Formelsammlung Analysis

http://www.fersch.de

©Klemens Fersch

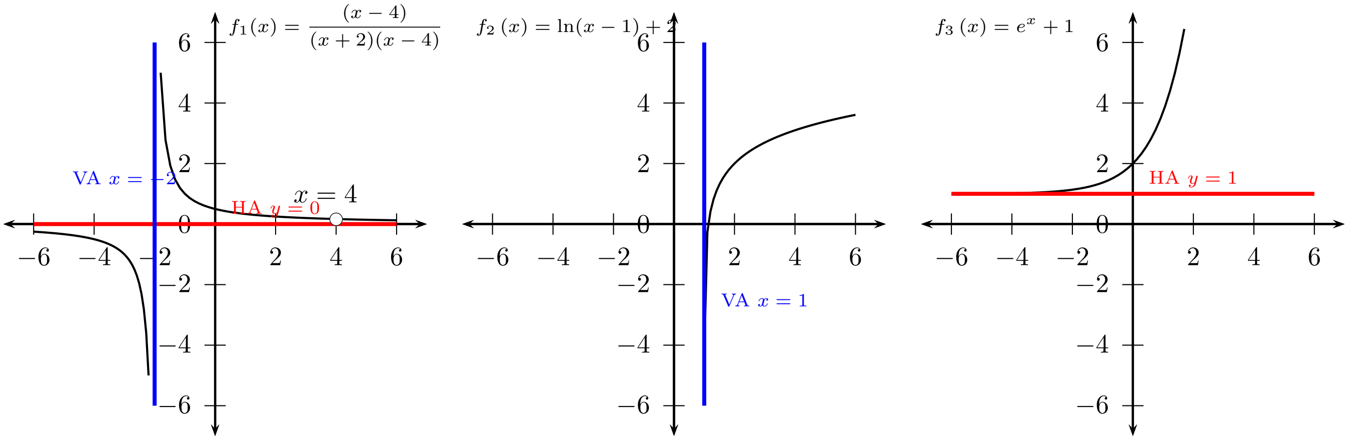
1. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

4 Analysis

4.1 Grenzwert - Stetigkeit

4.1.1 Grenzwert von f(x) für x gegen x0



• Linksseitiger Grenzwert (LGW) von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$ oder $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = a$

• Rechtsseitiger Grenzwert (RGW) von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$ oder $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = a$

• Grenzwert von f(x) existiert

linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

• Linksseitiger Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

• Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

$\Rightarrow$ vertikale Asymptote - Polstelle an der Stelle $x = x_0$

$f_1(x) = \dfrac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$

Linksseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen 4

$x \to 4^-$	$f(x) \to \frac{1}{6}$
$3,99$	$0,166945$
$3,999$	$0,166694$
$3,9999$	$0,166669$
$3,99999$	$0,166667$

$\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$

$\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen 4

$x \to 4^+$	$f(x) \to \frac{1}{6}$
$4,01$	$0,166389$
$4,001$	$0,166639$
$4,0001$	$0,166664$
$4,00001$	$0,166666$

$\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$

$\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \dfrac{1}{6} \Rightarrow$ Stetig behebbare Definitionslücke

Linksseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen -2

$x \to -2^-$	$f(x) \to -\infty$
$-2,01$	-100
$-2,001$	-1000
$-2,0001$	-10000
$-2,00001$	$-99999,999999$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{(x+2)} = -\infty$

Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen -2

$x \to -2^+$	$f(x) \to \infty$
$-1,99$	100
$-1,999$	1000
$-1,9999$	10000
$-1,99999$	$99999,999999$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{(x+2)} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) + 2 = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 1$

Interaktive Inhalte:

Grenzwerte

4.1.2 Grenzwert von f(x) für x gegen Unendlich

• Grenzwert von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$

$\Rightarrow$ horizontale Asymptote $y = a$

• Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Funktion:

$f(x) = -x^3$

Grenzwert von f(x) für x gegen ∞ und gegen -∞

$x\to\infty$	$f(x)\to-\infty$
10	-1000
100	-1000000
1000	-1000000000
10000	-1000000000000

$x\to-\infty$	$f(x)\to\infty$
-10	1000
-100	1000000
-1000	1000000000
-10000	1000000000000

$\lim\limits_{x\to\infty} -x^3 = [-1\cdot\infty^3] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} -x^3 = [-1\cdot(-\infty)^3] = \infty$

$f(x) = \dfrac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{-2;4\}$

Grenzwert von f(x) für x gegen ∞ und gegen -∞

$x\to\infty$	$f(x)\to 0$
10	$0,083333$
100	$0,009804$
1000	$0,000998$
10000	$0,0001$
100000	$0,00001$

$x\to-\infty$	$f(x)\to 0$
-10	$-0,125$
-100	$-0,010204$
-1000	$-0,001002$
-10000	$-0,0001$
-100000	$-0,00001$

$$f_1(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x-4}{x^2-2x-4} = \frac{x(1-\frac{4}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2})}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(1-\frac{4}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2})} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$f_2(x) = \ln(x-1)+2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x-1)+2 = \infty$

$f_3(x) = e^x + 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x+1 = \infty$

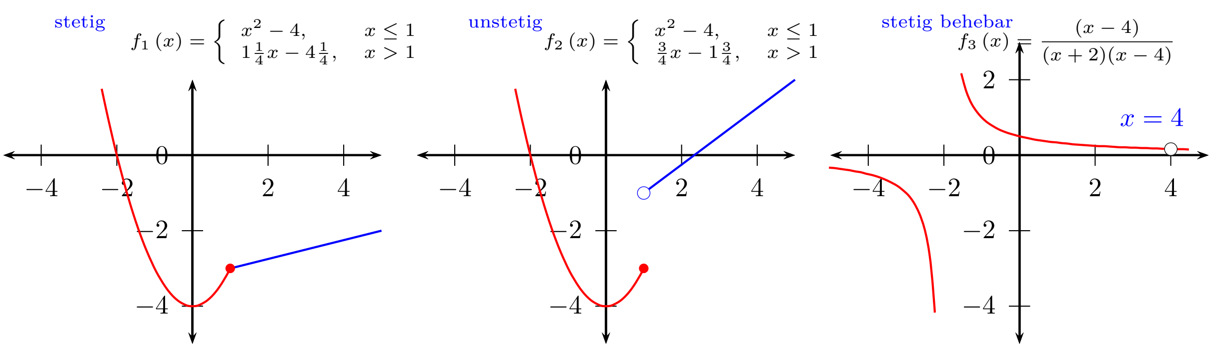
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1 = 1$

Horizontale Asymptote: $y = 1$

Interaktive Inhalte:

Grenzwerte

4.1.3 Stetigkeit



• Ein Funktion ist an der Stelle x_0 stetig, wenn der linksseitiger GW = rechtsseitiger GW = Funktionswert f(x)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

• Stetige Funktionen

- Ganzrationale Funktionen
- Exponentialfunktionen
- Sinus- und Kosinusfunktion

• Stetige Funktionen, bei denen die Unstetigkeitsstellen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen sind:

- Gebrochenrationale Funktionen
- Logarithmusfunktionen
- Tangensfunktion

• Abschnittsweise definierte Funktionen müssen an den Schnittstellen auf Stetigkeit untersucht werden.

• Stetig behebbare Definitionslücke x_0

- linksseitiger GW = rechtsseitiger GW

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

$f_1(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1 \\ 1\frac{1}{4}x - 4\frac{1}{4}, & x > 1 \end{cases}$

LGW: $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 4 = -3$

RGW: $\lim\limits_{x \to 1^+} 1\frac{1}{4}x - 4\frac{1}{4} = -3$

FW: $f_1(1) = 1^2 - 4 = -3$

LGW = RGW = FW $\Rightarrow$

ist stetig an der Stelle $x_0 = 1$

$f_2(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1 \\ \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}, & x > 1 \end{cases}$

LGW: $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 4 = -3$

RGW: $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4} = -1$

FW: $f_1(1) = 1^2 - 4 = -3$

LGW $\neq$ RGW $\neq$ FW $\Rightarrow$

ist unstetig an der Stelle $x_0 = 1$

$f_3(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{1}{(x+2)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$

$f_3(x)$ stetig in D

RGW: $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

LGW: $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

$RGW = LGW$

$\Rightarrow$ stetig behebbare Definitionslücke: $x_0 = 4$

Stetige Fortsetzung von $f_2(x)$

$f_4(x) = \frac{1}{(x+2)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Interaktive Inhalte:

Grenzwerte

4.1.4 Rechenregeln

Wichtige Grenzwerte

$\lim\limits_{x \to 0} a \cdot x = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{x} = \infty$
$\lim\limits_{x \to \infty} a \cdot x = \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} 4 \cdot x = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{x} = \infty$
$\lim\limits_{x \to \infty} 7 \cdot x = \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-3}{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to \infty} 2e^x = \infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} -3e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} 3\ln x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} 6\ln x = \infty$

Rechenregeln

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f \qquad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f + g$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f - g$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f \cdot g$

$g(x) \neq 0 \qquad \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f}{g}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{x(1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2})} = 0$

Zähler:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} 1 - 0 = 1$

Nenner:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{8}{x^2} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} x(1 - 0 - 0) = \infty$

Zähler durch Nenner: $\frac{1}{\infty} = 0$

Unbestimmte Ausdrücke

Typ 1: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ Typ 2: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Regel von L'Hospital
Zähler und Nenner getrennt ableiten, bis man den Grenzwert berechnen kann.
$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)} ...$

Typ 3: $\lim f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \pm\infty$
- Umformen in Typ 1 oder 2 und danach L'Hospital anwenden

Typ 4: $\lim (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$
- Brüche auf gemeinsamen Hauptnenner bringen
- Faktorisieren

Typ 1: $\frac{0}{0}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$
Typ 2: $\frac{\infty}{\infty}$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2 \cdot x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$

Typ 3: $\infty \cdot 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x = 0$
Typ 4: $\infty - \infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 - x = \lim\limits_{x\to\infty} x(x-1) = \infty$
$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-x}{x^2} = \infty$

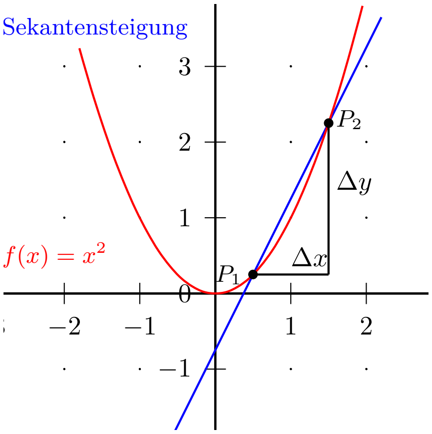
Wichtige unbestimmte Ausdrücke

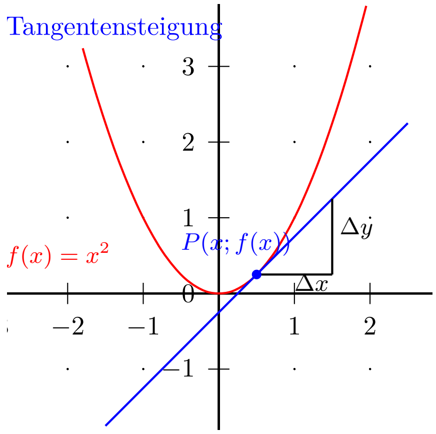
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x^5}{e^x} = 0 \quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3}{\ln x} = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4\ln x}{x} = 0$

4.2 Differentialrechnung

4.2.1 Definition





Sekantensteigung

Eine Gerade schneidet eine Funktion in den Punkten $P_1(x_0; f(x_0))$ und $P_2(x; f(x))$.

Steigung der Sekante an der Stelle x_0

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$\Delta x = h \qquad x = x_0 + h$

$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Sekantensteigung = Differenzenquotient = Mittlere Änderungsrate

Für kleine h ist die Sekantensteigung ≈ Tangentensteigung

$m \approx f'(x_0)$

$f(x) = x^2$

Die Sekantensteigung m durch die Punkte

$P_1(0.5; 0,25) \qquad P_2(1,5; 2,25)$

$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$m = \frac{2,25 - 0,25}{1,5 - 0,5} = 2$

Die Sekantensteigung m an der Stelle $x_0 = 0,5$ und $h = 1$

$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$m = \frac{f(0,5 + 1) - f(0,5)}{1}$

$m = \frac{2.25 - 0,25}{1} = 2$

Die Sekantensteigung m an der Stelle $x_0 = 0,25$ und $h = 0,001$

$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$m = \frac{f(0,5 + 0,001) - f(0,5)}{0,001}$

$m = \frac{0,251001 - 0,25}{0,001} = 1,001$

$m \approx f'(0,5) = 1$

1. Ableitung - Differentialqoutient

Die Ableitung von $f(x)$ ist die Steigung des Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.

$f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$x = x_0 + h$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

1. Ableitung = Steigung der Tangente = Steigung der Funktion f(x)=lokale (momentane) Änderungsrate

Die Ableitung von $f(x)$ an einer beliebigen Stelle x

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

Die 1. Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 0,5$

$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(0,5 + h)^2 - 0,5^2}{h}$

$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{0,25 + h + h^2 - 0,25}{h}$

$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(1 + h)}{h}$

$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} 1 + h = 1$

Die Ableitung von $f(x) = x^2$ an einer beliebigen Stelle x

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2x + h = 2x$

$f'(x) = 2x$

$f'(0,5) = 1$

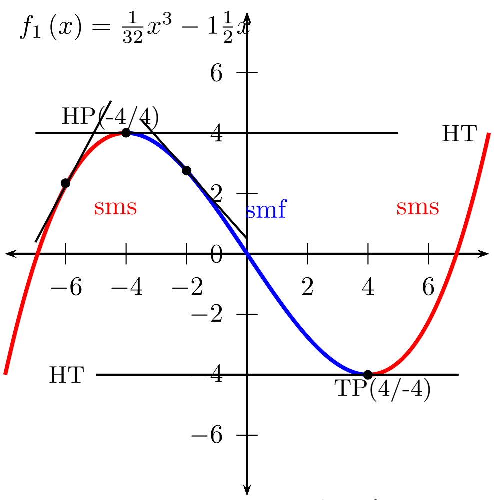
2. Ableitung

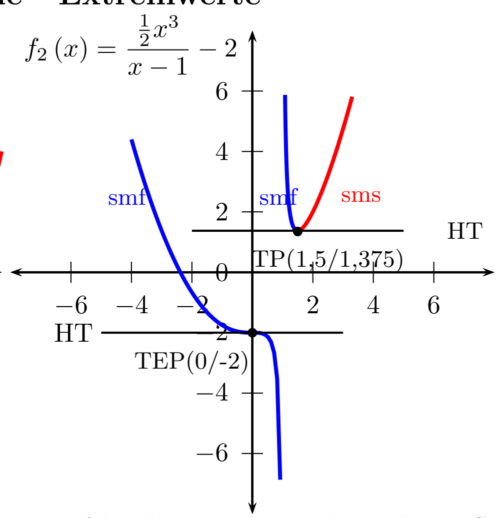
Die Ableitung der 1. Ableitung ist die 2. Ableitung.
Die 2. Ableitung gibt die Krümmung einer Funktion f(x) an der Stelle x_0 an.

$f\left(x\right)=-x^{4}+3x^{2}+2x$
$f'\left(x\right)=-4x^{3}+6x+2$
$f''\left(x\right)=-12x^{2}+6$

Interaktive Inhalte:
Tangentensteigung

4.2.2 1. Ableitung - Monotonie - Extremwerte





sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt

Steigung von $f(x_0)$ an der Stelle x_0

$m=f'(x_0)$

•Funktion
$f\left(x\right)=\frac{1}{32}x^{3}-1\frac{1}{2}x$
•1. Ableitungen
$f'\left(x\right)=\frac{3}{32}x^{2}-1\frac{1}{2}=\frac{3}{32}(x+4)(x-4)$
Steigung an der Stelle $x=-6$
$m=f'(-6)=1\frac{7}{8}$
Steigung an der Stelle $x=-2$
$f'(-2)=-1\frac{1}{8}$

Stelle x_0 an der $f(x_0)$ die Steigung m besitzt

$f'(x)=m$
Bei horizontalen Tangenten ist die Steigung Null.
$f'(x)=0$

•1. Ableitungen
$f'\left(x\right)=\frac{3}{32}x^{2}-1\frac{1}{2}$
Horizontale Tangente
$\frac{3}{32}x^{2}-1\frac{1}{2}=0 \qquad /+1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}x^{2}=1\frac{1}{2} \qquad /:\frac{3}{32}$
$x^{2}=\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$
$x=\pm\sqrt{16}$
$x_1=4 \qquad x_2=-4$

Monotonieverhalten

monoton steigend		$f'(x) \geq 0$
streng monoton steigend	sms	$f'(x) > 0$
monoton fallend		$f'(x) \leq 0$
streng monoton fallend	smf	$f'(x) < 0$

Das Monotonieverhalten kann sich nur an den Extremstellen und an den Rändern des Definitionbereichs (Definitionslücken) ändern.

Monotonieverhalten an der Stelle $x = -6$
$m = f'(-6) = 1\frac{7}{8} > 0 \Rightarrow$ sms
Monotonieverhalten an der Stelle $x = -2$
$f'(-2) = -1\frac{1}{8} < 0 \Rightarrow$ smf

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

• $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.
In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.
Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

• Hochpunkt (HP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).
Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	sms	HP	smf

• Tiefpunkt (TP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).
Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Graph	smf	TP	sms

• Terrassenpunkt (TEP)

Monotonoieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
Graph	sms	TEP	sms

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

•Funktion
$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$
•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0$

$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \qquad / : \frac{3}{32}$
$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$
• Vorzeichentabelle von $f'(x)$

	$x <$	-4	$< x <$	4	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$Graph$	sms	HP	smf	TP	sms

Hochpunkt:$(-4/4)$ Tiefpunkt:$(4/-4)$
•Monotonieverhalten
$x \in]-\infty; -4[\quad \cup \quad]4; \infty[\quad f'(x) > 0$ sms
$x \in]-4; 4[\quad f'(x) < 0$ smf

•Funktion
$f_2(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3}{x-1} - 2$
•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{1\frac{1}{2}x^2\cdot(x-1) - \frac{1}{2}x^3\cdot 1}{(x-1)^2}$
$= \frac{(1\frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2) - \frac{1}{2}x^3}{(x-1)^2}$
$= \frac{x^3 - 1\frac{1}{2}x^2}{(x-1)^2}$
Zähler $= 0$
$x^2(x - 1\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x - 1\frac{1}{2} = 0$
$x - 1\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 1\frac{1}{2}$
$x = 1\frac{1}{2}$
$x_0 = 0$; 2-fache Nullstelle
$x_1 = 1\frac{1}{2}$; 1-fache Nullstelle
Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen$x_3 = 1$

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
Graph	smf	TEP	smf		smf	HP	sms

TEP(0/0) TP$(1\frac{1}{2}/1\frac{3}{8})$
•Monotonieverhalten
$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 1[\quad \cup \quad]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0$ smf
$x \in]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0$ sms

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

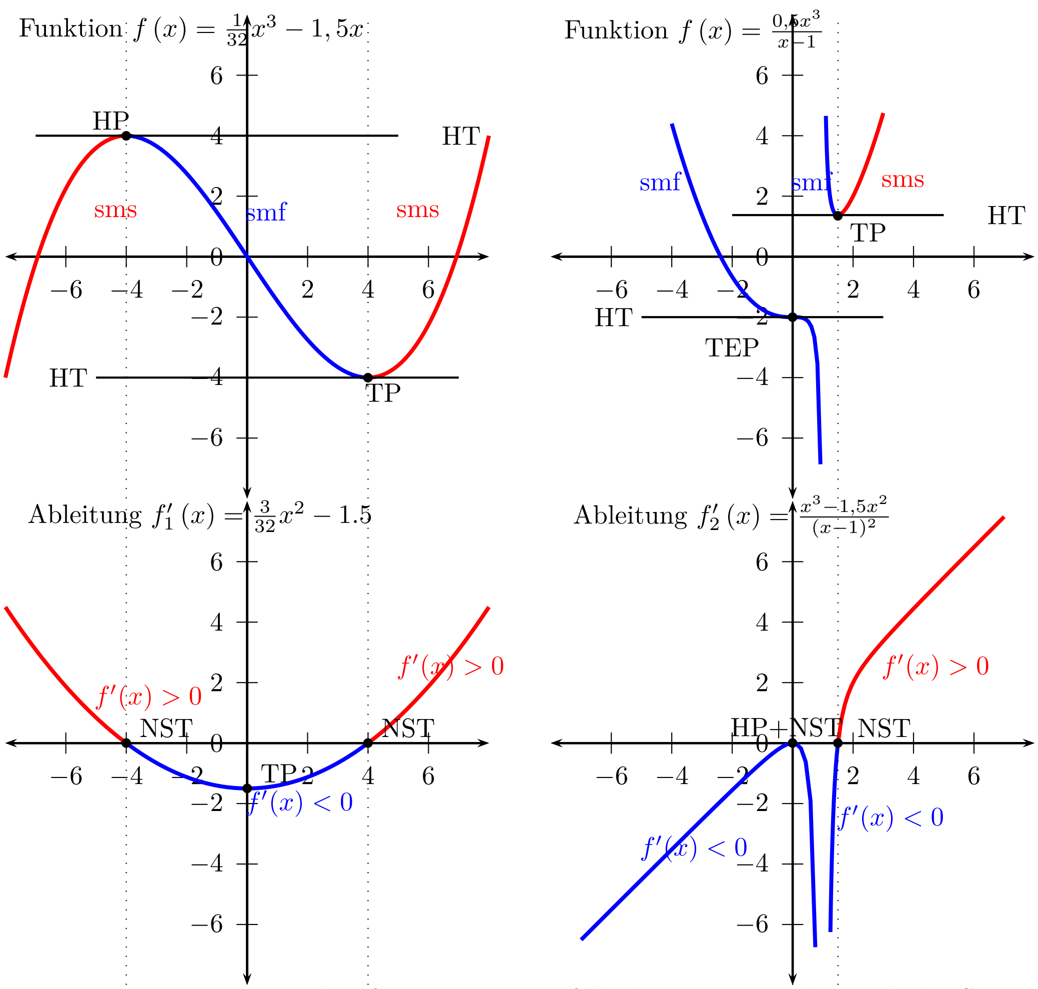
Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung).

- $f''(x_0) > 0(LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0(RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

•Funktion
$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$
•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$
•2. Ableitungen
$f''(x) = \frac{3}{16}x$
•$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0$
$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \quad / : \frac{3}{32}$
$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$
$f''(-4) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{HP}(-4/4)$
$f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{TP}(4/-4)$

Interaktive Inhalte:
Kurvendiskussion

4.2.3 Graph der 1. Ableitung



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt; PS - Punktsymmetrie zum Ursprung; AS - Achsensymmetrie zur y-Achse

Funktion - 1. Ableitung f'(x)

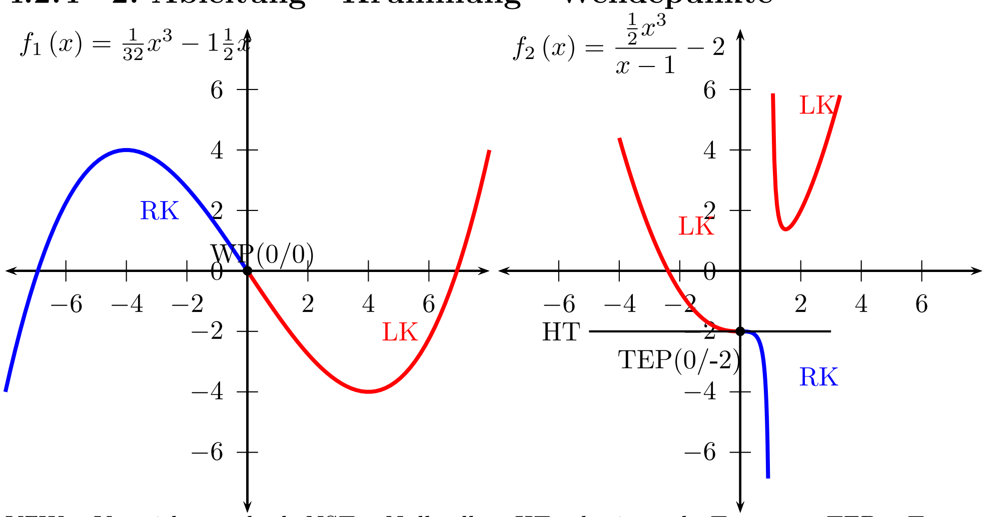
Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
Extremwert	NST $f'(x) = 0$
HT	NST $f'(x) = 0$
HP	NST und VZW von $+$ nach $-$
TP	NST und VZW von $-$ nach $+$
TEP	NST ohne VZW
WP	Extremwert
sms	$f'(x) > 0$ (positiv)
smf	$f'(x) < 0$ (negativ)
VA	VA $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$
HA	HA $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f'(x) = 0$
PS	AS
AS	PS

$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x \quad f_1'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1.5$

$f_1(x)$	$f_1'(x)$
Extremwert: $x = -4$	NST $x = -4$
HP:$x = -4$	VZW von + nach - $x = -4$
WP: $x = 0$	Extremwert: $x = 0$
sms: $x < -4$	$f(x) > 0 \quad x < -4$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

4.2.4 2. Ableitung - Krümmung - Wendepunkte



VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Krümmung von $f(x_0)$ an der Stelle x_0

Rechtskrümmung	RK	$f''(x) < 0$
Linkskrümmung	LK	$f''(x) > 0$

Das Krümmungsverhalten kann sich nur an den Nullstellen der 2. Ableitung und an den Rändern des Definitionbereichs (Definitionslücken) ändern.

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$. Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen (Hinreichende Bedingung). Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

• Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	LK	WP	RK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

• Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
Graph	LK	FP	LK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

•Funktion

$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$

$f_1'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2}$

•2. Ableitungen

$f_1''(x) = \frac{3}{16}x$

$f_1''(x) = \frac{3}{16}x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

WP(0/0)

$x \in]0;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ LK

$x \in]-\infty;0[\quad f''(x) < 0 \quad$ RK

•Funktion

$f_2(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x-1}$

$f_2'(x) == \frac{x^3 - 1\frac{1}{2}x^2}{(x-1)^2}$

•2. Ableitungen

$f_2''(x) = \dfrac{(x^2 - 3x + 3)x}{(x-1)^3} \qquad$ Zähler =0

$x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 3x + 3 = 0$

$x^2 - 3x + 3 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{-3}}{2}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$x_9 = 0$; 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_{10} = 1$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK		RK

WP(0/−2) kein WP $x = 1$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ LK

$x \in]0;1[\quad f''(x) < 0 \quad$ RK

Wendepunkte und die 3. Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

• $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

•Funktion

$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$

•1. Ableitungen

$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$

•2. Ableitungen

$f''(x) = \frac{3}{16}x$

•3. Ableitungen

$f'''(x) = \frac{3}{16}$

$f''(x) = \frac{3}{16}x = 0$

$x = 0$

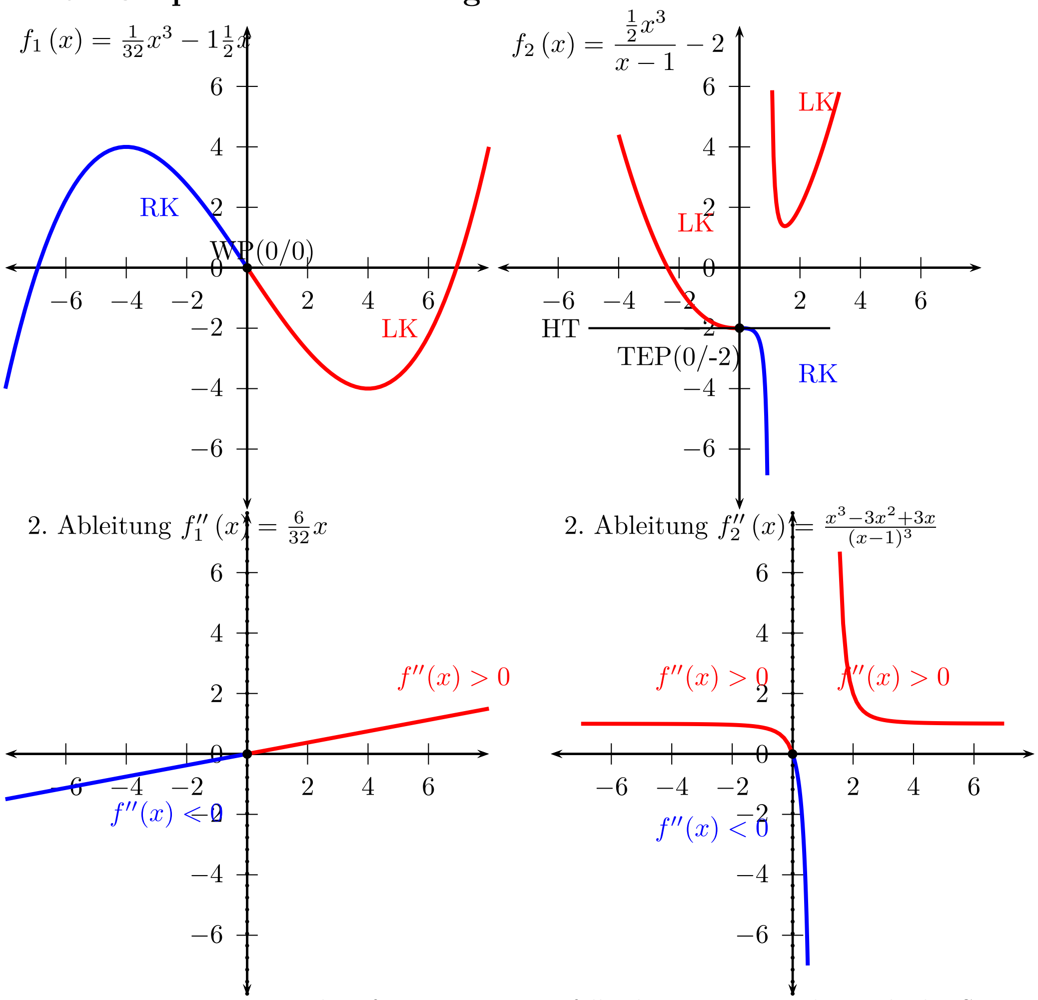
$f'''(0) = \frac{3}{16} \neq 0 \Rightarrow$

Wp(0/0)

Interaktive Inhalte:

Kurvendiskussion

4.2.5 Graph der 2. Ableitung



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Funktion - 2. Ableitung f"(x)

Funktion $f(x)$	2. Ableitung $f''(x)$
WP	NST $f''(x) = 0$ mit VZW
LK	$f''(x) > 0$
RK	$f''(x) < 0$
TEP	NST mit VZW
VA	VA
HA	HA

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

4.2.6 Ableitung der Grundfunktionen

Polynomfunktion

$f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}$
Die Ableitungen bildet man durch:
Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen
$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$
$f(x) = ax^n \qquad f'(x) = nax^{n-1}$
$f(x) = ax \qquad f'(x) = a$
Konstanter Faktor a bleibt erhalten
$f(x) = a \qquad f'(x) = 0$
$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
Bei Summen wird jeder Summand einzeln abgeleitet

$f_1(x) = x^5 \qquad f_1'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$
$f_2(x) = 8x^5 \qquad f_2'(x) = 8 \cdot 5x^{5-1} = 40x^4$
$f_3(x) = 2x \qquad f_3'(x) = 2$
$f_4(x) = 5 \qquad f_4'(x) = 0$
$f_5(x) = x^5 + x^4 + x + 3 \qquad f_5'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 1$
$f_5''(x) = 20x^3 + 12x^2$

Exponentialfunktion Basis e

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$
$f(x) = ae^x \qquad f'(x) = ae^x$
$f(x) = ae^x + b \qquad f'(x) = ae^x$

$f(x) = 3e^x + 4 \qquad f'(x) = 3e^x$

Logarithmusfunktion Basis e

$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a\ln x \qquad f'(x) = \frac{a}{x}$
$f(x) = a\ln x + b \qquad f'(x) = \frac{a}{x}$

$f(x) = 4\ln x + 5 \qquad f'(x) = \frac{4}{x}$

Exponentialfunktion allgemein

$f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \ln a$

$f(x) = 3^x \qquad f'(x) = 3^x \ln 3$

Logarithmusfunktion allgemein

$f(x) = \log_a x \qquad f'(x) = \frac{1}{x\ln a}$

$f(x) = \log_4 x \qquad f'(x) = \frac{1}{x\ln 4}$

Trigonometrische Funktionen

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f_2(x) = x^3 + 2 \cdot \sin x \qquad f_2'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot \cos x$

Interaktive Inhalte:
Ableitung

4.2.7 Ableitungsregeln

Ableiten von Summen und Differenzen

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$f_1(x) = x^5 + x^4 + x + 3$
$f_1'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 1$
$f_1''(x) = 20x^3 + 12x^2$
$f_2(x) = x^3 + 2 \cdot \sin x$
$f_2'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot \cos x$

Ableiten mit konstantem Faktor

$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

$f_1(x) = 5e^x + 4\ln x$
$f_1'(x) = 5e^x + 4\frac{1}{x}$
$f_2(x) = 5\cos x + 4\sin x$
$f_2'(x) = -5\sin x + 4\cos x$

Kettenregel

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

- äußere Funktion f() ableiten
- innere Funktion g(x) unabgeleitet abschreiben
- mit der Ableitung der inneren Funktion g(x) multiplizieren (nachdifferenzieren)

$f_1(x) = e^{2x}$
äußere Funktion: $e^{(..)}$ innnere Funktion: $2x$
$f_1'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$
$f_2(x) = 3\sin 5x$
äußere Funktion: $sin(..)$ innnere Funktion: $5x$
$f_2'(x) = 3\cos 5x \cdot 5 = 15\cos 5x$
$f_3(x) = 5e^{3x^3}$
äußere Funktion: e innnere Funktion: $3x^3$
$f_3'(x) = 5e^{3x^3} \cdot 9x^2 = 45x^2e^{3x^3}$
$f_4(x) = (x^3 - x)^7$
äußere Funktion: $(...)^7$ innnere Funktion: $x^3 - x$
$f_4'(x) = 7(x^3 - x)^6 \cdot (3x^2 - 1) = (21x^2 - 7)(x^3 - x)^6$

Produktregel

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

- 1. Faktor f(x) ableiten
- mal
- 2. Faktor g(x) unabgeleitet
- plus
- 1. Faktor f(x) unabgeleitet
- mal
- 2. Faktor g(x) abgeleitet

$f_1(x) = x^2e^x$
$f_1'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$
$f_1'(x) = xe^x(2 + x)$
$f_2(x) = (x^2 - 6 \cdot x + 2) \cdot e^x$
$f_2'(x) = (2 \cdot x - 6) \cdot e^x + (x^2 - 6 \cdot x + 2) \cdot e^x$
$f_2'(x) = e^x(2x - 6 + x^2 - 6x + 2)$
$f_2'(x) = e^x(x^2 - 4x - 4)$

Quotientenregel

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

- Zähler f(x) ableiten
- mal
- Nenner g(x) unabgeleitet
- minus
- Zähler f(x) unabgeleitet
- mal
- Nenner g(x) abgeleitet
- durch
- Nenner g(x) im Quadrat

$f(x) = \frac{3x-1}{x^2} \qquad f'(x) = \frac{3 \cdot x^2 - (3x-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{3x^2-(6x^2-2x)}{x^4}$

$f'(x) = \frac{-3x^2+2x}{(x^4)}$

$f'(x) = \frac{-3x(x-\frac{2}{3})}{x^4}$

$f'(x) = \frac{-3(x-\frac{2}{3})}{x^3}$

$f'(x) = \frac{-3x+2}{x^3}$

4.2.8 Tangenten- und Normalengleichung

Tangentengleichung

Tangente an der Stelle x_0:

$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

oder

$y_0 = f(x_0)$

$m_t = f'(x_0)$

Geradengleichung:

$y = m \cdot x + t$

m_t, x_0, y_0 einsetzen und nach t auflösen

$t = y_0 - m_t \cdot x_0$

m_t, t einsetzen

$y = m_t \cdot x + t$

Funktion

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

Tangente an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$f'(\frac{1}{2}) = 1$

$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$g(x) = f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$

$g(x) = 1(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$

$g(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$g(x) = x - \frac{1}{4}$

Normalengleichung

Normale an der Stelle x_0:

$g(x) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

oder

$y_0 = f(x_0)$

$m_t = f'(x_0)$

Steigung der Normalen:

$m_n = \frac{-1}{m_t}$

Geradengleichung:

$y = m \cdot x + t$

m_n, x_0, y_0 einsetzen und nach t auflösen

$t = y_0 - m_n \cdot x_0$

m_n, t einsetzen

$y = m_n \cdot x + t$

Funktion

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

Normale an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$f'(\frac{1}{2}) = 1$

$g(x) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

$g(x) = \frac{-1}{f'(\frac{1}{2})}(x - \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$

$g(x) = \frac{-1}{1}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$

$g(x) = -1x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$g(x) = -1x + \frac{3}{4}$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph | Wertetable | $Tangentengleichung$

4.2.9 Newtonsches Iterationsverfahren

Nullstelle einer Funktion mit dem Newtonsches Iterationsverfahren berechnen.

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Startwert x_0 wählen

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

....

Funktion

$f\left(x\right) = x^2 - 4,000$

$f'\left(x\right) = 2,000x$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Startwert: $x_0 = 1,000$

$f(1,000) = -3,000$

$f'(1,000) = 2,000$

$x_1 = 1,000 - \frac{f(1,000)}{f'(1,000)}$

$x_1 = 1,000 - \frac{-3,000}{2,000}$

$x_1 = 2,500$

$f(2,500) = 2,250$

$f'(2,500) = 5,000$

$x_2 = 2,500 - \frac{f(2,500)}{f'(2,500)}$

$x_2 = 2,500 - \frac{2,250}{5,000}$

$x_2 = 2,050$

$f(2,050) = 0,203$

$f'(2,050) = 4,100$

$x_3 = 2,050 - \frac{f(2,050)}{f'(2,050)}$

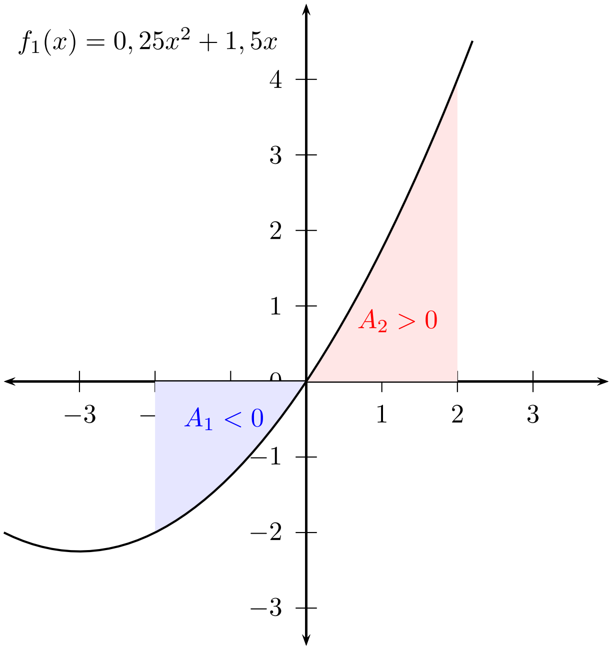
$x_3 = 2,050 - \frac{0,203}{4,100}$

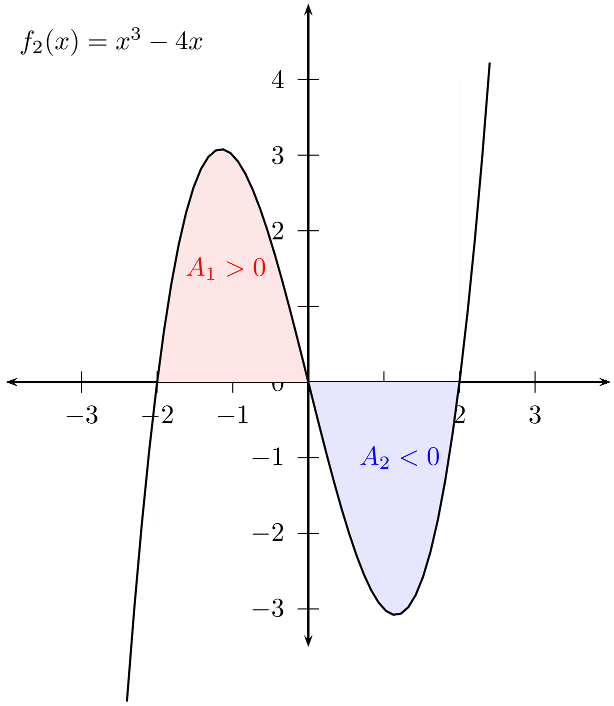
$x_3 = 2,001$

Interaktive Inhalte:
$Newtonverfahren$

4.3 Integralrechnung

4.3.1 Definition





Hauptsatz der Integralrechnung

$F'(x) = f(x)$
Die Ableitung von $F(x)$ ist $f(x)$
$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$
Die Menge aller Stammfunktionen erhält man durch das Addieren einer Konstanten c.
$f(x) = ax^n \qquad F(x) = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + c$

$F_1(x) = x^2 + 2$
$F_1'(x) = 2x$
$F_1(x)$ ist Stammfunktion von $f(x) = 2x$
$F_2(x) = x^2 + 3$
$F_2'(x) = 2x$
$F_2(x)$ ist Stammfunktion von $f(x) = 2x$
Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x) = 2x$
$F(x) = x^2 + c$

Unbestimmtes Integral

$F(x) = \int f(x)\ \mathrm{dx} = F(x) + c$
Die Stammfunktion zu einer Funktion f(x) ist das unbestimmte Integral.

$f(x) = 6x^2$
$F(x) = \int 6x^2\ \mathrm{dx} = 6 \cdot \frac{1}{3}x^{2+1} + c$
$F(x) = 2x^3 + c$
$F(x) = \int(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5)\ \mathrm{dx} = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + c$

Bestimmtes Integral

• Flächenbilanz

$A = \int_a^b f(x) \; \mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

A ist der Flächeninhalt unter einer Kurve der Funktion f(x) im Integrationsbereich von a bis b.

Fläche oberhalb der x-Achse $\Rightarrow A > 0$

Fläche unterhalb der x-Achse $\Rightarrow A < 0$

Flächen unterhalb und oberhalb der x-Achse ⇒ Summe der Teilflächen

• Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse

- Nullstellen berechnen
- Flächen zwischen den Nullstellen berechnen
- Beträge der Flächen addieren

Funktion

$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x$

Stammfunktion

$F(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

Fläche unterhalb der x-Achse $\Rightarrow A_1 < 0$

$A_1 = \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_{-2}^{0}$

$= \left(\frac{1}{12} \cdot 0^3 + \frac{3}{4} \cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot (-2)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-2)^2\right)$

$= (0) - \left(2\frac{1}{3}\right) = -2\frac{1}{3}$

Fläche oberhalb der x-Achse $\Rightarrow A_2 > 0$

$A_2 = \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_{0}^{2}$

$= \left(\frac{1}{12} \cdot 2^3 + \frac{3}{4} \cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot 0^3 + \frac{3}{4} \cdot 0^2\right)$

$= \left(3\frac{2}{3}\right) - (0) = 3\frac{2}{3}$

Fläche unterhalb und oberhalb der x-Achse ⇒ Summe der Teilflächen

$A_3 = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_{-2}^{2}$

$= \left(\frac{1}{12} \cdot 2^3 + \frac{3}{4} \cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot (-2)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-2)^2\right)$

$= \left(3\frac{2}{3}\right) - \left(2\frac{1}{3}\right) = 1\frac{1}{3}$

$A_3 = A_1 + A_2 = (-2\frac{1}{3}) + 3\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$

$f_2(x) = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$

•Nullstellen: $x_1 = -2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2$

$A_1 = \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0}$

$= \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2\right)$

$= (0) - (-4) = 4$

$A_2 = \int_{0}^{2} \left(x^3 - 4x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2}$

$= \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2\right)$

$= (-4) - (0) = -4$

•Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse:

$A = |A_1| + |A_2| = |4| + |-4| = 8$

Integralfunktion

$F(x) = \int_k^x f(t) \, dt = [F(t)]_k^x = F(x) - F(k)$

Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle.

$F(k) = 0$

$F(x) = \int_{-2}^{x} \left(2t^2 + 4t\right) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + 2t^2\right]_{-2}^{x}$

$= \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2\right)$

$= \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}$

$F(-2) = 0$

Interaktive Inhalte:

Stammfunktion *Integral*

4.3.2 Integration der Grundfunktionen

Polynomfunktion

$F(x) = \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
Zum Exponenten 1 addieren, durch den Exponenten dividieren.
$F(x) = \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + c$
$F(x) = \int ax^n \, dx = a\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
Konstanter Faktor a bleibt erhalten.
$F(x) = \int a \, dx = ax + c$
$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) dx$$
Bei Summen wird jeder Summand einzeln integriert.

$F(x) = \int 4 \, dx = 4x + c$
$F_2(x) = \int (-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5) \, dx =$
$F_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^{2+1} + 2 \cdot \frac{1}{2}x^{1+1} + 5x + c$
$F_2(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + c$

Exponentialfunktion Basis e

$F(x) = \int e^x \, dx = e^x + c$
$F(x) = \int ae^x \, dx = ae^x + c$
$F(x) = \int ae^x + b \, dx = ae^x + bx + c$

$F(x) = \int -3e^x + 2 \, dx = -3e^x + 2x + c$

Logarithmusfunktion Basis e

$F(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$
$F(x) = \int a \ln x \, dx = a(x \ln x - x) + c$
$F(x) = \int a \ln x + b \, dx == a(x \ln x - x) + bx + c$

$F(x) = \int 7 \ln x + 2 \, dx == 7(x \ln x - x) + 2x + c$

Rationale Funktion mit linearer Funktion im Nenner

$F(x) = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$
$F(x) = \int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$

$F(x) = \int \frac{1}{x+1} \, dx = \ln |x + 1| + c$
$F(x) = \int \frac{1}{2x+3} \, dx = \frac{1}{2} \ln |2x + 3| + c$

Trigonometrische Funktionen

$F(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + c$
$F(x) = \int \cos x \, dx = \sin x + c$

Interaktive Inhalte:
Stammfunktion

4.3.3 Integrationsregeln

Integration von Summen und Differenzen

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int f(x) + g(x)dx$$

Integration mit konstantem Faktor

$$\int c \cdot f(x)\mathrm{dx} = c\int f(x)\mathrm{dx}$$

Integration mit vertauschten Grenzen

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{dx}$$

Integrationsgrenzen zusammenfassen

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} + \int_b^c f(x)\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\ \mathrm{dx}$$

Ableitung des Nenners im Zähler

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{dx} = \ln|f(x)| + c$$

$\int \frac{2x}{x^2}\ \mathrm{dx} = \ln|x^2| + c$
$\int \frac{-12x^2+5}{-4x^3+5x-2}\ \mathrm{dx} = \ln|-4x^3+5x-2| + c$

Innere Funktion ist der abgeleitete Faktor

$$\int g'(x)f(g(x))\ \mathrm{dx} = F(x) + c$$

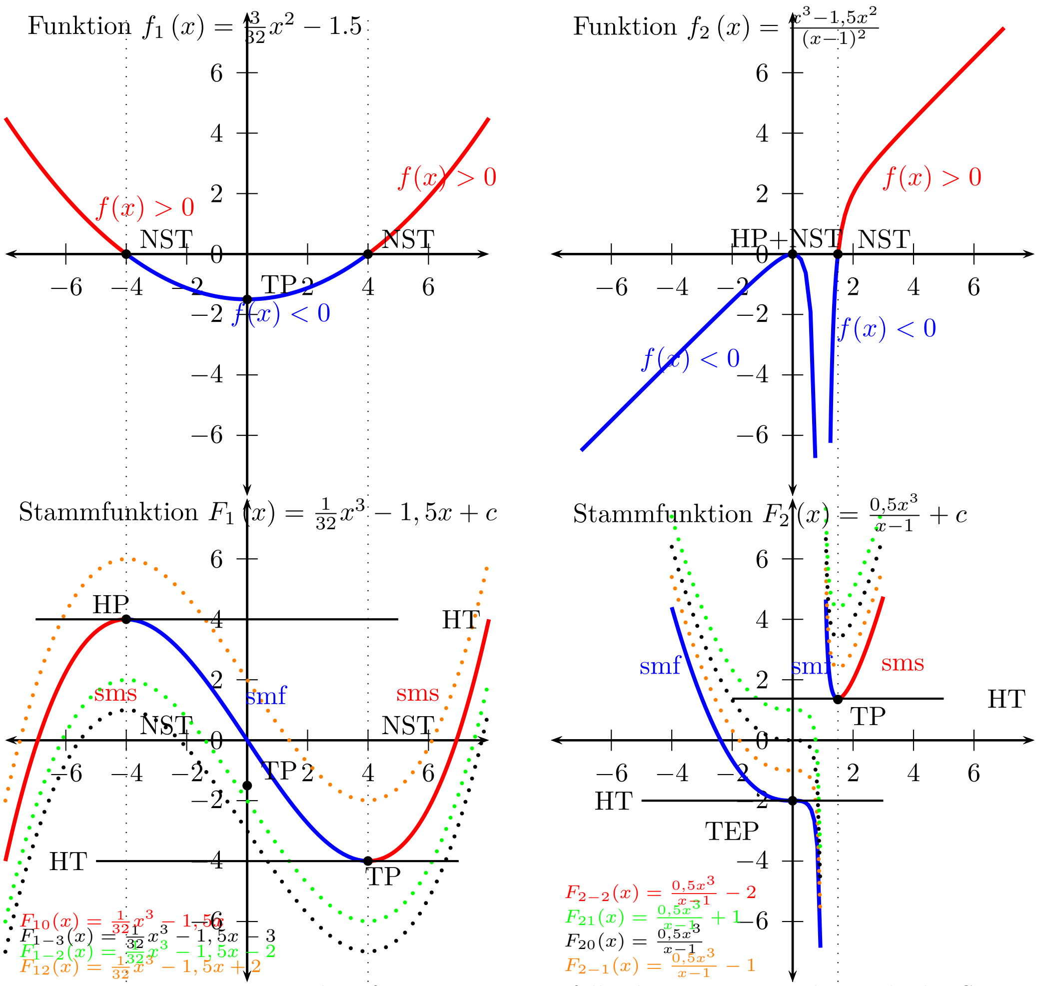
$\int 2x(x^2-3)^4\ \mathrm{dx} = \frac{1}{5}(x^2-3)^5 + c$
$\int 2xe^{x^2-3}\ \mathrm{dx} = e^{x^2-3} + c$
$\int 2x\sin(x^2-3)\ \mathrm{dx} = -\cos(x^2-3) + c$
$\int (3x^2-6x)e^{x^3-3x^2}\ \mathrm{dx} = e^{x^3-3x^2} + c$

Innere Funktion ist eine lineare Funktion

$$\int f(ax+b)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{a}F(x) + c$$

$\int (2x-6)^4\ \mathrm{dx} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}(2x-3)^5 + c = \frac{1}{10}(2x-3)^5 + c$
$\int e^{2x-6}\ \mathrm{dx} = \frac{1}{2}e^{2x-6} + c$
$\int \cos(-2x-6)\ \mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\sin(-2x-3) + c$
$\int \frac{1}{5x+3}\ \mathrm{dx} = \frac{1}{5}\ln|5x+3| + c$

4.3.4 Graph der Stammfunktion



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt; PS - Punktsymmetrie zum Ursprung; AS - Achsensymmetrie zur y-Achse

Zu jeder Funktion f(x) gibt es eine Menge von Stammfunktionen F(x), die um c in y-Richtung verschoben sind.

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
NST $f(x) = 0$	Extremwert (HT)
VZW von + nach −	HP
VZW von − nach +	TP
NST ohne VZW	TEP
Extremwert	WP
$f(x) > 0$ (positiv)	sms
$f(x) < 0$ (negativ)	smf
PS	AS
AS	PS

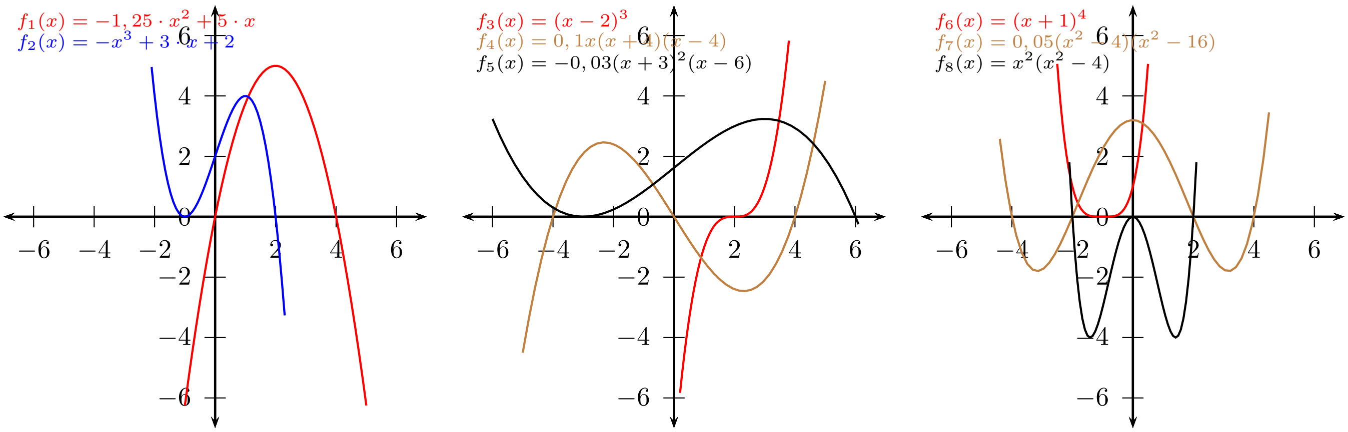
$f_1(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1.5$
$F_1(x) = \int \frac{3}{32}x^2 - 1.5 \text{ dx} = \frac{1}{32}x^3 - 1.5x + c$
$F_{12}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x + 2 \quad F_{1-2}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x - 2$
$F_{1-3}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x - 3 \quad F_{10}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x$

$f_1(x)$	$F_1(x)$
NST $x = -4$	Extremwert: $x = -4$
VZW von + nach - $x = -4$	HP:$x = -4$
Extremwert: $x = 0$	WP: $x = 0$
$f(x) > 0 \quad x < -4$	sms: $x < -4$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

4.4 Kurvendiskussion

4.4.1 Ganzrationale Funktion



Formen der Polynomfunktion - ganzrationale Funktion

• Summendarstellung der Polynomfunktion

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_1 x^1 + a_0$

oder

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} ...$

Die höchste Potenz (n) gibt den Grad der Polynomfunktion an.

• Produktdarstellung (faktorisierte Form) der Polynomfunktion

Ist der Grad des Polynoms gleich der Anzahl der (reellen)Nullstellen, kann man die Funktion in faktorisierter Form schreiben.

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...$

Nullstellen: $x_1, x_2, x_3...$

Linearfaktoren: $(x-x_1), (x-x_2)...$

a=Koeffizient der höchsten Potenz

Grad 1: Lineare Funktion

$f(x) = ax + b$

Grad 2: Quadratische Funktion

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Grad 3: Kubische Funktion

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Grad 4: Biquadratische Funktionen

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

Grad 5:

$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$

Summen- in Produktdarstellung:

$f_1\,(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x-4)$

$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2 = -(x+1)^2(x-2)$

$f_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - 1\frac{3}{5}x = 0$

$x(\frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5} = 0$

$x_2 = 4 \qquad x_3 = -4$

Grad der Funktion = Anzahl der Nullstellen = 3

Faktorisierte Form:

$f_4\,(x) = 0,1x(x+4)(x-4)$

$f_7(x) = \frac{1}{20}x^4 - x^2 + 3\frac{1}{5} = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$

$\frac{1}{20}u^2 - 1u + 3\frac{1}{5} = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3\frac{1}{5}}}{2 \cdot \frac{1}{20}}$$

$u_1 = 16 \qquad u_2 = 4$

$x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_3 = 2 \qquad x_4 = -2$

Faktorisierte Form:

$f_7\,(x) = \frac{1}{20}(x+4)(x-4)(x+2)(x-2)$

Produkt- in Summendarstellung:

$f_3(x) = (x-2)(x-2)(x-2) = (x-2)^3$

$f_3(x) = x^3 - 6x^2 - 12x - 8$

$f_5\,(x) = 0,1x(x+4)(x-4) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$

$f_6(x) = (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$f_7(x) = 0,05(x^2-4)(x^2-16) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$

$f_8(x) = x^2(x^2-4) = x^4 - 4x^2$

Definitions- und Wertebereich

- Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Wertebereich

\- höchster Exponent ungerade:

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

\- höchster Exponent gerade:

$\mathbb{W} = [$absoluter Tiefpunkt;$\infty[$

$\mathbb{W} =]-\infty;$absoluter Hochpunkt$]$

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$
absoluter Hochpunkt: (2/5) höchster Exponent: 2 (gerade Zahl)
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 5[$
$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$
höchster Exponent: 3 (ungerade Zahl)
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
$f_5(x) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
$f_7(x) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$
absoluter Tiefpunkt aus der Kurvendiskussion:
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1\frac{4}{5}, \infty[$

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$f(-x) = -f(x)$

$f(x)$ hat nur ungerade Exponenten

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$f(-x) = f(x)$

$f(x)$ hat nur gerade Exponenten

$f_1(-x) = -1\frac{1}{4} \cdot (-x)^2 + 5 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung
$f_2(-x) = -1 \cdot 1(-x)^3 + 3 \cdot (-x) + 2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung
$f_4(x) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$
$f_4(-x) = 0,1(-x)^3 - 1\frac{3}{5} \cdot (-x)$
$f_4(-x) = -\left(0,1 \cdot x^3 - 1\frac{3}{5} \cdot x\right)$
$f_4(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung
$f_7(x) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$
$f_7(-x) = \frac{1}{20} \cdot (-x)^4 - 1 \cdot (-x)^2 + 3\frac{1}{5}$
$f_7(-x) = \frac{1}{20} \cdot x^4 - 1 \cdot x^2 + 3\frac{1}{5}$
$f_7(-x) = f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

• Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen.
(siehe Algebra-Gleichungen)
$f(x) = 0 \quad ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2}... = 0$
• höchster Exponent ungerade
$1 \leqq$ Anzahl der Nullstellen $\leqq$ Grad des Polynoms
• höchster Exponent gerade
$0 \leqq$ Anzahl der Nullstellen $\leqq$ Grad des Polynoms
Faktorisierte Polynomfunktion

• Nullstellen aus faktorisierten Polynom ablesen.
$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)... = 0$
Nullstellen: $x_1, x_2, x_3...$

Nullstellen aus faktorisierten Polynom ablesen.
$f_3(x) = (x-2)^3 \quad x_{123} = 2$ 3-fache Nullstelle
$f_5(x) = -0,03(x+3)^2(x-6)$
$x_1 = -3$ 2-fache Nullstelle
$x_{23} = 6$ 1-fache Nullstelle

Funktionsterm gleich Null setzen.
$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = 0$
$x(-1\frac{1}{4}x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad -1\frac{1}{4}x + 5 = 0$
$-1\frac{1}{4}x + 5 = 0 \quad \vee \quad x = 4$
$x_1 = 0 \qquad x_2 = 4$
Faktorisierte Form: $f_1(x) = -1\frac{1}{4}x(x-4)$

$f_2(x) = -x^3 + 3x + 2 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: $x_1 = -1$

$$\begin{array}{llll}
(-x^3 & & +3x & +2 \quad) : (x+1) = -x^2 + x + 2 \\
-(-x^3 & -x^2) & & \\
\hline
& x^2 & +3x & +2 \\
& -(x^2 & +x) & \\
\hline
& & 2x & +2 \\
& & -(2x & +2) \\
\hline
& & & 0
\end{array}$$

$-x^2 + x + 2 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \quad \vee \quad x_2 = -1 \qquad x_3 = 2$$
Faktorisierte Form: $f_2(x) = -(x+1)^2(x-2)$
$f_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - 1\frac{3}{5}x = 0$
$x(\frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5} = 0$
$x_2 = 4 \qquad x_3 = -4$
Grad der Funktion = Anzahl der Nullstellen = 3
Faktorisierte Form: $f_5(x) = 0,1x(x+4)(x-4)$
$f_7(x) = \frac{1}{20}x^4 - x^2 + 3\frac{1}{5} = 0$
$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$\frac{1}{20}u^2 - 1u + 3\frac{1}{5} = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3\frac{1}{5}}}{2 \cdot \frac{1}{20}}$$
$u_1 = 16 \qquad u_2 = 4 \quad \vee$
$x^2 = 16 \quad x = \pm\sqrt{16} \quad x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$
$x^2 = 4 \quad x = \pm\sqrt{4} \quad x_3 = 2 \qquad x_4 = -2$
Faktorisierte Form: $f_7(x) = \frac{1}{20}(x+4)(x-4)(x+2)(x-2)$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Bei ganzrationalen Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit f(x)

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$
Graph	oberhalb	0	unterhalb

+ f(x)>0 Graph oberhalb der x-Achse

- f(x)<0 Graph unterhalb der x-Achse

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$

	$x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]0;4[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$

	$x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;2[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]2;\infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

Faktorisierte Form:

$f_5(x) = 0,1x(x+4)(x-4)$

Nullstellen: $x_1 = 0 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = -4$

$-5 < -4 \qquad f_5(-5) = -4,5$

	$x <$	-4	$< x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-4;0[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-4[\quad \cup \quad]0;4[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

Grenzwert - Verhalten im Unendlichen

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_1 x^1 + a_0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$

Das Vorzeichen des Glieds mit der höchsten Potenz und der Grad des Polynoms bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
+	ungerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
-	gerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$

Grenzwert gegen minus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$
+	ungerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	gerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$

Glied mit der höchsten Potenz: $-1\frac{1}{4}x^2$

$\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$

Glied mit der höchsten Potenz: $-x^3$

$\lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = [-1 \cdot \infty^3] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = [-1 \cdot (-\infty)^3] = \infty$

Ableitung

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$
Die Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen.
Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.
Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.
$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} ... + a_2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + a_1$
$f(x) = ax^n \qquad f'(x) = nax^{n-1}$
Grad 1: Lineare Funktion
$f(x) = ax + b \qquad f'(x) = a$
Grad 2: Quadratische Funktion
$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad f'(x) = 2ax + b$
Grad 3: Kubische Funktion
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Grad 4: Biquadratische Funktionen
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x-4)$
$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$
$f_1''(x) = -2\frac{1}{2}$
$f_1'''(x) = 0$

$f_2(x) = -x^3 + 3x + 2 = -(x+1)^2(x-2)$
$f_2'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$
$f_2''(x) = -6x = -6x$
$f_2'''(x) = -6$

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).
- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.
In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.
Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)
- $f''(x_0) > 0 (LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0 (RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \land f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5 = 0$
$-2\frac{1}{2}x + 5 = 0 \qquad / -5$
$-2\frac{1}{2}x = -5 \qquad / : \left(-2\frac{1}{2}\right)$
$x = \frac{-5}{-2\frac{1}{2}}$
$x = 2$
$f_1''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt: } (2/5)}$

$f_2'(x) = -3x^2 + 3 = 0$
$-3x^2 + 3 = 0 \qquad / -3$
$-3x^2 = -3 \qquad / : (-3)$
$x^2 = \frac{-3}{-3}$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$f_2''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt: } (-1/0)}$
$f_2''(1) = -6$
$f_2''(1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt: } (1/4)}$

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen (x_0, x_1..).
In diesen Nullstellen (x_0, x_1..) kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.
Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

- Hochpunkt (HP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).
Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	sms	HP	smf

- Tiefpunkt (TP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).
Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Graph	smf	TP	sms

- Terrassenpunkt (TEP)

Monotonoieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
Graph	sms	TEP	sms

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

streng monoton steigend
$x \in]-\infty; 2[\quad f'(x) > 0$
streng monoton fallend
$x \in]2; \infty[\quad f'(x) < 0$

$f_2'(x) = -3x^2 + 3$

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

streng monoton steigend
$x \in]-1; 1[\quad f'(x) > 0$
streng monoton fallend
$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f'(x) < 0$

Wendepunkte und 3. Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen (x_0, x_1..).
Einsetzen der Nullstellen x_0, x_1.. in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

$f_1'''(x) = 0$
kein Wendepunkt

$f_2''(x) = -6x = 0 \Rightarrow x = 0$
$f'''(0) = 2$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt: (0/2)

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$. Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

• Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	LK	WP	RK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

• Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
Graph	LK	FP	LK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$f_2''(x) = -6x$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[$ $\quad f''(x) > 0$ $\quad$ linksgekrümmt

$x \in]0; \infty[$ $\quad f''(x) < 0$ $\quad$ rechtsgekrümmt

Stammfunktion von f(x)

Stammfunktionen bildet man durch: zum Exponent 1 addieren, durch den Exponenten dividieren.

$f(x) = ax^n \qquad F(x) = \frac{1}{n+1} a x^{n+1} + c$

Unbestimmtes Integral: $F(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + c$

$F_1(x) = \int (-1\frac{1}{4}x^2 + 5x)dx = -\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + c$

$F_2(x) = \int \left(-x^3 + 3x + 2\right) dx = -\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

Bestimmtes Integral

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

$A_1 = \int_0^4 \left(-1\frac{1}{4}x^2 + 5x\right) dx = \left[-\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$

$= \left(-\frac{5}{12} \cdot 4^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 4^2\right) - \left(-\frac{5}{12} \cdot 0^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 0^2\right)$

$= \left(13\frac{1}{3}\right) - (0) = 13\frac{1}{3}$

$A_2 = \int_{-1}^2 \left(-x^3 + 3x + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2$

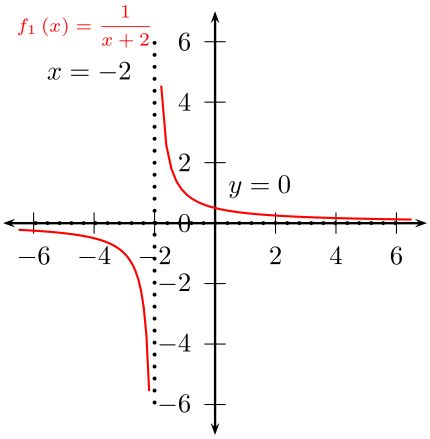
$= \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 1\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right)$

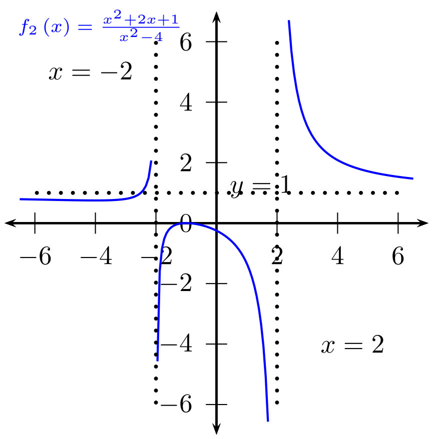
$= (6) - \left(-\frac{3}{4}\right) = 6\frac{3}{4}$

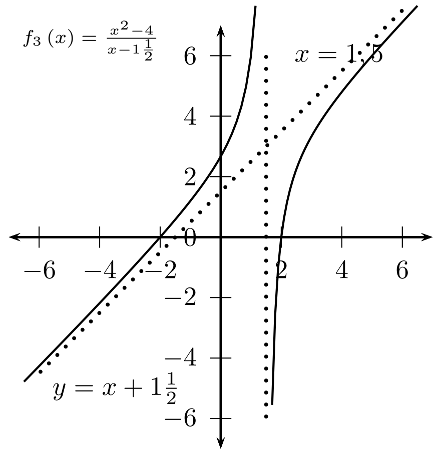
Interaktive Inhalte:

Funktionsgraph Wertetable hier klicken

4.4.2 Gebrochenrationale Funktion







Formen der gebrochenrationalen Funktion

Summendarstellung der gebrochenrationale Funktion:

$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$

$= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} ... + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0}$

Zählerpolynom vom Grad n:

$Z(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

Nennerpolynom vom Grad m:

$N(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} ... + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0$

Produktdarstellung (faktorisierte Form) der gebrochenrationale Funktion:

$f(x) = a\frac{(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)...}{(x-n_1)(x-n_2)(x-n_3)...}$

$z_1, z_2, z_3...$ Nullstellen des Zählers

$n_1, n_2, n_3...$ Nullstellen des Nenners

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Zählerpolynom: $Z(x) = x^2 + 2x + 1$ Zählergrad:2

Nennerpolynom: $N(x) = x^2 - 4$ Nennergrad:2

Faktorisierte Form:

$f_2(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}$

$f_3(x) = \frac{x^2-4}{x-1\frac{1}{2}}$

Funktion nach der Polynomdivision:

$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x-1\frac{1}{2}}$

Definitions- und Wertebereich

Definitionsbereich:

Nullstellen des Nennerpolynoms ausschließen.

Nennerpolynom: $N(x) = 0$

$n_1, n_2, n_3...$ Nullstellen des Nenners (Definitionslücken)

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{n_0, n_1, n_2..\}$

(siehe Algebra - Gleichungen)

Wertebereich:

Bestimmung nur nach Kurvendiskussion möglich.

$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Nenner Null setzen

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$f(-x) = -f(x)$

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$f(-x) = f(x)$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Zählerpolynom gleich Null setzen.

Zählerpolynom: $Z(x) = 0$

$z_1, z_2, z_3 ...$ Nullstellen des Zählers

(siehe Algebra - Gleichungen)

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Zählerpolynom gleich Null setzen:

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$x_1 = -1;$ 2-fache Nullstelle

Verhalten im Unendlichen - Grenzwert - Asymptoten

• Zählergrad>Nennergrad

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$

Das Vorzeichen der Glieder mit der höchsten Potenzen und der Grad der höchsten Exponenten, bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(\infty)^n}{(\infty)^m} = \pm\infty$

Grenzwert gegen minus Unendlich

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(-\infty)^n}{(-\infty)^m} = \pm\infty$

• Zählergrad=Nennergrad+1

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Polynomdivision - schiefe Asymptote

• Zählergrad=Nennergrad

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$

horizontale Asymptote: $y = \frac{a_n}{b_m}$

• Zählergrad<Nennergrad

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

horizontale Asymptote: $y = 0$

Zählergrad < Nennergrad

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+2} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

Zählergrad = Nennergrad

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1x^2+2x+1}{1x^2-4} = \frac{1}{1} = 1$

Horizontale Asymptote: $y = 1$

Zählergrad = Nennergrad+1

$f_3(x) = \frac{x^2-4}{x-1\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(\infty)^2}{(\infty)^1} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(-\infty)^2}{(-\infty)^1} = -\infty$

oder

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{4}{x^2})}{x(1-\frac{1\frac{1}{2}}{x})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2(1-\frac{4}{x^2})}{x(1-\frac{1\frac{1}{2}}{x})} = -\infty$

Polynomdivision :

$$
\begin{array}{lll}
(x^2 & -4 &) : (x - 1\frac{1}{2}) = x + 1\frac{1}{2} \\
-(x^2 \quad -1\frac{1}{2}x) & & \\
\hline
\quad 1\frac{1}{2}x & -4 & \\
\quad -(1\frac{1}{2}x & -2\frac{1}{4}) & \\
\hline
& -1\frac{3}{4} &
\end{array}
$$

$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x-1\frac{1}{2}}$

Schiefe Asymptote: $y = x + 1\frac{1}{2}$

Verhalten an den Definitionslücken - Grenzwert - Asymptoten

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1..\}$

$x_0, x_1..$ sind Definitionslücken von f(x)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow$

Vertikale Asymptote: $x = x_0$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{1}{(x+2)} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

Ableitung

Die Ableitungen bildet man durch die Quotientenregel:

$f'(x) = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{(N(x))^2}$

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.

$f_1'(x) = \frac{0 \cdot (x+2) - 1 \cdot 1}{(x+2)^2}$

$= \frac{0-1}{(x+2)^2}$

$= \frac{-1}{(x+2)^2}$

$= \frac{-1}{(x+2)^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2+4x+4) - (-1) \cdot (2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{0-(-2x-4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2(x+2)}{(x+2)^4}$

$= \frac{2}{(x+2)^3}$

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x^2-4) - (x^2+2x+1) \cdot 2x}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{(2x^3+2x^2-8x-8) - (2x^3+4x^2+2x)}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0 (LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0 (RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

$f_2'(x) = \frac{-2x^2 - 10x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = 0$

$-2x^2 - 10x - 8 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)}$

$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{36}}{-4}$

$x_{1/2} = \frac{10 \pm 6}{-4}$

$x_1 = \frac{10+6}{-4} \qquad x_2 = \frac{10-6}{-4}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -1$

$f''(-4) = 6 > 0 \Rightarrow$ <u>Tiefpunkt: $(-4/\frac{3}{4})$</u>

$f''(-1) = -6$

$f''(-1) < 0 \Rightarrow$ <u>Hochpunkt: $(-1/0)$</u>

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

• $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

• Hochpunkt (HP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	sms	HP	smf

• Tiefpunkt (TP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Graph	smf	TP	sms

• Terrassenpunkt (TEP)

Monotonoieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
Graph	sms	TEP	sms

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$f_1'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$

Zähler $= 0$

keine Lösung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = -2$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; \infty[\; f'(x) < 0$ smf

Wendepunkt und die 3. Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

• $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$. Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

• Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	LK	WP	RK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

• Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht.

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
Graph	LK	FP	LK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

•Krümmung

$f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$

$Zhler = 0$

keine Lösung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_3 = -2$; 1-fache Nullstelle

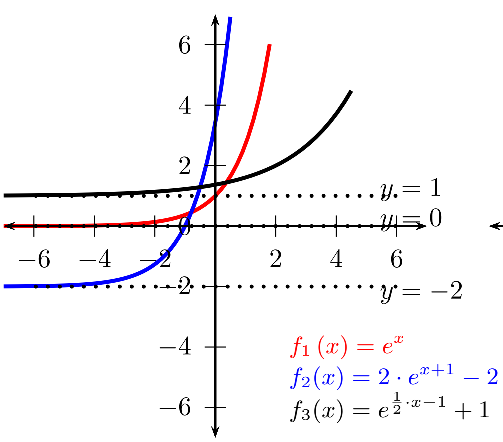
	$x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

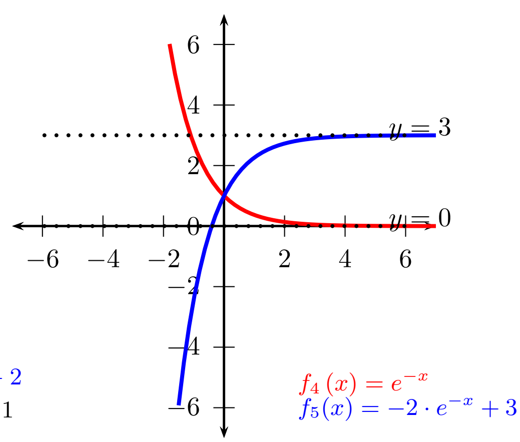
$x \in]-2; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -2[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable hier klicken

4.4.3 Exponentialfunktion (Basis e)





Formen der Exponentialfunktion

Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$

Allgemeine Exponentialfunktion

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

(siehe Funktionen - Exponentialfunktion)

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$
$f_4\,(x) = e^{-x}$
$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3$

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = e^x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$a > 0 \qquad \mathbb{W} = [d; \infty[$

$a < 0 \qquad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [-2; \infty[$
$f_4\,(x) = e^{-x} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}^+$
$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]-\infty; 3]$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

$f(x) = e^x \qquad e^x > 0 \Rightarrow$ keine Nullstellen

$f(x) = ae^{(b(x-c))} + d$

$ae^{b(x-c)} + d = 0 \qquad / - d$

$ae^{b(x-c)} = -d \qquad / : a$

$e^{b(x-c)} = \frac{-d}{a} \qquad / \ln$

$\frac{-d}{a} > 0$

$b(x-c) = \ln\left(\frac{-d}{a}\right) \qquad / : b \qquad / + c$

$x = \frac{\ln\left(\frac{-d}{a}\right)}{b} + c$

$\frac{-d}{a} \leq 0 \qquad \Rightarrow$ keine Nullstellen

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$
$2 \cdot e^{(x+1)} - 2 = 0$
$2 \cdot e^{(x+1)} - 2 = 0 \qquad / + 2$
$2 \cdot e^{(x+1)} = +2 \qquad / : 2$
$e^{(x+1)} = 1 \qquad / \ln$
$x + 1 = \ln(1) \qquad / - 1$
$x = -1$
$f_3(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1$
$e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1 = 0 \qquad / - 1$
$e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} = -1$
$-1 < 0 \Rightarrow$ keine Nullstellen

Grenzwert - Asymptoten

$f(x) = e^x$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \Rightarrow$ horizontale Asymptote y=0

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d$

Schrittweise Berechnung für $b > 0$ und $a > 0$:

$\lim\limits_{x\to\infty} b(\infty - c) = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} e^{\infty} = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} a\infty + d = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} b(-\infty - c) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} a \cdot 0 + d = d \quad \Rightarrow$ HA: $y = d$

a	b	Grenzwert $\to +\infty$	Asymptote
+	+	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	+	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	-	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$

a	b	Grenzwert $\to -\infty$	Asymptote
+	+	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	+	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
+	-	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	-	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$

$\lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \infty + 1 = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} e^{\infty} = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot \infty - 2 = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 \; \lim\limits_{x\to-\infty} (-\infty + 1) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot 0 - 2 = -2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 = -2 \qquad HA: y = -2$

$f_4(x) = e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \qquad HA: y = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3$

$\lim\limits_{x\to\infty} -2 \cdot e^{-x} + 3 = 3 \qquad HA: y = 3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -2 \cdot e^{-x} + 3 = +\infty$

Ableitung

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x$

Ableitung mit der Kettenregel

$f(x) = e^{bx} \qquad f'(x) = be^{bx} \qquad f''(x) = b^2e^{bx}$

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d \qquad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$

$f''(x) = a \cdot b^2e^{b(x-c)}$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \qquad f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1} \qquad f_2''(x) = 2 \cdot e^{x+1}$

$f_4(x) = e^{-x} \qquad f_4'(x) = -e^{-x} \qquad f_4'(x) = e^{-x}$

$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \qquad f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x}$

$f_3(x) = e^{\frac{1}{2}\cdot x - 1} + 1 \qquad f_3'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\cdot x - 1}$

$f_3''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}\cdot x - 1}$

Monotonieverhalten

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$e^x > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

$f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$

$e^{b(x-c)} > 0$

$a \cdot b > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend (sms)

$a \cdot b < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend (smf)

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

$f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1} > 0 \Rightarrow$ sms

$f_4'(x) = -e^{-x} < 0 \Rightarrow$ smf

$f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x} > 0 \Rightarrow$ sms

$f_3'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\cdot x - 1} > 0 \Rightarrow$ sms

Ableitung

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

Ableitung mit Kettenregel

$f(x) = e^{ax} \qquad f'(x) = ae^{ax}$

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d \qquad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \qquad f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1}$

$f_4(x) = e^{-x} \qquad f_4'(x) = -e^{-x}$

$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \qquad f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x}$

Krümmungsverhalten

$f(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x$

$e^x > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt (LK)

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

$f''(x) = a \cdot b^2 e^{b(x-c)}$

$e^{b(x-c)} > 0$

$a > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt (LK)

$a < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt (RK)

$f_2''(x) = 2 \cdot e^{x+1} > 0 \Rightarrow$ LK
$f_4''(x) = e^{-x} > 0 \Rightarrow$ LK
$f_5''(x) = -2 \cdot e^{-x} < 0 \Rightarrow$ RK
$f_3''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2} \cdot x-1} > 0 \Rightarrow$ LK

Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral

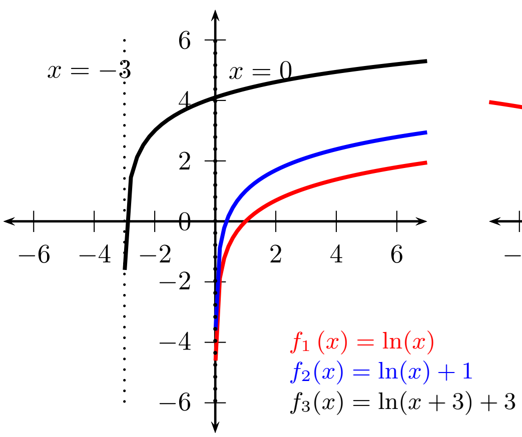
$f(x) = e^x \qquad F(x) = e^x + k$

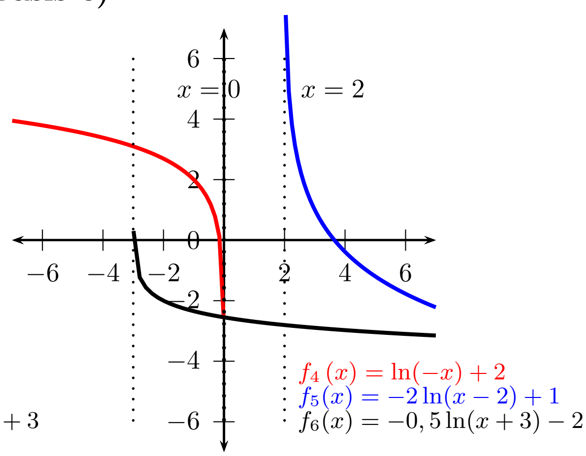
$f(x) = ae^{b(x-c)} \qquad F(x) = \frac{a}{b}e^{b(x-c)} + k$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \qquad F_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2x + c$
$f_4(x) = e^{-x} \qquad F_4(x) = -e^{-x} + c$
$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \qquad F_5(x) = 2 \cdot e^{-x} + 3x + c$
$f_3(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x-1} + 1$
$F_3(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2} \cdot x-1} + x + c = 2e^{\frac{1}{2} \cdot x-1} + x + c$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

4.4.4 Logarithmusfunktion (Basis e)





Formen der Logarithmusfunktion

Logarithmusfunktion

$f(x) = \ln x$

Allgemeine Logarithmusfunktion

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d$

(siehe Funktionen - Logarithmusfunktion)

$f_1(x) = \ln(x)$
$f_2(x) = \ln(x) + 1$
$f_3(x) = \ln(x+3) + 3$
$f_4(x) = ln(-x) + 2$
$f_5(x) = -2\ln(x-2) + 1$
$f_6(x) = -0,5\ln(x+3) - 2$

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \ln x$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
$f(x) = a \ln b(x-c) + d$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Definitionsbereich: $bx - c > 0$
- $b > 0 \quad \mathbb{D} =]c; \infty[$
- $b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c[$

$f_1(x) = \ln(x) \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
$f_2(x) = \ln(x) + 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
$f_3(x) = \ln(x+3) + 3 \quad \mathbb{D} =]-3; \infty[$
$f_4(x) = \ln(-x) + 2 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^-$
$f_5(x) = -2\ln(x-2) + 1 \quad \mathbb{D} =]2; \infty[$
$f_6(x) = -0,5\ln(x+3) - 2 \quad \mathbb{D} =]-3; \infty[$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

$f(x) = \ln(x)$
$\ln(x) = 0 \quad /e$
$x = e^0$
$x = 1$
$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d$
$a\ln(b(x-c)) + d = 0 \qquad / - d$
$a\ln(b(x-c)) = -d \qquad / : a$
$\ln(b(x-c)) = \frac{-d}{a} \qquad /e$
$b(x-c) = e^{\left(\frac{-d}{a}\right)} \qquad / : b \qquad / + c$
$x = \frac{e^{\left(\frac{-d}{a}\right)}}{b} + c$

$f_3(x) = \ln(x+3) + 3$
$\ln(x+3) + 3 = 0$
$\ln(x+3) + 3 = 0 \qquad / - 3$
$\ln(x+3) = -3 \qquad /e^{\cdot\cdot}$
$x + 3 = e^{-3} \qquad / - 3$
$x = e^{-3} - 3$
$x = -2,95$
$f_6(x) = -0,5\ln(x+3) - 2$
$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x+3) - 2 = 0$
$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x+3) - 2 = 0 \qquad / + 2$
$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x+3) = +2 \qquad / : -\frac{1}{2}$
$\ln(x+3) = -4 \qquad /e^{\cdot\cdot}$
$x + 3 = e^{-4} \qquad / - 3$
$x = e^{-4} - 3$
$x = -2,98$

Grenzwert - Asymptoten

$f(x) = \ln(x)$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \Rightarrow$ vertikale Asymptote: $x = 0$
$\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$
$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d$
Schrittweise Berechnung für $b > 0$ und $a > 0$:
$\lim\limits_{x \to \infty} b(\infty - c) = \infty \quad \lim\limits_{x \to \infty} \ln\infty = \infty \quad \lim\limits_{x \to \infty} a\infty + d = \infty$
$\lim\limits_{x \to c^+} b(c^+ - c) = 0^+ \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \ln 0^+ = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} a \cdot (-\infty) + d = -\infty \qquad \Rightarrow$ VA: $x = c$

a	b	Grenzwert $\to \pm\infty$	Asymptote
+	+	$\lim\limits_{x \to \infty} a\ln b(x-c) + d = \infty$	keine
-	+	$\lim\limits_{x \to \infty} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim\limits_{x \to -\infty} a\ln b(x-c) + d = \infty$	keine
-	-	$\lim\limits_{x \to -\infty} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	keine

a	b	Grenzwert $\to c$	Asymptote
+	+	$\lim\limits_{x \to c^+} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	$x = c$
-	+	$\lim\limits_{x \to c^+} a\ln b(x-c) + d = \infty$	$x = c$
+	-	$\lim\limits_{x \to c^-} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	$x = c$
-	-	$\lim\limits_{x \to c^-} a\ln b(x-c) + d = \infty$	$x = c$

$f_5(x) = -2\ln(x-2) + 1 \quad \mathbb{D} =]2; \infty[$
$\lim\limits_{x \to \infty} -2\ln(x-2) + 1$
$\lim\limits_{x \to \infty} \infty - 2 = \infty \quad \lim\limits_{x \to \infty} \ln\infty = \infty \quad \lim\limits_{x \to \infty} -2 \cdot \infty + 1 = -\infty$
$\lim\limits_{x \to \infty} -2\ln(x-2) + 1 = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 2^+} -2\ln(x-2) + 1$
$\lim\limits_{x \to 2^+} (2^+ - 2) = 0^+ \quad \lim\limits_{x \to 2^+} \ln 0^+ = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 2^+} -2 \cdot (-\infty) - 2 = \infty$
$\lim\limits_{x \to 2^+} -2\ln(x-2) + 1 = \infty \qquad VA : x = 2$
$f_4(x) = \ln(-x) + 2 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^-$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(-x) + 2 = \infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \ln(-x) + 2 = -\infty \qquad VA : x = 0$

Ableitung

$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

Ketten- und Quotientenregel :

$f(x) = \ln bx \qquad f'(x) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d \qquad f'(x) = \frac{a \cdot b}{b(x-c)}$

$f''(x) = \frac{-a \cdot b^2}{(b(x-c))^2}$

$f_2(x) = \ln(x) + 1 \qquad f_2'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f_2''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$f_3(x) = \ln(x+3) + 3 \qquad f_3'(x) = \frac{1}{x+3} = (x+3)^{-1}$

$f_3''(x) = -(x+3)^{-2} = \frac{-1}{(x+3)^2}$

$f_4(x) = ln(-x) + 2 \qquad f_4'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f_4''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$f_5(x) = -2\ln(x-2) + 1 \qquad f_5'(x) = \frac{-2}{(x-2)} = -2(x-2)^{-1}$

$f_5''(x) = 2(x-2)^{-2} = \frac{2}{(x-2)^2}$

Monotonieverhalten

$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\frac{1}{x} \Rightarrow$ streng monoton steigend $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d \qquad f'(x) = \frac{a \cdot b}{b(x-c)}$

$b(x-c) > 0$

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

$f_2'(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow$ sms

$f_3'(x) = \frac{1}{x+3} > 0 \Rightarrow$ sms

$f_5'(x) = \frac{-2}{(x-2)} < 0 \Rightarrow$ smf

Krümmungsverhalten

$f(x) = \ln(x) \qquad f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$\frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt (RK)

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d \qquad f''(x) = \frac{-a \cdot b^2}{(b(x-c))^2}$

$(b(x-c))^2 > 0$

$a > 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt (RK)

$a < 0 \Rightarrow$ linkssgekrümmt (LK)

$f_2''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ RK

$f_3''(x) = -(x+3)^{-2} = \frac{-1}{(x+3)^2} < 0 \Rightarrow$ RK

$f_5''(x) = 2(x-2)^{-2} = \frac{2}{(x-2)^2} > 0 \Rightarrow$ LK

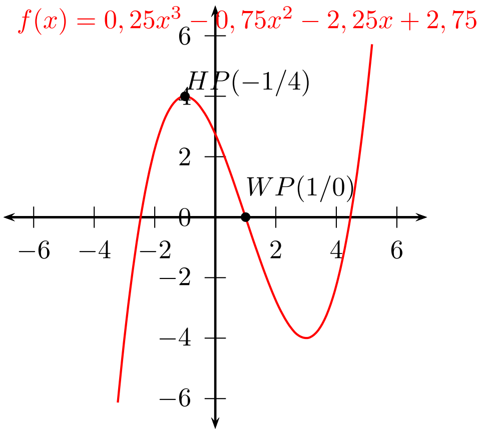
Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral

$f(x) = \ln(x) \qquad F(x) = x\ln(x) - x + c$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

4.5 Aufstellen von Funktionsgleichungen

4.5.1 Ganzrationale Funktion



Eine ganzrationale Funktion vom Grad n ist durch n+1 Bedingungen eindeutig festgelegt. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2}... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

Um die n+1 Koeffizienten $(a_n, a_{n-1}.., a_0)$ berechnen zu können, sind n+1 Gleichungen (n+1 Bedingungen) nötig.

Funktion vom Grad 2

Um die 3 Koeffizienten (a,b,c) berechnen zu können, sind 3 Gleichungen (3 Bedingungen) nötig.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

Funktion vom Grad 3

Um die 4 Koeffizienten (a,b,c,d) berechnen zu können, sind 4 Gleichungen (4 Bedingungen) nötig. $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Funktion vom Grad 4

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Gesucht ist ein Polynom 3. Grades, das bei x = 1 einen Wendepunkt hat, im Punkt P(-1/4) ein Extremum besitzt und bei x = 1 die x-Achse schneidet.

Polynom 3. Grades
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$
Um die 4 Koeffizienten (a,b,c,d) berechnen zu können, sind 4 Gleichungen nötig.
1. Bedingung: Wendepunkt bei $x = 1$
$f''(1) = 0 \qquad 6a \cdot 1 + 2b = 0$
2. Bedingung: Punkt $P(-1/4)$
$f(-1) = 4 \qquad a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 4$
3. Bedingung: Extremwert an der Stelle $x_0 = 1$
$f'(-1) = 0 \qquad 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0$
4.Bedingung: Nullstelle an der Stelle $x_0 = 1$
$f(1) = 0 \qquad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$
Lineares Gleichungssystem lösen:
$6a + 2b = 0$
$-a + b - c + d = 4$
$3a - 2b + c = 0$
$a + b + c + d = 0$
$a = \frac{1}{4}$
$b = -\frac{3}{4}$
$c = -2\frac{1}{4}$
$d == 2\frac{3}{4}$
Funktionsgleichung:
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$

Bedingungen für die Funktion	Gleichung
Punkt $P(x_0/y_0)$	$f(x_0) = y_0$
Nullstelle an der Stelle x_0	$f(x_0) = 0$
Punkt auf der y-Achse y_0	$f(0) = y_0$
Extremwert an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$
Horizontale Tangente an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$
Berührpunkt der x-Achse an der Stelle x_0	$f(x_0) = 0$ $f'(x_0) = 0$
Tangente: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Normale: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = -\frac{1}{m}$
Wendepunkt an der Stelle x_0	$f''(x_0) = 0$
Terrassenpunkt an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m an der Stelle x_0	$f'(x_0) = m$
Hoch-/Tiefpunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$
Terrassenpunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Wendepunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f''(x_0) = 0$
Wendetangente: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m im Punkt P(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Achsensymmetrie $f(x) = f(-x)$	Glieder mit ungeraden Exponenten entfallen
Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x)$	Glieder mit geraden Exponenten entfallen

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable Terme aufstellen