 - 1 = 0$$

$$15x_1 - 10x_2 - 17x_3 - 1 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$15x_1 - 10x_2 - 17x_3 - 1 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{15^2 + (-10)^2 + (-17)^2}$$

$$|\vec{n}| = 24,8$$

$$\text{HNF: } \frac{15x_1 - 10x_2 - 17x_3 - 1}{24,8} = 0$$

Aufgabe (5)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + k = 0$$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + k = 0$$

$$k = -4$$

Koordinatenform

$$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$$



$$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}$$

$$|\vec{n}| = 1,73$$

$$\text{HNF: } \frac{-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4}{1,73} = 0$$

Aufgabe (6)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot (-4) - (-2) \cdot 0 \\ 0 \cdot 5 - 1 \cdot (-4) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$$-2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + k = 0$$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$-2 \cdot 2 + 0 \cdot -1 + 4 \cdot 2 + k = 0$$

$$k = 16$$

Koordinatenform

$$-2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 16 = 0$$

$$-2x_1 + 4x_3 + 16 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$-2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 16 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2}$$

$$|\vec{n}| = 4,47$$

$$\text{HNF: } \frac{-2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 16}{-4,47} = 0$$

Aufgabe (7)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 - (-3) \cdot 6 \\ -3 \cdot (-5) - 2 \cdot 4 \\ 4 \cdot 6 - (-2) \cdot (-5) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$$14x_1 + 7x_2 + 14x_3 + k = 0$$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$14 \cdot 0 + 7 \cdot 5 + 14 \cdot 0 + k = 0$$

$$k = -35$$

Koordinatenform

$$14x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 35 = 0$$

$$14x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 35 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$14x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 35 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{14^2 + 7^2 + 14^2}$$

$$|\vec{n}| = 21$$

$$\text{HNF: } \frac{14x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 35}{21} = 0$$

Aufgabe (8)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$$-6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + k = 0$$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$-6 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + 9 \cdot 5 + k = 0$$

$$k = 15$$

Koordinatenform

$$-6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 15 = 0$$

$$-6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 15 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$-6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 15 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 9^2}$$

$$|\vec{n}| = 11,2$$

$$\text{HNF: } \frac{-6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 15}{-11,2} = 0$$

Aufgabe (9)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 - 8 \cdot 0 \\ 8 \cdot 2 - 4 \cdot 5 \\ 5 \cdot 0 - (-2) \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$$-8x_1 - 4x_2 + 4x_3 + k = 0$$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$-8 \cdot 3 - 4 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + k = 0$$

$$k = 16$$

Koordinatenform

$$-8x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 16 = 0$$

$$-8x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 16 = 0$$

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$-8x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 16 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + 4^2}$$

$$|\vec{n}| = 9,8$$

$$\text{HNF: } \frac{-8x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 16}{-9,8} = 0$$

## 9 Koordinatenform - Hessesche Normalenform

Koordinatenform:

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$$

Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors:

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

Hessesche Normalenform:

$$k_1 < 0$$

$$\text{HNF: } \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

$$k_1 > 0$$

$$\text{HNF: } \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{-\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

Koordinatenform:

$$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors:

$$|\vec{n}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{15^2 + 6^2 + 2^2}$$

$$|\vec{n}| = 16,3$$

Hessesche Normalenform:

$$\text{HNF: } \frac{15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1}{16,3} = 0$$

### 9.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Ebene in Koordinatenform:  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$

Gesucht:

Hessesche Normalenform

$$k_1 < 0$$

$$\text{HNF: } \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

$$k_1 > 0$$

$$\text{HNF: } \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{-\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

(1) Ebene:  $3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7 = 0$

(2) Ebene:  $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2 = 0$

(3) Ebene:  $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5 = 0$

## 9.2 Lösungen

Aufgabe (1)

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 6^2}$$

$$|\vec{n}| = 7,81$$

$$\text{HNF: } \frac{3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7}{-7,81} = 0$$

Aufgabe (2)

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$$

$$|\vec{n}| = 5,39$$

$$\text{HNF: } \frac{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2}{-5,39} = 0$$

Aufgabe (3)

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

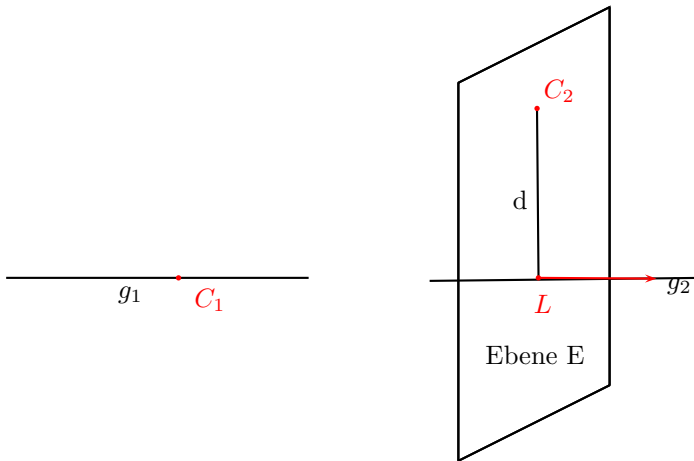
$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$$

$$|\vec{n}| = 5,39$$

$$\text{HNF: } \frac{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5}{-5,39} = 0$$

# 10 Punkt - Gerade



Punkt  $C_1$  liegt auf der Geraden  $g_1$

Abstand  $d$  des Punktes  $C_2$  von der Geraden  $g_2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(c_1/c_2/c_3)$

$$c_1 = a_1 + b_1\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1$$

$$c_1 = a_2 + b_2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2$$

$$c_1 = a_3 + b_3\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow$$

Punkt liegt auf der Geraden

nicht alle  $\lambda$  gleich  $\Rightarrow$

Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Die Koordinatenform der Ebenengleichung aufstellen, die senkrecht zur Geraden ist und den Punkt C enthält.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene. Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

Abstand des Punktes, ist die Länge des Vektors  $\vec{CL}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Punkt: } C(7, 9, -6)$$

$$7 = 1 - 2\lambda \quad / -1$$

$$9 = 3 - 2\lambda \quad / -3$$

$$-6 = -3 + 2\lambda \quad / +3$$

$$6 = -2\lambda \quad / : -2 \Rightarrow \lambda = -3$$

$$6 = -2\lambda \quad / : -2 \Rightarrow \lambda = -3$$

$$-3 = 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = -1\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$-2 \cdot 7 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + k = 0$$

$$k = 44$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 44 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$x_1 = 1 - 2\lambda$$

$$x_2 = 3 - 2\lambda$$

$$x_3 = -3 + 2\lambda$$

$$-2(1 - 2\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 2(-3 + 2\lambda) + 44 = 0$$

$$12\lambda + 30 = 0$$

$$\lambda = \frac{-30}{12}$$

$$\lambda = -2\frac{1}{2}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(6, 8, -8)$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 12 - 7 \\ 30 - 9 \\ -2\frac{1}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$|\vec{CL}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

## 10.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

$$\text{Gegeben: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(c_1/c_2/c_3)$

Gesucht: Liegt der Punkt auf der Geraden

$$(1) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(3/11/9)$

$$(2) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(3/-4/2)$

$$(3) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(3/0/7)$

$$(4) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(8/8/0)$

$$(5) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(5/7/2)$

$$(6) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(-5/7/-2)$

$$(7) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(-3/-1/-1)$

$$(8) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(5/5/0)$

$$(9) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(9/9/0)$

$$(10) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(8/8/6)$

$$(11) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(3/3/2)$

$$(12) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(3/3/-2)$

$$(13) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(6/0/-7)$

$$(14) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(7/9/-6)$

$$(15) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(0/5/6)$

$$(16) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(4/2/-4)$

$$(17) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(5/1/-2)$

## 10.2 Lösungen

Aufgabe (1)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(3, 11, 9)$

$$\begin{aligned} 3 &= 1 + 2\lambda & / -1 \\ 11 &= 4 + 7\lambda & / -4 \\ 9 &= 4 + 5\lambda & / -4 \\ 2 &= 2\lambda & / : 2 \Rightarrow \lambda = 1 \\ 7 &= 7\lambda & / : 7 \Rightarrow \lambda = 1 \\ 5 &= 5\lambda & / : 5 \Rightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt auf der Geraden

Aufgabe (2)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(3, -4, 2)$

$$\begin{aligned} 3 &= 6 + 3\lambda & / -6 \\ -4 &= 2 + 6\lambda & / -2 \\ 2 &= 9 + 7\lambda & / -9 \\ -3 &= 3\lambda & / : 3 \Rightarrow \lambda = -1 \\ -6 &= 6\lambda & / : 6 \Rightarrow \lambda = -1 \\ -7 &= 7\lambda & / : 7 \Rightarrow \lambda = -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt auf der Geraden

Aufgabe (3)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(3, 0, 7)$

$$\begin{aligned} 3 &= 1 + 2\lambda & / -1 \\ 0 &= 3 + 10\lambda & / -3 \\ 7 &= 3 + 4\lambda & / -3 \\ 2 &= 2\lambda & / : 2 \Rightarrow \lambda = 1 \\ -3 &= 10\lambda & / : 10 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{10} \\ 4 &= 4\lambda & / : 4 \Rightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$2 \cdot 3 + 10 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + k = 0$$

$$k = -34$$

Koordinatenform

$$2x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 34 = 0$$

$$2x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 34 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$x_1 = 1 + 2\lambda$$

$$x_2 = 3 + 10\lambda$$

$$x_3 = 3 + 4\lambda$$

$$2(1 + 2\lambda) + 10(3 + 10\lambda) + 4(3 + 4\lambda) - 34 = 0$$

$$120\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{-10}{120}$$

$$\lambda = -\frac{1}{12}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(\frac{5}{6}, 2\frac{1}{6}, 2\frac{2}{3})$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 120 - 3 \\ 10 - 0 \\ -\frac{1}{12} - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{6} \\ 2\frac{1}{6} \\ -4\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$|\vec{CL}| = \sqrt{(-2\frac{1}{6})^2 + (2\frac{1}{6})^2 + (-4\frac{1}{3})^2}$$

$$|\vec{AB}| = 5,31$$

Aufgabe (4)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(8, 8, 0)$

$$8 = 3 + 4\lambda \quad / -3$$

$$8 = 5 + 0\lambda \quad / -5$$

$$0 = 6 + 7\lambda \quad / -6$$

$$5 = 4\lambda \quad / : 4 \Rightarrow \lambda = 1\frac{1}{4}$$

$$3 = 0\lambda \quad / : 0 \Rightarrow \lambda = \infty$$

$$-6 = 7\lambda \quad / : 7 \Rightarrow \lambda = -\frac{6}{7}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$4x_1 + 0x_2 + 7x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$4 \cdot 8 + 0 \cdot 8 + 7 \cdot 8 + k = 0$$

$$k = -32$$

Koordinatenform

$$4x_1 + 0x_2 + 7x_3 - 32 = 0$$

$$4x_1 + 7x_3 - 32 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$x_1 = 3 + 4\lambda$$

$$x_2 = 5 + 0\lambda$$

$$x_3 = 6 + 7\lambda$$

$$4(3 + 4\lambda) + 0(5 + 0\lambda) + 7(6 + 7\lambda) - 32 = 0$$

$$65\lambda + 22 = 0$$

$$\lambda = \frac{-22}{65}$$

$$\lambda = -\frac{22}{65}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{22}{65} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(1\frac{42}{65}, 5, 3\frac{41}{65})$



$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 65 - 8 \\ 22 - 8 \\ -\frac{22}{65} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\frac{23}{65} \\ -3 \\ 3\frac{41}{65} \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$|\vec{CL}| = \sqrt{\left(-6\frac{23}{65}\right)^2 + (-3)^2 + \left(3\frac{41}{65}\right)^2}$$

$$|\vec{AB}| = 7,91$$

Aufgabe (5)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(-5, 7, -2)$

$$-5 = 3 - 4\lambda \quad / -3$$

$$7 = 5 + 1\lambda \quad / -5$$

$$-2 = 6 - 4\lambda \quad / -6$$

$$-8 = -4\lambda \quad / : -4 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$2 = 1\lambda \quad / : 1 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$-8 = -4\lambda \quad / : -4 \Rightarrow \lambda = 2$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt auf der Geraden

Aufgabe (7)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(5, 7, 2)$

$$5 = 3 - 4\lambda \quad / -3$$

$$7 = 5 + 1\lambda \quad / -5$$

$$2 = 6 - 4\lambda \quad / -6$$

$$2 = -4\lambda \quad / : -4 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$2 = 1\lambda \quad / : 1 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$-4 = -4\lambda \quad / : -4 \Rightarrow \lambda = 1$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$-4x_1 + 1x_2 - 4x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$-4 \cdot 5 + 1 \cdot 7 - 4 \cdot 2 + k = 0$$

$$k = 21$$

Koordinatenform

$$-4x_1 + 1x_2 - 4x_3 + 21 = 0$$

$$-4x_1 + 1x_2 - 4x_3 + 21 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene

$$x_1 = 3 - 4\lambda$$

$$x_2 = 5 + 1\lambda$$

$$x_3 = 6 - 4\lambda$$

$$-4(3 - 4\lambda) + 1(5 + 1\lambda) - 4(6 - 4\lambda) + 21 = 0$$

$$33\lambda - 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{+10}{33}$$

$$\lambda = \frac{10}{33}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{10}{33} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(1\frac{26}{33}, 5\frac{10}{33}, 4\frac{26}{33})$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 33 - 5 \\ -10 - 7 \\ \frac{10}{33} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\frac{7}{33} \\ -1\frac{23}{33} \\ 2\frac{26}{33} \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$|\vec{CL}| = \sqrt{\left(-3\frac{7}{33}\right)^2 + \left(-1\frac{23}{33}\right)^2 + \left(2\frac{26}{33}\right)^2}$$

$$|\vec{AB}| = 4,58$$

Aufgabe (6)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(-3, -1, -1)$

$$-3 = 1 + 0\lambda \quad / -1$$

$$-1 = 2 + 4\lambda \quad / -2$$

$$-1 = 1 + 3\lambda \quad / -1$$

$$-4 = 0\lambda \quad / : 0 \Rightarrow \lambda = -\infty$$

$$-3 = 4\lambda \quad / : 4 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$$

$$-2 = 3\lambda \quad / : 3 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$0x_1 + 4x_2 + 3x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$0 \cdot -3 + 4 \cdot -1 + 3 \cdot -1 + k = 0$$

$$k = 7$$

Koordinatenform

$$0x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7 = 0$$

$$+ 4x_2 + 3x_3 + 7 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$x_1 = 1 + 0\lambda$$

$$x_2 = 2 + 4\lambda$$

$$x_3 = 1 + 3\lambda$$

$$0(1 + 0\lambda) + 4(2 + 4\lambda) + 3(1 + 3\lambda) + 7 = 0$$

$$25\lambda + 18 = 0$$

$$\lambda = \frac{-18}{25}$$

$$\lambda = -\frac{18}{25}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{18}{25} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(1, -\frac{22}{25}, -1\frac{4}{25})$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 25 + 3 \\ 18 + 1 \\ -\frac{18}{25} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{25} \\ -\frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$|\vec{CL}| = \sqrt{4^2 + \left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(-\frac{4}{25}\right)^2}$$

$$|\vec{AB}| = 4$$

Aufgabe (8)

Punkt - Gerade

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(5, 5, 0)$

$$5 = 3 + 4\lambda \quad / -3$$

$$5 = 3 + 4\lambda \quad / -3$$

$$0 = 3 + 4\lambda \quad / -3$$

$$2 = 4\lambda \quad / : 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$2 = 4\lambda \quad / : 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$-3 = 4\lambda \quad / : 4 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + k = 0$$

$$k = -40$$

Koordinatenform

$$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 40 = 0$$

$$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 40 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$x_1 = 3 + 4\lambda$$

$$x_2 = 3 + 4\lambda$$

$$x_3 = 3 + 4\lambda$$

$$4(3 + 4\lambda) + 4(3 + 4\lambda) + 4(3 + 4\lambda) - 40 = 0$$

$$48\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{+4}{48}$$

$$\lambda = \frac{1}{12}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3})$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 48 - 5 \\ -4 - 5 \\ \frac{1}{12} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{2}{3} \\ -9 \\ 3\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$|\vec{CL}| = \sqrt{(-1\frac{2}{3})^2 + (-9)^2 + (3\frac{1}{3})^2}$$

$$|\vec{AB}| = 4,08$$

Aufgabe (9)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(9, 9, 0)$

$$9 = 5 + 6\lambda \quad / -5$$

$$9 = 7 + 8\lambda \quad / -7$$

$$0 = 0 + 9\lambda \quad / -0$$

$$4 = 6\lambda \quad / : 6 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

$$2 = 8\lambda \quad / : 8 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

$$0 = 9\lambda \quad / : 9 \Rightarrow \lambda = 0$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$6x_1 + 8x_2 + 9x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$6 \cdot 9 + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 9 + k = 0$$

$$k = -126$$

Koordinatenform

$$6x_1 + 8x_2 + 9x_3 - 126 = 0$$

$$6x_1 + 8x_2 + 9x_3 - 126 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$x_1 = 5 + 6\lambda$$

$$x_2 = 7 + 8\lambda$$

$$x_3 = 0 + 9\lambda$$

$$6(5 + 6\lambda) + 8(7 + 8\lambda) + 9(0 + 9\lambda) - 126 = 0$$

$$181\lambda - 40 = 0$$

$$\lambda = \frac{+40}{181}$$

$$\lambda = 0,221$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,221 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(6,33, 8,77, 1,99)$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 181 - 9 \\ -40 - 9 \\ 0,221 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,67 \\ -0,232 \\ 1,99 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$|\vec{CL}| = \sqrt{(-2,67)^2 + (-0,232)^2 + 1,99^2}$$

$$|\vec{AB}| = 3,34$$

Aufgabe (10)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(8, 8, 6)$

$$8 = 4 + 5\lambda \quad / -4$$

$$8 = 6 + 6\lambda \quad / -6$$

$$6 = 7 + 7\lambda \quad / -7$$

$$4 = 5\lambda \quad / : 5 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{5}$$

$$2 = 6\lambda \quad / : 6 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$-1 = 7\lambda \quad / : 7 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{7}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$5 \cdot 8 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 8 + k = 0$$

$$k = -130$$

Koordinatenform

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 130 = 0$$

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 130 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$x_1 = 4 + 5\lambda$$

$$x_2 = 6 + 6\lambda$$

$$x_3 = 7 + 7\lambda$$

$$5(4 + 5\lambda) + 6(6 + 6\lambda) + 7(7 + 7\lambda) - 130 = 0$$

$$110\lambda - 25 = 0$$

$$\lambda = \frac{+25}{110}$$

$$\lambda = \frac{5}{22}$$

Aufgabe (12)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{5}{22} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(5\frac{3}{22}, 7\frac{4}{11}, 8\frac{13}{22})$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 110-8 \\ -25-8 \\ \frac{5}{22}-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{19}{22} \\ -\frac{7}{11} \\ 2\frac{13}{22} \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$|\vec{CL}| = \sqrt{(-2\frac{19}{22})^2 + (-\frac{7}{11})^2 + (2\frac{13}{22})^2}$$

$$|\vec{AB}| = 3,91$$

Aufgabe (11)

Punkt - Gerade

Aufgabe (13)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(3, 3, 2)$

$$3 = 1 + 2\lambda \quad / - 1$$

$$3 = 1 + 2\lambda \quad / - 1$$

$$2 = -3 + 1\lambda \quad / + 3$$

$$2 = 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$2 = 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$5 = 1\lambda \quad / : 1 \Rightarrow \lambda = 5$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + k = 0$$

$$k = -14$$

Koordinatenform

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 - 14 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 - 14 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$x_1 = 1 + 2\lambda$$

$$x_2 = 1 + 2\lambda$$

$$x_3 = -3 + 1\lambda$$

$$2(1 + 2\lambda) + 2(1 + 2\lambda) + 1(-3 + 1\lambda) - 14 = 0$$

$$9\lambda - 13 = 0$$

$$\lambda = \frac{+13}{9}$$

$$\lambda = 1\frac{4}{9}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 1\frac{4}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(3\frac{8}{9}, 3\frac{8}{9}, -1\frac{5}{9})$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 9-3 \\ -13-3 \\ 1\frac{4}{9}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -3\frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$|\vec{CL}| = \sqrt{(\frac{8}{9})^2 + (\frac{8}{9})^2 + (-3\frac{5}{9})^2}$$

$$|\vec{AB}| = 3,77$$

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(3, 3, -2)$

$$3 = 1 + 2\lambda \quad / - 1$$

$$3 = 1 + 2\lambda \quad / - 1$$

$$-2 = -3 + 1\lambda \quad / + 3$$

$$2 = 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$2 = 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$1 = 1\lambda \quad / : 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt auf der Geraden

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(6, 0, -7)$

$$6 = -4 + 5\lambda \quad / + 4$$

$$0 = -4 + 2\lambda \quad / + 4$$

$$-7 = 1 - 4\lambda \quad / - 1$$

$$10 = 5\lambda \quad / : 5 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$4 = 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$-8 = -4\lambda \quad / : -4 \Rightarrow \lambda = 2$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt auf der Geraden

Aufgabe (14)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(7, 9, -6)$

$$7 = 1 - 2\lambda \quad / - 1$$

$$9 = 3 - 2\lambda \quad / - 3$$

$$-6 = -3 + 2\lambda \quad / + 3$$

$$6 = -2\lambda \quad / : -2 \Rightarrow \lambda = -3$$

$$6 = -2\lambda \quad / : -2 \Rightarrow \lambda = -3$$

$$-3 = 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = -1\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$-2 \cdot 7 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + k = 0$$

$$k = 44$$

Koordinatenform

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 44 = 0$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 44 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2\lambda \\ x_2 &= 3 - 2\lambda \\ x_3 &= -3 + 2\lambda \\ -2(1 - 2\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 2(-3 + 2\lambda) + 44 &= 0 \\ 12\lambda + 30 &= 0 \\ \lambda &= \frac{-30}{12} \\ \lambda &= -2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(6, 8, -8)$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 12 - 7 \\ 30 - 9 \\ -2\frac{1}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$\begin{aligned} |\vec{CL}| &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \\ |\vec{AB}| &= 2,45 \end{aligned}$$

Aufgabe (15)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(0, 5, 6)$

$$\begin{aligned} 0 &= 2 - 4\lambda & / -2 \\ 5 &= 0 + 1\lambda & / -0 \\ 6 &= 1 + 1\lambda & / -1 \\ -2 &= -4\lambda & / : -4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \\ 5 &= 1\lambda & / : 1 \Rightarrow \lambda = 5 \\ 5 &= 1\lambda & / : 1 \Rightarrow \lambda = 5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$\begin{aligned} -4x_1 + 1x_2 + 1x_3 + k &= 0 \\ C \text{ ist Punkt in der Ebene} \\ -4 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + k &= 0 \\ k &= -11 \end{aligned}$$

Koordinatenform

$$\begin{aligned} -4x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 11 &= 0 \\ -4x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 11 &= 0 \end{aligned}$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 4\lambda \\ x_2 &= 0 + 1\lambda \\ x_3 &= 1 + 1\lambda \\ -4(2 - 4\lambda) + 1(0 + 1\lambda) + 1(1 + 1\lambda) - 11 &= 0 \\ 18\lambda - 18 &= 0 \\ \lambda &= \frac{+18}{18} \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(-2, 1, 2)$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 18 - 0 \\ -18 - 5 \\ 1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$\begin{aligned} |\vec{CL}| &= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} \\ |\vec{AB}| &= 6 \end{aligned}$$

Aufgabe (16)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(4, 2, -4)$

$$\begin{aligned} 4 &= 2 - 4\lambda & / -2 \\ 2 &= 0 + 1\lambda & / -0 \\ -4 &= 1 + 1\lambda & / -1 \\ 2 &= -4\lambda & / : -4 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \\ 2 &= 1\lambda & / : 1 \Rightarrow \lambda = 2 \\ -5 &= 1\lambda & / : 1 \Rightarrow \lambda = -5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$\begin{aligned} -4x_1 + 1x_2 + 1x_3 + k &= 0 \\ C \text{ ist Punkt in der Ebene} \\ -4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + k &= 0 \\ k &= 18 \end{aligned}$$

Koordinatenform

$$\begin{aligned} -4x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 18 &= 0 \\ -4x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 18 &= 0 \end{aligned}$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 4\lambda \\ x_2 &= 0 + 1\lambda \\ x_3 &= 1 + 1\lambda \\ -4(2 - 4\lambda) + 1(0 + 1\lambda) + 1(1 + 1\lambda) + 18 &= 0 \\ 18\lambda + 11 &= 0 \\ \lambda &= \frac{-11}{18} \\ \lambda &= -\frac{11}{18} \end{aligned}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{11}{18} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(4\frac{4}{9}, -\frac{11}{18}, \frac{7}{18})$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 18 - 4 \\ 11 - 2 \\ -\frac{11}{18} + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -2\frac{11}{18} \\ 4\frac{7}{18} \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$\begin{aligned} |\vec{CL}| &= \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-2\frac{11}{18}\right)^2 + \left(4\frac{7}{18}\right)^2} \\ |\vec{AB}| &= 5,13 \end{aligned}$$

Aufgabe (17)

Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $C(5, 1, -2)$

$$\begin{array}{rcl}
 5 & = & 0 + 2\lambda \quad / - 0 \\
 1 & = & 2 + 0\lambda \quad / - 2 \\
 -2 & = & -2 - 1\lambda \quad / + 2 \\
 5 & = & 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = 2\frac{1}{2} \\
 -1 & = & 0\lambda \quad / : 0 \Rightarrow \lambda = -\infty \\
 0 & = & -1\lambda \quad / : -1 \Rightarrow \lambda = 0
 \end{array}$$

$\Rightarrow$  Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$2x_1 + 0x_2 - 1x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + k = 0$$

$$k = -12$$

Koordinatenform

$$2x_1 + 0x_2 - 1x_3 - 12 = 0$$

$$2x_1 - 1x_3 - 12 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$x_1 = 0 + 2\lambda$$

$$x_2 = 2 + 0\lambda$$

$$x_3 = -2 - 1\lambda$$

$$2(0 + 2\lambda) + 0(2 + 0\lambda) - 1(-2 - 1\lambda) - 12 = 0$$

$$5\lambda - 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{+10}{5}$$

$$\lambda = 2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:  $L(4, 2, -4)$

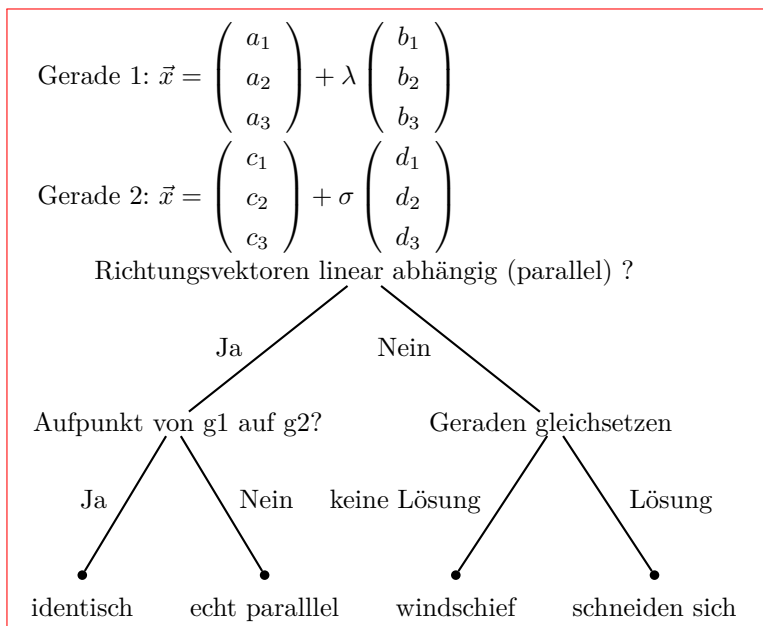
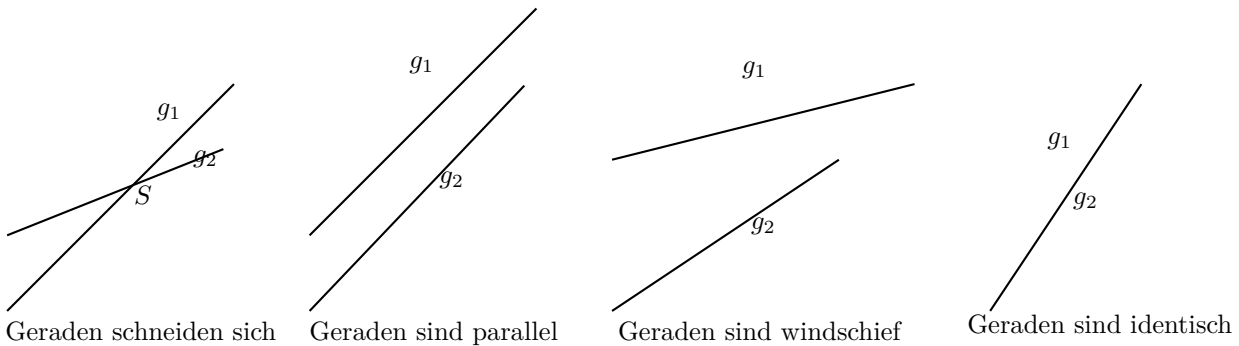
$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 5 - 5 \\ -10 - 1 \\ 2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$|\vec{CL}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$|\vec{AB}| = 2,45$$

# 11 Gerade - Gerade



Gerade 1:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$   
 Gerade 2:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4 &= -4k & /: -4 &\Rightarrow k = -1 \\ -7 &= -4k & /: -4 &\Rightarrow k = 1\frac{3}{4} \\ -8 &= -3k & /: -3 &\Rightarrow k = 2\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + 4\lambda &= 9 - 4\sigma & /-1 & /+4\sigma \\ -2 - 7\lambda &= -5 - 4\sigma & /+2 & /+4\sigma \\ 8 - 8\lambda &= 3 - 3\sigma & /-8 & /+3\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I \quad & 4\lambda + 4\sigma = 8 \\ II \quad & -7\lambda + 4\sigma = -3 \\ III \quad & -8\lambda - 3\sigma = -5 \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen I und II  $\lambda$  und  $\sigma$  berechnen

$$\begin{aligned} \sigma &= 1 \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

$\lambda$  und  $\sigma$  in die verbleibende Gleichung einsetzen

$$III \quad 8 + 1 \cdot (-8) = 3 + 1 \cdot (-3)$$

$$0 = 0$$

$\lambda$  oder  $\sigma$  in die Geradengleichung einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt:  $S(5, -9, 0)$

## 11.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben: Gerade 1:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Die Lage der Geraden zueinander.

$$(1) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(5) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(7) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(8) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(9) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(10) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(11) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(12) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(13) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(14) \quad \begin{array}{l} \text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

## 11.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3 = +3k \quad / : 3 \Rightarrow k = 1$$

$$-4 = -4k \quad / : -4 \Rightarrow k = 1$$

$$2 = +2k \quad / : 2 \Rightarrow k = 1$$

$\Rightarrow$  Geraden sind parallel

Aufpunkt von Gerade 2 in Gerade 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $A(1/-1/2)$

$$1 = 4 + 3\lambda \quad / - 4$$

$$-1 = -1 - 4\lambda \quad / + 1$$

$$2 = 2 + 2\lambda \quad / - 2$$

$$-3 = 3\lambda \quad / : 3 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$0 = -4\lambda \quad / : -4 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$0 = 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = 0$$

$\Rightarrow$

Geraden sind echt parallel

Aufgabe (2)

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3 = +3k \quad / : 3 \Rightarrow k = 1$$

$$-4 = -4k \quad / : -4 \Rightarrow k = 1$$

$$2 = +2k \quad / : 2 \Rightarrow k = 1$$

$\Rightarrow$  Geraden sind parallel

Aufpunkt von Gerade 2 in Gerade 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $A(1/-1/2)$

$$1 = 1 + 3\lambda \quad / - 1$$

$$-1 = -1 - 4\lambda \quad / + 1$$

$$2 = 2 + 2\lambda \quad / - 2$$



$$\begin{aligned} 0 &= 3\lambda & / : 3 &\Rightarrow \lambda = 0 \\ 0 &= -4\lambda & / : -4 &\Rightarrow \lambda = 0 \\ 0 &= 2\lambda & / : 2 &\Rightarrow \lambda = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Geraden sind identisch

Aufgabe (3)

$$\begin{aligned} \text{Gerade 1: } \vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} &= k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 3 &= +3k & / : 3 &\Rightarrow k = 1 \\ -4 &= -4k & / : -4 &\Rightarrow k = 1 \\ 2 &= +2k & / : 2 &\Rightarrow k = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Geraden sind parallel

Aufpunkt von Gerade 2 in Gerade 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punkt:  $A(1/-1/2)$

$$\begin{aligned} 1 &= 5 + 3\lambda & / -5 & \\ -1 &= -1 - 4\lambda & / +1 & \\ 2 &= 3 + 2\lambda & / -3 & \\ -4 &= 3\lambda & / : 3 &\Rightarrow \lambda = -1\frac{1}{3} \\ 0 &= -4\lambda & / : -4 &\Rightarrow \lambda = 0 \\ -1 &= 2\lambda & / : 2 &\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Geraden sind echt parallel

Aufgabe (4)

$$\begin{aligned} \text{Gerade 1: } \vec{x} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} &= k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ 1 &= +5k & / : 5 &\Rightarrow k = \frac{1}{5} \\ 3 &= +1k & / : 1 &\Rightarrow k = 3 \\ 7 &= +4k & / : 4 &\Rightarrow k = 1\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcll} 8 + 1\lambda & = & 7 + 5\sigma & / - 8 \quad / - 5\sigma \\ 4 + 3\lambda & = & 7 + 1\sigma & / - 4 \quad / - 1\sigma \\ 2 + 7\lambda & = & 8 + 4\sigma & / - 2 \quad / - 4\sigma \end{array}$$

$$I \quad 1\lambda - 5\sigma = -1$$

$$II \quad 3\lambda - 1\sigma = 3$$

$$III \quad 7\lambda + 4\sigma = 6$$

Aus 2 Gleichungen  $\lambda$  und  $\sigma$  berechnen

$$I \quad 1\lambda - 5\sigma = -1 \quad / \cdot 3$$

$$II \quad 3\lambda - 1\sigma = 3 \quad / \cdot (-1)$$

$$I \quad 3\lambda - 15\sigma = -3$$

$$II \quad -3\lambda + 1\sigma = -3$$

I + II

$$I \quad 3\lambda - 3\lambda - 15\sigma + 1\sigma = -3 - 3$$

$$-14\sigma = -6 \quad / : (-14)$$

$$\sigma = \frac{-6}{-14}$$

$$\sigma = \frac{3}{7}$$

$\sigma$  in I

$$I \quad 3\lambda - 15 \cdot \frac{3}{7} = -3$$

$$3\lambda - 6\frac{3}{7} = -3 \quad / + 6\frac{3}{7}$$

$$3\lambda = -3 + 6\frac{3}{7}$$

$$3\lambda = 3\frac{3}{7} \quad / : 3$$

$$\lambda = \frac{3\frac{3}{7}}{3}$$

$$\lambda = 1\frac{1}{7}$$

$\lambda$  und  $\sigma$  in die verbleibende Gleichung einsetzen

$$III \quad 2 + 1\frac{1}{7} \cdot 7 = 8 + \frac{3}{7} \cdot 4$$

$$10 = 9\frac{5}{7}$$

Geraden sind windschief

Aufgabe (5)

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 = +4k \quad / : 4 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$3 = +4k \quad / : 4 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

$$-5 = +3k \quad / : 3 \Rightarrow k = -1\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$  Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$1 + 2\lambda = 1 + 4\sigma \quad / - 1 \quad / - 4\sigma$$

$$1 + 3\lambda = 1 + 4\sigma \quad / - 1 \quad / - 4\sigma$$

$$1 - 5\lambda = 1 + 3\sigma \quad / - 1 \quad / - 3\sigma$$

$$I \quad 2\lambda - 4\sigma = 0$$

$$II \quad 3\lambda - 4\sigma = 0$$

$$III \quad -5\lambda + 3\sigma = 0$$

Aus 2 Gleichungen  $\lambda$  und  $\sigma$  berechnen

$$I \quad 2\lambda - 4\sigma = 0 \quad / \cdot 3$$

$$II \quad 3\lambda - 4\sigma = 0 \quad / \cdot (-2)$$

$$I \quad 6\lambda - 12\sigma = 0$$

$$II \quad -6\lambda + 8\sigma = 0$$

I + II

$$I \quad 6\lambda - 6\lambda - 12\sigma + 8\sigma = 0 + 0$$

$$-4\sigma = 0 \quad / : (-4)$$

$$\sigma = \frac{0}{-4}$$

$$\sigma = 0$$

$\sigma$  in I

$$I \quad 6\lambda - 12 \cdot 0 = 0$$

$$6\lambda + 0 = 0 \quad / - 0$$

$$6\lambda = 0 - 0$$

$$6\lambda = 0 \quad / : 6$$

$$\lambda = \frac{0}{6}$$

$$\lambda = 0$$

$\lambda$  und  $\sigma$  in die verbleibende Gleichung einsetzen

$$III \quad 1 + 0 \cdot (-5) = 1 + 0 \cdot 3$$

$$1 = 1$$

$\lambda$  oder  $\sigma$  in die Geradengleichung einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt:  $S(1, 1, 1)$

Aufgabe (6)

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$4 = -4k \quad / : -4 \Rightarrow k = -1$$

$$-7 = -4k \quad / : -4 \Rightarrow k = 1\frac{3}{4}$$

$$-8 = -3k \quad / : -3 \Rightarrow k = 2\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$  Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$1 + 4\lambda = 9 - 4\sigma \quad / - 1 \quad / + 4\sigma$$

$$-2 - 7\lambda = -5 - 4\sigma \quad / + 2 \quad / + 4\sigma$$

$$8 - 8\lambda = 3 - 3\sigma \quad / - 8 \quad / + 3\sigma$$

$$I \quad 4\lambda + 4\sigma = 8$$

$$II \quad -7\lambda + 4\sigma = -3$$

$$III \quad -8\lambda - 3\sigma = -5$$

Aus 2 Gleichungen  $\lambda$  und  $\sigma$  berechnen

$$I \quad 4\lambda + 4\sigma = 8 \quad / \cdot (-7)$$

$$II \quad -7\lambda + 4\sigma = -3 \quad / \cdot (-4)$$

$$I \quad -28\lambda - 28\sigma = -56$$

$$II \quad 28\lambda - 16\sigma = 12$$

I + II

$$I \quad -28\lambda + 28\lambda - 28\sigma - 16\sigma = -56 + 12$$

$$-44\sigma = -44 \quad / : (-44)$$

$$\sigma = \frac{-44}{-44}$$

$$\sigma = 1$$

$\sigma$  in I

$$I \quad -28\lambda - 28 \cdot 1 = -56$$

$$-28\lambda - 28 = -56 \quad / + 28$$

$$-28\lambda = -56 + 28$$

$$-28\lambda = -28 \quad / : (-28)$$

$$\lambda = \frac{-28}{-28}$$

$$\lambda = 1$$

$\lambda$  und  $\sigma$  in die verbleibende Gleichung einsetzen

$$III \quad 8 + 1 \cdot (-8) = 3 + 1 \cdot (-3)$$

$$0 = 0$$

$\lambda$  oder  $\sigma$  in die Geradengleichung einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt:  $S(5, -9, 0)$

Aufgabe (7)

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1 = +5k \quad / : 5 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

$$2 = +4k \quad / : 4 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$-3 = -1k \quad / : -1 \Rightarrow k = 3$$

$\Rightarrow$  Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-3 + 1\lambda = 1 + 5\sigma \quad / + 3 \quad / - 5\sigma$$

$$1 + 2\lambda = 5 + 4\sigma \quad / - 1 \quad / - 4\sigma$$

$$5 - 3\lambda = -3 - 1\sigma \quad / - 5 \quad / + 1\sigma$$

$$I \quad 1\lambda - 5\sigma = 4$$

$$II \quad 2\lambda - 4\sigma = 4$$

$$III \quad -3\lambda - 1\sigma = -8$$

Aus 2 Gleichungen  $\lambda$  und  $\sigma$  berechnen

$$I \quad 1\lambda - 5\sigma = 4 \quad / \cdot 2$$

$$II \quad 2\lambda - 4\sigma = 4 \quad / \cdot (-1)$$

$$I \quad 2\lambda - 10\sigma = 8$$

$$II \quad -2\lambda + 4\sigma = -4$$

$$I + II$$

$$I \quad 2\lambda - 2\lambda - 10\sigma + 4\sigma = 8 - 4$$

$$-6\sigma = 4 \quad / : (-6)$$

$$\sigma = \frac{4}{-6}$$

$$\sigma = -\frac{2}{3}$$

$$\sigma \text{ in I}$$

$$I \quad 2\lambda - 10 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 8$$

$$2\lambda + 6\frac{2}{3} = 8 \quad / -6\frac{2}{3}$$

$$2\lambda = 8 - 6\frac{2}{3}$$

$$2\lambda = 1\frac{1}{3} \quad / : 2$$

$$\lambda = \frac{1\frac{1}{3}}{2}$$

$$\lambda = \frac{2}{3}$$

$\lambda$  und  $\sigma$  in die verbleibende Gleichung einsetzen

$$III \quad 5 + \frac{2}{3} \cdot (-3) = -3 - \frac{2}{3} \cdot (-1)$$

$$3 = -2\frac{1}{3}$$

Geraden sind windschief

Aufgabe (8)

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 = +5k \quad / : 5 \Rightarrow k = \frac{2}{5}$$

$$6 = +3k \quad / : 3 \Rightarrow k = 2$$

$$8 = +3k \quad / : 3 \Rightarrow k = 2\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$  Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$1 + 2\lambda = 9 + 5\sigma \quad / -1 \quad / -5\sigma$$

$$2 + 6\lambda = 7 + 3\sigma \quad / -2 \quad / -3\sigma$$

$$7 + 8\lambda = 8 + 3\sigma \quad / -7 \quad / -3\sigma$$

$$I \quad 2\lambda - 5\sigma = 8$$

$$II \quad 6\lambda - 3\sigma = 5$$

$$III \quad 8\lambda + 3\sigma = 1$$

Aus 2 Gleichungen  $\lambda$  und  $\sigma$  berechnen

$$I \quad 2\lambda - 5\sigma = 8 \quad / \cdot 3$$

$$II \quad 6\lambda - 3\sigma = 5 \quad / \cdot (-1)$$

$$I \quad 6\lambda - 15\sigma = 24$$

$$II \quad -6\lambda + 3\sigma = -5$$

$$I + II$$

$$I \quad 6\lambda - 6\lambda - 15\sigma + 3\sigma = 24 - 5$$

$$-12\sigma = 19 \quad / : (-12)$$

$$\sigma = \frac{19}{-12}$$

$$\sigma = -1\frac{7}{12}$$

$$\sigma \text{ in I}$$

$$I \quad 6\lambda - 15 \cdot \left(-1\frac{7}{12}\right) = 24$$

$$6\lambda + 23\frac{3}{4} = 24 \quad / -23\frac{3}{4}$$

$$6\lambda = 24 - 23\frac{3}{4}$$

$$6\lambda = \frac{1}{4} \quad / : 6$$

$$\lambda = \frac{1}{6}$$

$$\lambda = \frac{1}{24}$$

$\lambda$  und  $\sigma$  in die verbleibende Gleichung einsetzen

$$III \quad 7 + \frac{1}{24} \cdot 8 = 8 - 1\frac{7}{12} \cdot 3$$

$$7\frac{1}{3} = 3\frac{1}{4}$$

Geraden sind windschief

Aufgabe (9)

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$1 = +5k \quad / : 5 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

$$3 = +1k \quad / : 1 \Rightarrow k = 3$$

$$7 = +4k \quad / : 4 \Rightarrow k = 1\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$  Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$8 + 1\lambda = 7 + 5\sigma \quad / - 8 \quad / - 5\sigma$$

$$4 + 3\lambda = 7 + 1\sigma \quad / - 4 \quad / - 1\sigma$$

$$2 + 7\lambda = 8 + 4\sigma \quad / - 2 \quad / - 4\sigma$$

$$I \quad 1\lambda - 5\sigma = -1$$

$$II \quad 3\lambda - 1\sigma = 3$$

$$III \quad 7\lambda + 4\sigma = 6$$

Aus 2 Gleichungen  $\lambda$  und  $\sigma$  berechnen

$$I \quad 1\lambda - 5\sigma = -1 \quad / \cdot 3$$

$$II \quad 3\lambda - 1\sigma = 3 \quad / \cdot (-1)$$

$$I \quad 3\lambda - 15\sigma = -3$$

$$II \quad -3\lambda + 1\sigma = -3$$

I + II

$$I \quad 3\lambda - 3\lambda - 15\sigma + 1\sigma = -3 - 3$$

$$-14\sigma = -6 \quad / : (-14)$$

$$\sigma = \frac{-6}{-14}$$

$$\sigma = \frac{3}{7}$$

$\sigma$  in I

$$I \quad 3\lambda - 15 \cdot \frac{3}{7} = -3$$

$$3\lambda - 6\frac{3}{7} = -3 \quad / + 6\frac{3}{7}$$

$$3\lambda = -3 + 6\frac{3}{7}$$

$$3\lambda = 3\frac{3}{7} \quad / : 3$$

$$\lambda = \frac{3\frac{3}{7}}{3}$$

$$\lambda = 1\frac{1}{7}$$

$\lambda$  und  $\sigma$  in die verbleibende Gleichung einsetzen

$$III \quad 2 + 1\frac{1}{7} \cdot 7 = 8 + \frac{3}{7} \cdot 4$$

$$10 = 9\frac{5}{7}$$

Geraden sind windschief

## Aufgabe (10)

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2 = +4k \quad / : 4 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$6 = +8k \quad / : 8 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

$$6 = +4k \quad / : 4 \Rightarrow k = 1\frac{1}{2}$$

 $\Rightarrow$  Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$1 + 2\lambda = 3 + 4\sigma \quad / -1 \quad / -4\sigma$$

$$5 + 6\lambda = 7 + 8\sigma \quad / -5 \quad / -8\sigma$$

$$7 + 6\lambda = 5 + 4\sigma \quad / -7 \quad / -4\sigma$$

$$I \quad 2\lambda - 4\sigma = 2$$

$$II \quad 6\lambda - 8\sigma = 2$$

$$III \quad 6\lambda + 4\sigma = -2$$

Aus 2 Gleichungen  $\lambda$  und  $\sigma$  berechnen

$$I \quad 2\lambda - 4\sigma = 2 \quad / \cdot 3$$

$$II \quad 6\lambda - 8\sigma = 2 \quad / \cdot (-1)$$

$$I \quad 6\lambda - 12\sigma = 6$$

$$II \quad -6\lambda + 8\sigma = -2$$

I + II

$$I \quad 6\lambda - 6\lambda - 12\sigma + 8\sigma = 6 - 2$$

$$-4\sigma = 4 \quad / : (-4)$$

$$\sigma = \frac{4}{-4}$$

$$\sigma = -1$$

 $\sigma$  in I

$$I \quad 6\lambda - 12 \cdot (-1) = 6$$

$$6\lambda + 12 = 6 \quad / -12$$

$$6\lambda = 6 - 12$$

$$6\lambda = -6 \quad / : 6$$

$$\lambda = \frac{-6}{6}$$

$$\lambda = -1$$

 $\lambda$  und  $\sigma$  in die verbleibende Gleichung einsetzen

$$III \quad 7 - 1 \cdot 6 = 5 - 1 \cdot 4$$

$$1 = 1$$

 $\lambda$  oder  $\sigma$  in die Geradengleichung einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt:  $S(-1, -1, 1)$

## Aufgabe (11)

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3 &= +3k & /: 3 &\Rightarrow k = 1 \\ -4 &= -7k & /: -7 &\Rightarrow k = \frac{4}{7} \\ 2 &= +1k & /: 1 &\Rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

 $\Rightarrow$  Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + 3\lambda &= 1 + 3\sigma & / -1 & / -3\sigma \\ -1 - 4\lambda &= -1 - 7\sigma & / +1 & / +7\sigma \\ 2 + 2\lambda &= 2 + 1\sigma & / -2 & / -1\sigma \end{aligned}$$

$$I \quad 3\lambda - 3\sigma = 0$$

$$II \quad -4\lambda + 7\sigma = 0$$

$$III \quad 2\lambda + 1\sigma = 0$$

Aus 2 Gleichungen  $\lambda$  und  $\sigma$  berechnen

$$I \quad 3\lambda - 3\sigma = 0 \quad / \cdot (-4)$$

$$II \quad -4\lambda + 7\sigma = 0 \quad / \cdot (-3)$$

$$I \quad -12\lambda + 12\sigma = 0$$

$$II \quad 12\lambda - 21\sigma = 0$$

I + II

$$I \quad -12\lambda + 12\lambda + 12\sigma - 21\sigma = 0 + 0$$

$$-9\sigma = 0 \quad /: (-9)$$

$$\sigma = \frac{0}{-9}$$

$$\sigma = 0$$

 $\sigma$  in I

$$I \quad -12\lambda + 12 \cdot 0 = 0$$

$$-12\lambda + 0 = 0 \quad / -0$$

$$-12\lambda = 0 - 0$$

$$-12\lambda = 0 \quad /: (-12)$$

$$\lambda = \frac{0}{-12}$$

$$\lambda = 0$$

 $\lambda$  und  $\sigma$  in die verbleibende Gleichung einsetzen

$$III \quad 2 + 0 \cdot 2 = 2 + 0 \cdot 1$$

$$2 = 2$$

 $\lambda$  oder  $\sigma$  in die Geradengleichung einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt:  $S(1, -1, 2)$ 

## Aufgabe (12)



$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2 = -4k \quad / : -4 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$-3 = +6k \quad / : 6 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$1 = +2k \quad / : 2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$  Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$1 + 2\lambda = 4 - 4\sigma \quad / -1 \quad / + 4\sigma$$

$$0 - 3\lambda = -4 + 6\sigma \quad / -0 \quad / -6\sigma$$

$$3 + 1\lambda = -2 + 2\sigma \quad / -3 \quad / -2\sigma$$

$$I \quad 2\lambda + 4\sigma = 3$$

$$II \quad -3\lambda - 6\sigma = -4$$

$$III \quad 1\lambda + 2\sigma = -5$$

Aus 2 Gleichungen  $\lambda$  und  $\sigma$  berechnen

$$I \quad 2\lambda + 4\sigma = 3 \quad / \cdot (-3)$$

$$II \quad -3\lambda - 6\sigma = -4 \quad / \cdot (-2)$$

$$I \quad -6\lambda - 12\sigma = -9$$

$$II \quad 6\lambda + 12\sigma = 8$$

I + II

$$I \quad -6\lambda + 6\lambda - 12\sigma + 12\sigma = -9 + 8$$

$$0\sigma = -1 \quad / : 0$$

$$\sigma = \frac{-1}{0}$$

$$\sigma = -\infty$$

$\sigma$  in I

$$I \quad -6\lambda - 12 \cdot (-\infty) = -9$$

$$-6\lambda + \infty = -9 \quad / -\infty$$

$$-6\lambda = -9 - \infty$$

$$-6\lambda = -\infty \quad / : (-6)$$

$$\lambda = \frac{-\infty}{-6}$$

$$\lambda = \infty$$

$\lambda$  und  $\sigma$  in die verbleibende Gleichung einsetzen

$$III \quad 3 + \infty \cdot 1 = -2 - \infty \cdot 2$$

$$\infty = -\infty$$

Geraden sind windschief

Aufgabe (13)

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & -4k \quad / : -4 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \\ -3 & = & +6k \quad / : 6 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \\ 1 & = & -2k \quad / : -2 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \end{array}$$

⇒ Geraden sind parallel

Aufpunkt von Gerade 2 in Gerade 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt: A(4/-4/-2)

$$\begin{array}{rcl} 4 & = & 1 + 2\lambda \quad / -1 \\ -4 & = & 0 - 3\lambda \quad / -0 \\ -2 & = & 3 + 1\lambda \quad / -3 \\ 3 & = & 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = 1\frac{1}{2} \\ -4 & = & -3\lambda \quad / : -3 \Rightarrow \lambda = 1\frac{1}{3} \\ -5 & = & 1\lambda \quad / : 1 \Rightarrow \lambda = -5 \end{array}$$

⇒

Geraden sind echt parallel

Aufgabe (14)

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & +4k \quad / : 4 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \\ 0 & = & +0k \quad / : 0 \Rightarrow k = \text{NaN} \\ -1 & = & -2k \quad / : -2 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \end{array}$$

⇒ Geraden sind parallel

Aufpunkt von Gerade 2 in Gerade 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

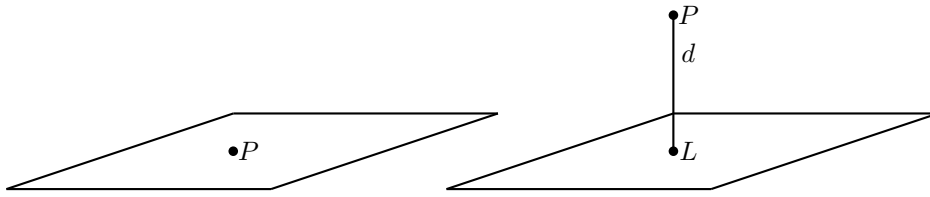
Punkt: A(3/4/5)

$$\begin{array}{rcl} 3 & = & 1 + 2\lambda \quad / -1 \\ 4 & = & 3 + 0\lambda \quad / -3 \\ 5 & = & 0 - 1\lambda \quad / -0 \\ 2 & = & 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = 1 \\ 1 & = & 0\lambda \quad / : 0 \Rightarrow \lambda = \infty \\ 5 & = & -1\lambda \quad / : -1 \Rightarrow \lambda = -5 \end{array}$$

⇒

Geraden sind echt parallel

## 12 Punkt - Ebene (Koordinatenform)



Punkt liegt in der Ebene

Punkt liegt nicht in der Ebene

Punkt:  $A(a_1/a_2/a_3)$

Ebene:  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

$n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 + c_1 = 0$

- Liegt der Punkt in der Ebene?

Punkt in die Ebene einsetzen.

Gleichung nach Umformung:  $0 = 0 \Rightarrow$  Punkt liegt in der Ebene

- Abstand Punkt - Ebene

Punkt in die HNF einsetzen.

Punkt:  $A(1/2/0)$

Ebene:  $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$

$-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 7 = 0$

$0 = 0$

Punkt liegt in der Ebene

Punkt:  $A(2/-4/3)$

Ebene:  $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$

$-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7 = 0$

$20 = 0$

Punkt liegt nicht in der Ebene

Abstand des Punktes von der Ebene

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors:

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2}$$

$$|\vec{n}| = 3,32$$

HNF:

$$\frac{-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7}{-3,32} = 0$$

Punkt in HNF:

$$d = \left| \frac{-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7}{-3,32} \right|$$

$$d = |-6,03|$$

$$d = 6,03$$

### 12.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Punkt:  $A(a_1/a_2/a_3)$

Ebene:  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

Gesucht:

Lagebeziehung Punkt - Ebene

(1) Punkt:  $A(1/1/-2)$   
Ebene:  $7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2 = 0$

(2) Punkt:  $A(2/-2/1)$   
Ebene:  $6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1 = 0$

(3) Punkt:  $A(2/4/6)$   
Ebene:  $7x_1 + 8x_2 + 9x_3 - 7 = 0$

(4) Punkt:  $A(1/2/0)$   
Ebene:  $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 - 6 = 0$

(5) Punkt:  $A(4/5/4)$   
Ebene:  $6x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5 = 0$

(6) Punkt:  $A(3/-2/2)$   
Ebene:  $1x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 1 = 0$

(7) Punkt:  $A(1/3/-1)$   
Ebene:  $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1 = 0$

(8) Punkt:  $A(4/5/6)$   
Ebene:  $7x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9 = 0$

(9) Punkt:  $A(1/2/3)$   
Ebene:  $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$

## 12.2 Lösungen

Aufgabe (1)

Punkt:  $A(1/1/-2)$   
 Ebene:  $7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2 = 0$   
 $7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) + 2 = 0$   
 $0 = 0$   
 Punkt liegt in der Ebene

HNF:  
 $\frac{7x_1 + 8x_2 + 9x_3 - 7}{13,9} = 0$   
 Punkt in HNF:  
 $d = \left| \frac{7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 6 - 7}{13,9} \right|$   
 $d = |6,68|$   
 $d = 6,68$

Aufgabe (2)

Punkt:  $A(2/-2/1)$   
 Ebene:  $6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1 = 0$   
 $6 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 + 1 = 0$   
 $12 = 0$   
 Punkt liegt nicht in der Ebene  
 Abstand des Punktes von der Ebene  
 Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF  
 $6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1 = 0$   
 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$   
 Länge des Normalenvektors  
 $|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$   
 $|\vec{n}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 5^2}$   
 $|\vec{n}| = 8,37$   
 HNF:  
 $\frac{6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1}{-8,37} = 0$   
 Punkt in HNF:  
 $d = \left| \frac{6 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 + 1}{-8,37} \right|$   
 $d = |-1,43|$   
 $d = 1,43$

Aufgabe (3)

Punkt:  $A(2/4/6)$   
 Ebene:  $7x_1 + 8x_2 + 9x_3 - 7 = 0$   
 $7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 6 - 7 = 0$   
 $93 = 0$   
 Punkt liegt nicht in der Ebene  
 Abstand des Punktes von der Ebene  
 Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF  
 $7x_1 + 8x_2 + 9x_3 - 7 = 0$   
 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$   
 Länge des Normalenvektors  
 $|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$   
 $|\vec{n}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + 9^2}$   
 $|\vec{n}| = 13,9$

Aufgabe (4)

Punkt:  $A(1/2/0)$   
 Ebene:  $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 - 6 = 0$   
 $-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 6 = 0$   
 $-13 = 0$   
 Punkt liegt nicht in der Ebene  
 Abstand des Punktes von der Ebene  
 Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF  
 $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 - 6 = 0$   
 $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 Länge des Normalenvektors  
 $|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$   
 $|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2}$   
 $|\vec{n}| = 3,32$   
 HNF:  
 $\frac{-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 - 6}{3,32} = 0$   
 Punkt in HNF:  
 $d = \left| \frac{-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 6}{3,32} \right|$   
 $d = |-3,92|$   
 $d = 3,92$

Aufgabe (5)

Punkt:  $A(4/5/4)$   
 Ebene:  $6x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5 = 0$   
 $6 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 5 = 0$   
 $88 = 0$   
 Punkt liegt nicht in der Ebene  
 Abstand des Punktes von der Ebene  
 Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF  
 $6x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5 = 0$   
 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$   
 Länge des Normalenvektors  
 $|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$   
 $|\vec{n}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + 6^2}$   
 $|\vec{n}| = 11$   
 HNF:

$$\frac{6x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5}{-11} = 0$$

$$\text{Punkt in HNF: } d = \left| \frac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 5}{-11} \right|$$

$$d = |-8|$$

$$d = 8$$

Aufgabe (6)

$$\text{Punkt: } A(3/-2/2)$$

$$\text{Ebene: } 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 1 = 0$$

$$1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + 1 = 0$$

$$10 = 0$$

Punkt liegt nicht in der Ebene

Abstand des Punktes von der Ebene

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$1x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 1 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

$$|\vec{n}| = 2,45$$

HNF:

$$\frac{1x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 1}{-2,45} = 0$$

Punkt in HNF:

$$d = \left| \frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + 1}{-2,45} \right|$$

$$d = |-4,08|$$

$$d = 4,08$$

Aufgabe (7)

$$\text{Punkt: } A(1/3/-1)$$

$$\text{Ebene: } 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1 = 0$$

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 1 = 0$$

$$7 = 0$$

Punkt liegt nicht in der Ebene

Abstand des Punktes von der Ebene

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2}$$

$$|\vec{n}| = 4,69$$

HNF:

$$\frac{3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1}{-4,69} = 0$$

Punkt in HNF:

$$d = \left| \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 1}{-4,69} \right|$$

$$d = |-1,49|$$

$$d = 1,49$$

Aufgabe (8)

$$\text{Punkt: } A(4/5/6)$$

$$\text{Ebene: } 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9 = 0$$

$$7 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 9 = 0$$

$$120 = 0$$

Punkt liegt nicht in der Ebene

Abstand des Punktes von der Ebene

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$7x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{7^2 + 7^2 + 8^2}$$

$$|\vec{n}| = 12,7$$

HNF:

$$\frac{7x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9}{-12,7} = 0$$

Punkt in HNF:

$$d = \left| \frac{7 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 9}{-12,7} \right|$$

$$d = |-9,43|$$

$$d = 9,43$$

Aufgabe (9)

$$\text{Punkt: } A(1/2/3)$$

$$\text{Ebene: } -1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$$

$$-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 7 = 0$$

$$3 = 0$$

Punkt liegt nicht in der Ebene

Abstand des Punktes von der Ebene

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$$-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2}$$

$$|\vec{n}| = 3,32$$

HNF:

$$\frac{-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7}{-3,32} = 0$$

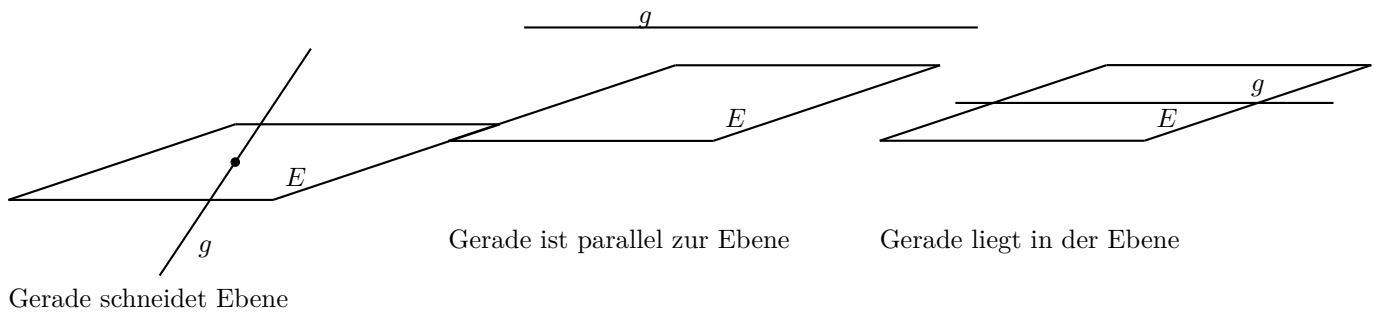
Punkt in HNF:

$$d = \left| \frac{-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 7}{-3,32} \right|$$

$$d = |-0,905|$$

$$d = 0,905$$

## 13 Gerade - Ebene (Koordinatenform)



$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$$

Gerade1 in Punktdarstellung

$$x_1 = a_1 + b_1\lambda$$

$$x_2 = a_2 + b_2\lambda$$

$$x_3 = a_3 + b_3\lambda$$

$x_1, x_2, x_3$  in die Ebenengleichung einsetzen

$$n_1(a_1 + b_1\lambda) + n_2(a_2 + b_2\lambda) + n_3(a_3 + b_3\lambda) + c_1 = 0$$

Die Gleichung nach der Variablen auflösen.

- Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. Variable in die Gerade einsetzen

- Geraden und Ebene sind parallel

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich.  $\lambda$  heben sich auf.

Gleichung nach Umformung: *Konstante* = 0

- Gerade liegt in der Ebene

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich.  $\lambda$  heben sich auf.

Gleichung nach Umformung: 0 = 0

$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 1x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 10 = 0$$

$$x_1 = 3 + 4\lambda$$

$$x_2 = 5 + 5\lambda$$

$$x_3 = 7 + 5\lambda$$

$$1(3 + 4\lambda) - 2(5 + 5\lambda) + 5(7 + 5\lambda) + 10 = 0$$

$$19\lambda + 38 = 0$$

$$\lambda = \frac{-38}{19}$$

$$\lambda = -2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittpunkt: } S(-5, -5, -3)$$

### 13.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$$

Gesucht:

Lage der Geraden zur Ebene.

$$(1) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 7x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 8 = 0$$

$$(2) \quad \text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 1x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 8 = 0$$

keine Aufgaben



## 13.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 7x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 8 = 0$$

$$x_1 = 6 + 1\lambda$$

$$x_2 = 1 + 6\lambda$$

$$x_3 = 2 + 8\lambda$$

$$7(6 + 1\lambda) + 1(1 + 6\lambda) + 4(2 + 8\lambda) + 8 = 0$$

$$45\lambda + 59 = 0$$

$$\lambda = \frac{-59}{45}$$

$$\lambda = -1\frac{14}{45}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1\frac{14}{45} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittpunkt: } S\left(4\frac{31}{45}, -6\frac{13}{15}, -8\frac{22}{45}\right)$$

Aufgabe (2)

$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 1x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 8 = 0$$

$$x_1 = 9 + 5\lambda$$

$$x_2 = 3 + 2\lambda$$

$$x_3 = 5 + 4\lambda$$

$$1(9 + 5\lambda) + 9(3 + 2\lambda) + 3(5 + 4\lambda) + 8 = 0$$

$$35\lambda + 59 = 0$$

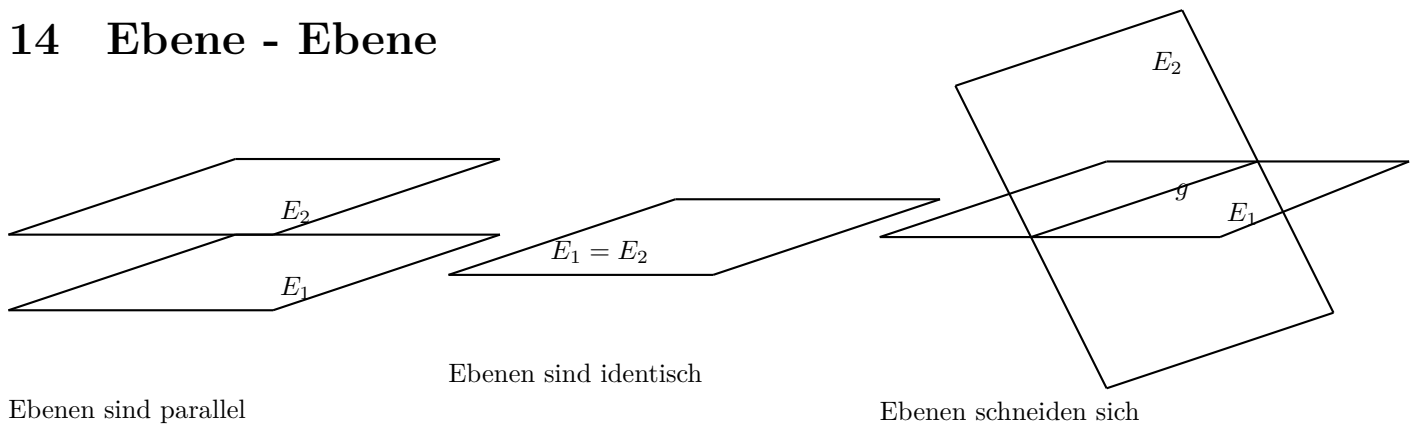
$$\lambda = \frac{-59}{35}$$

$$\lambda = -1\frac{24}{35}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 1\frac{24}{35} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittpunkt: } S\left(\frac{4}{7}, -\frac{13}{35}, -1\frac{26}{35}\right)$$

# 14 Ebene - Ebene



Ebenen sind parallel

Ebenen sind identisch

Ebenen schneiden sich

## Parameterform - Koordinatenform

Parameterform - Ebene1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform - Ebene2

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$$

Ebene1 in Punktdarstellung

$$x_1 = a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma$$

$$x_2 = a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma$$

$$x_3 = a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma$$

 $x_1, x_2, x_3$  in die Ebenengleichung einsetzen

$$n_1(a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma) +$$

$$n_2(a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma) +$$

$$n_3(a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma) + k_1 = 0$$

Die Gleichung nach einer Variablen auflösen

- Schnittgerade zwischen den Ebenen

Auflösung nach einer Variablen ist möglich.  $\lambda$  oder  $\sigma$  in die Parameterform einsetzen

- Ebenen sind parallel

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich.  $\lambda$  und  $\sigma$  heben sich aufGleichung nach Umformung: *Konstante* = 0

- Ebenen sind identisch

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich.  $\lambda$  und  $\sigma$  heben sich aufGleichung nach Umformung:  $0 = 0$ 

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0 = 0$$

$$x_1 = -2 + 1\lambda + 0\sigma$$

$$x_2 = -4 + 2\lambda - 1\sigma$$

$$x_3 = 2 + 2\lambda - 1\sigma$$

$$1(-2 + 1\lambda + 0\sigma) + 1(-4 + 2\lambda - 1\sigma) + 0(2 + 2\lambda - 2\sigma) + 0 = 0$$

$$3\lambda - 1\sigma - 6 = 0$$

$$\sigma = \frac{-3\lambda + 6}{-1}$$

$$\sigma = 3\lambda - 6$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (3\lambda - 6) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

## Parameterform - Parameterform

Eine Ebene in die Koordinatenform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

**Koordinatenform - Koordinatenform**

Eine Ebene in die Parameterform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

**14.1 Aufgaben**

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

$$\text{Ebene1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene2: } n1x_1 + n2x_2 + n3x_3 + k1 = 0$$

Gesucht:

Lage der Ebenen zueinander

$$(1) \quad \text{Ebene1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene2: } 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1 = 0$$

$$(2) \quad \text{Ebene1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene2: } 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 7 = 0$$

$$(3) \quad \text{Ebene1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene2: } 5x_1 + 0x_2 + 6x_3 + 5 = 0$$

$$(4) \quad \text{Ebene1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene2: } 5x_1 - 4x_2 - 13x_3 + 28 = 0$$

$$(5) \quad \text{Ebene1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene2: } -5x_1 + 4x_2 - 13x_3 - 28 = 0$$

$$(6) \quad \text{Ebene1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene2: } -5x_1 + 4x_2 - 13x_3 - 28 = 0$$

$$(7) \quad \text{Ebene1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene2: } 1x_1 + 1x_2 - 4x_3 + 4 = 0$$

$$(8) \quad \text{Ebene1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene2: } 1x_1 + 1x_2 - 4x_3 + 7 = 0$$

$$(9) \quad \text{Ebene1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene2: } 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0 = 0$$

## 14.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1 = 0$$

$$x_1 = 1 + 1\lambda + 5\sigma$$

$$x_2 = 9 + 4\lambda + 9\sigma$$

$$x_3 = 5 + 5\lambda + 9\sigma$$

$$4(1 + 1\lambda + 5\sigma) + 3(9 + 4\lambda + 9\sigma) + 4(5 + 5\lambda + 9\sigma) + 1 = 0$$

$$36\lambda + 83\sigma + 52 = 0$$

$$\sigma = \frac{-36\lambda - 52}{83}$$

$$\sigma = -\frac{36}{83}\lambda - \frac{52}{83}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(-\frac{36}{83}\lambda - \frac{52}{83}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2\frac{11}{83} \\ 3\frac{30}{83} \\ -\frac{53}{83} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1\frac{14}{83} \\ \frac{8}{83} \\ 1\frac{8}{83} \end{pmatrix}$$

Aufgabe (2)

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 7 = 0$$

$$x_1 = 4 + 5\lambda + 8\sigma$$

$$x_2 = 4 + 4\lambda + 9\sigma$$

$$x_3 = 9 + 5\lambda + 9\sigma$$

$$2(4 + 5\lambda + 8\sigma) + 3(4 + 4\lambda + 9\sigma) + 7(9 + 5\lambda + 9\sigma) + 7 = 0$$

$$57\lambda + 92\sigma + 90 = 0$$

$$\sigma = \frac{-57\lambda - 90}{92}$$

$$\sigma = -\frac{57}{92}\lambda - \frac{45}{46}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(-\frac{57}{92}\lambda - \frac{45}{46}\right) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -3\frac{19}{92} \\ -4\frac{37}{46} \\ 2\frac{7}{46} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{23} \\ -1\frac{33}{92} \\ \frac{61}{92} \end{pmatrix}$$

Aufgabe (3)

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 5x_1 + 0x_2 + 6x_3 + 5 = 0$$

$$x_1 = 3 + 4\lambda + 5\sigma$$

$$x_2 = 6 + 0\lambda + 0\sigma$$

$$x_3 = 0 + 6\lambda + 0\sigma$$

$$5(3 + 4\lambda + 5\sigma) + 0(6 + 0\lambda + 0\sigma) + 6(0 + 6\lambda + 0\sigma) + 5 = 0$$

$$56\lambda + 25\sigma + 20 = 0$$

$$\sigma = \frac{-56\lambda - 20}{25}$$

$$\sigma = -2\frac{6}{25}\lambda - \frac{4}{5}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \left(-2\frac{6}{25}\lambda - \frac{4}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7\frac{1}{5} \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (4)

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 5x_1 - 4x_2 - 13x_3 + 28 = 0$$

$$x_1 = 2 + 1\lambda + 5\sigma$$

$$x_2 = 3 - 2\lambda + 3\sigma$$

$$x_3 = 2 + 1\lambda + 3\sigma$$

$$5(2 + 1\lambda + 5\sigma) - 4(3 - 2\lambda + 3\sigma) - 13(2 + 1\lambda + 3\sigma) + 28 = 0$$

$$0\lambda + 0\sigma + 0 = 0$$

$$0 = 0$$

Ebenen sind identisch

Aufgabe (5)

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } -5x_1 + 4x_2 - 13x_3 - 28 = 0$$

$$x_1 = 2 + 1\lambda + 5\sigma$$

$$x_2 = 3 - 2\lambda + 3\sigma$$

$$x_3 = 2 + 1\lambda + 3\sigma$$

$$-5(2 + 1\lambda + 5\sigma) + 4(3 - 2\lambda + 3\sigma) - 13(2 + 1\lambda + 3\sigma) - 28 = 0$$

$$-26\lambda - 26\sigma - 52 = 0$$

$$\sigma = \frac{+26\lambda + 52}{-26}$$

$$\sigma = -1\lambda - 2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1\lambda - 2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (6)

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } -5x_1 + 4x_2 - 13x_3 - 28 = 0$$

$$x_1 = 2 + 1\lambda + 5\sigma$$

$$x_2 = 3 - 2\lambda + 3\sigma$$

$$x_3 = 2 + 1\lambda + 3\sigma$$

$$-5(2 + 1\lambda + 5\sigma) + 4(3 - 2\lambda + 3\sigma) - 13(2 + 1\lambda + 3\sigma) - 28 = 0$$

$$-26\lambda - 26\sigma - 52 = 0$$

$$\sigma = \frac{+26\lambda + 52}{-26}$$

$$\sigma = -1\lambda - 2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1\lambda - 2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (7)

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 1x_1 + 1x_2 - 4x_3 + 4 = 0$$

$$x_1 = 1 + 0\lambda - 2\sigma$$

$$x_2 = 4 + 4\lambda + 0\sigma$$

$$x_3 = 3 + 1\lambda + 0\sigma$$

$$1(1 + 0\lambda - 2\sigma) + 1(4 + 4\lambda + 0\sigma) - 4(3 + 1\lambda - \frac{1}{2}\sigma) + 4 = 0$$

$$0\lambda + 0\sigma - 3 = 0$$

$$-3 = 0$$

Ebenen sind parallel

Aufgabe (8)

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 1x_1 + 1x_2 - 4x_3 + 7 = 0$$

$$x_1 = 1 + 0\lambda - 2\sigma$$

$$x_2 = 4 + 4\lambda + 0\sigma$$

$$x_3 = 3 + 1\lambda + 0\sigma$$

$$1(1 + 0\lambda - 2\sigma) + 1(4 + 4\lambda + 0\sigma) - 4(3 + 1\lambda - \frac{1}{2}\sigma) + 7 = 0$$

$$0\lambda + 0\sigma + 0 = 0$$

$$0 = 0$$

Ebenen sind identisch

Aufgabe (9)

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0 = 0$$

$$x_1 = -2 + 1\lambda + 0\sigma$$

$$x_2 = -4 + 2\lambda - 1\sigma$$

$$x_3 = 2 + 2\lambda - 1\sigma$$

$$1(-2 + 1\lambda + 0\sigma) + 1(-4 + 2\lambda - 1\sigma) + 0(2 + 2\lambda - 2\sigma) + 0 = 0$$

$$3\lambda - 1\sigma - 6 = 0$$

$$\sigma = \frac{-3\lambda + 6}{-1}$$

$$\sigma = 3\lambda - 6$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (3\lambda - 6) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$