Formelsammlung Geometrie

http://www.fersch.de

1. September 2018

Inhaltsverzeichnis

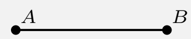
2 Geometrie

2.1 Grundlagen

2.1.1 Definitionen

Strecke $[AB]$

Gerade Linie die durch 2 Endpunkte begrenzt wird



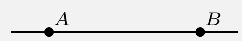
Länge einer Strecke $\overline{AB}$

Entfernung zwischen den Punkten A und B

$\overline{AB} = 3cm$

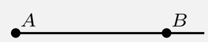
Gerade AB

Unbegrenzte gerade Linie durch 2 Punkte



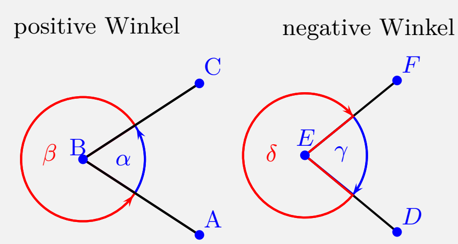
Halbgerade - Strahl $[AB$

Einseitig begrenzte gerade Linie



Winkel

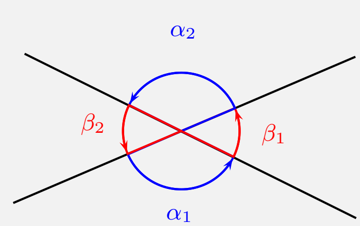
Zwei von einem Punkt (Scheitel) ausgehenden Halbgeraden (Schenkel) schließen einen Winkel ein.
$\alpha = \measuredangle ABC$
Drehsinn entgegen dem Uhrzeigersinn = positiver Winkel
Drehsinn im Uhrzeigersinn = negativer Winkel
spitzer Winkel: $0° < \alpha < 90°$
rechter Winkel: $\alpha = 90°$
stumpfer Winkel: $90° < \alpha < 180°$
gestreckter Winkel: $\alpha = 180°$
überstumpfer Winkel: $180° < \alpha < 360°$
Vollwinkel: $\alpha = 360°$



B Scheitelpunkt
$[BA, [BC$ Schenkel
$\alpha = \measuredangle ABC \qquad \beta = \measuredangle CBA$

Winkel an sich schneidenden Geraden

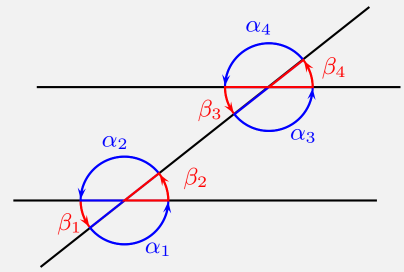
Scheitelwinkel (Gegenwinkel) sind gleich groß.
Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.



Scheitelwinkel: $\alpha_1 = \alpha_2; \beta_1 = \beta_2$
Nebenwinkel: $\alpha_1 + \beta_1 = 180°; \alpha_2 + \beta_2 = 180°$

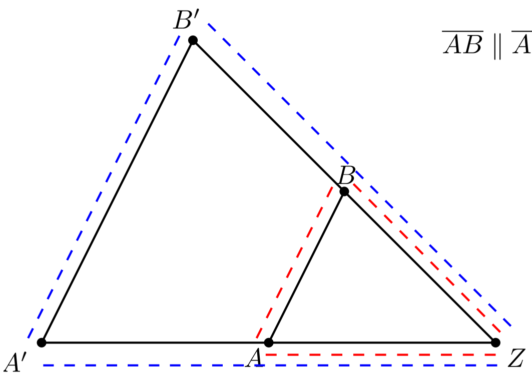
Winkel an parallelen Geraden

Stufenwinkel (F-Winkel) und Wechselwinkel (Z-Winkel) sind gleich groß. Nachbarwinkel (E-Winkel) ergänzen sich zu 180°.

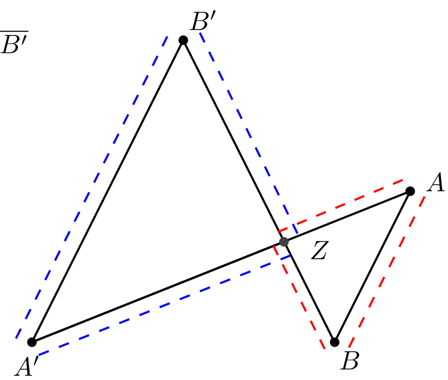


$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$
$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$
$\alpha + \beta = 180°$
Stufenwinkel: $\alpha_1 = \alpha_3; \beta_1 = \beta_3$
Wechselwinkel: $\alpha_2 = \alpha_3; \beta_2 = \beta_3$
Nachbarwinkel: $\alpha_3 + \beta_2 = 180°; \alpha_2 + \beta_3 = 180°$

2.1.2 Strahlensätze



$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$



$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \Leftrightarrow$

$$\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

2.2 Dreieck

2.2.1 Definitionen und Eigenschaften des Dreiecks

Winkel- und Seitenbeziehungen

- Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
- Außenwinkelsumme: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$

$\gamma' = \alpha + \beta; \beta' = \alpha + \gamma; \alpha' = \beta + \gamma;$

- Dreiecksungleichung:

Die Summe zweier Dreiecksseiten ist größer als die dritte Seite.

$a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$

- Der längeren von zwei Seiten liegt der größere Winkel gegenüber.

$a > b \Rightarrow \alpha > \beta \qquad a < b \Rightarrow \alpha < \beta$

$a > c \Rightarrow \alpha > \gamma \qquad a < c \Rightarrow \alpha < \gamma$

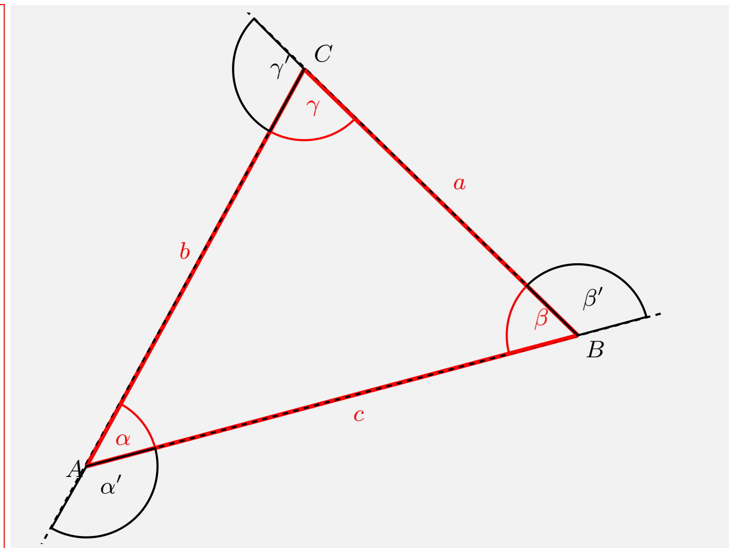
$b > c \Rightarrow \beta > \gamma \qquad b < c \Rightarrow \beta < \gamma$

- Gleichlangen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.

$a = b \Rightarrow \alpha = \beta$

$a = c \Rightarrow \alpha = \gamma$

$b = c \Rightarrow \beta = \gamma$



Höhe

Das Lot von einem Eckpunkt des Dreiecks auf die gegenüberliegende Dreiecksseite. Höhen schneiden sich im Höhenschnittpunkt.

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$

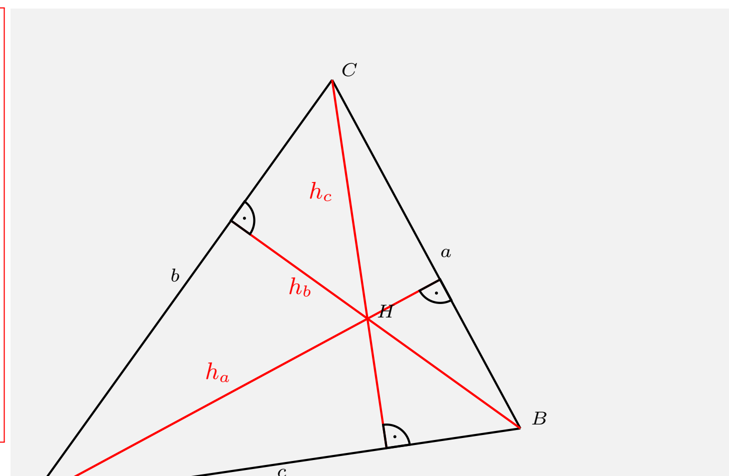
$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

$h_a = c \cdot \sin\beta$

$h_b = a \cdot \sin\gamma$

$h_c = b \cdot \sin\alpha$



Höhen

Winkelhalbierende

Alle Punkte auf einer Winkelhalbierenden haben zu den Schenkeln den gleichen Abstand. Die Winkelhalbierenden schneiden sich im Inkreismittelpunkt. Der Inkreismittelpunkt hat von den drei Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand.

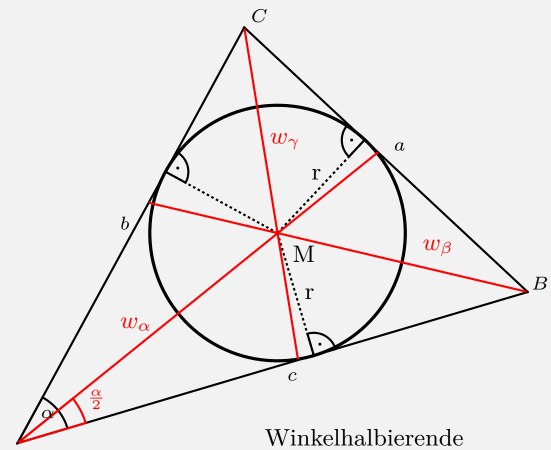
Inkreisradius:

$\rho = r_i = \frac{2 \cdot A}{U} = \frac{2 \cdot A}{a+b+c}$

$\delta_1 = 180° - \beta - \frac{\alpha}{2}$ $\quad w_\alpha = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\delta_1}$

$\delta_2 = 180° - \frac{\beta}{2} - \gamma$ $\quad w_\beta = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\delta_2}$

$\delta_3 = 180° - \alpha - \frac{\gamma}{2}$ $\quad w_\gamma = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\delta_3}$



Winkelhalbierende

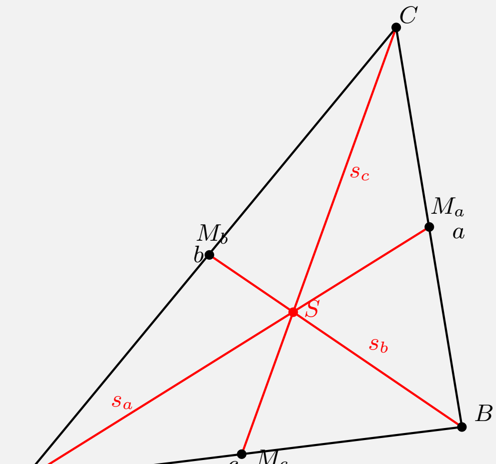
Seitenhalbierende

Strecke vom einem Eckpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

$s_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$

$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$

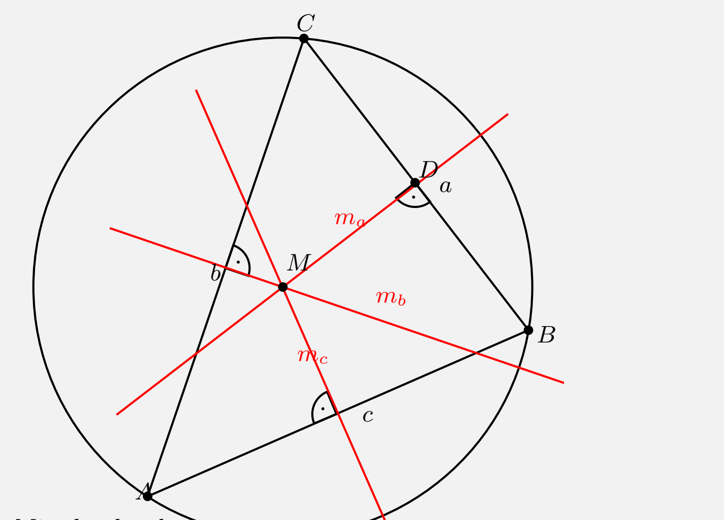


Seitenhalbierende

Mittelsenkrechte

Alle Punkte auf einer Mittelsenkrechte haben von zwei Eckpunkten die gleiche Entfernung. Die Mittelsenkrechten schneiden sich im Umkreismittelpunkt. Der Umkreismittelpunkt hat von den drei Eckpunkten des Dreiecks die gleiche Entfernung.

Umkreisradius: $r_u = \dfrac{a}{2 \cdot \sin\alpha} = \dfrac{b}{2 \cdot \sin\beta} = \dfrac{c}{2 \cdot \sin\gamma}$



Mittelsenkrechte

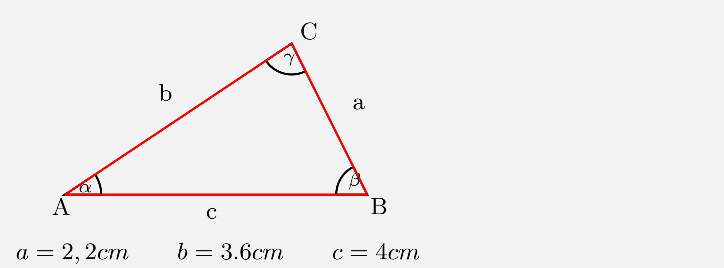
Interaktive Inhalte:
hier klicken

2.2.2 Kongruenzsätze

Seite - Seite - Seite (SSS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

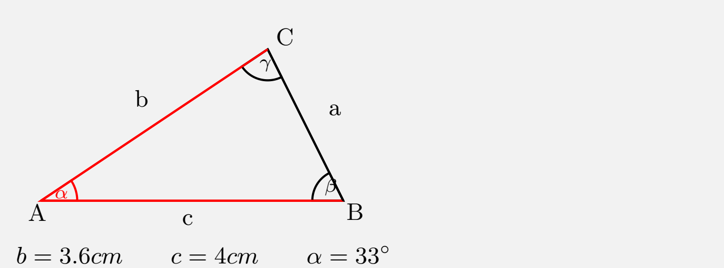
Seite	Seite	Seite
a	b	c



Seite - Winkel - Seite (SWS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Seite	Winkel	Seite
a	β	c
a	γ	b
b	α	c

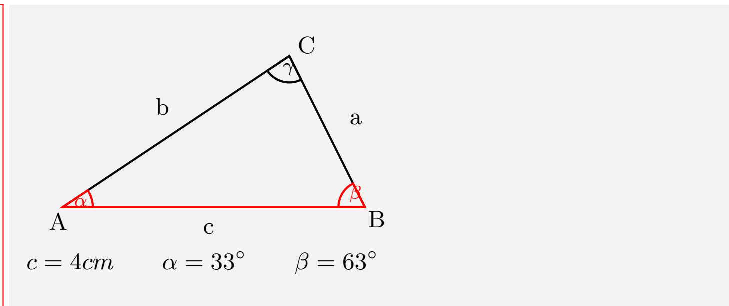


Winkel - Seite - Winkel (WSW,WWS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen.

Winkel	Seite	Winkel
α	c	β
α	b	γ
β	a	γ

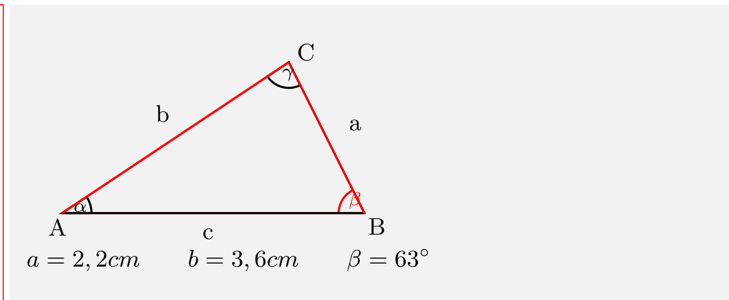
Winkel	Winkel	Seite
α	β	a
α	β	b
α	γ	a
α	γ	c
β	γ	b
β	γ	c



Seite - Seite - Winkel (SsW)

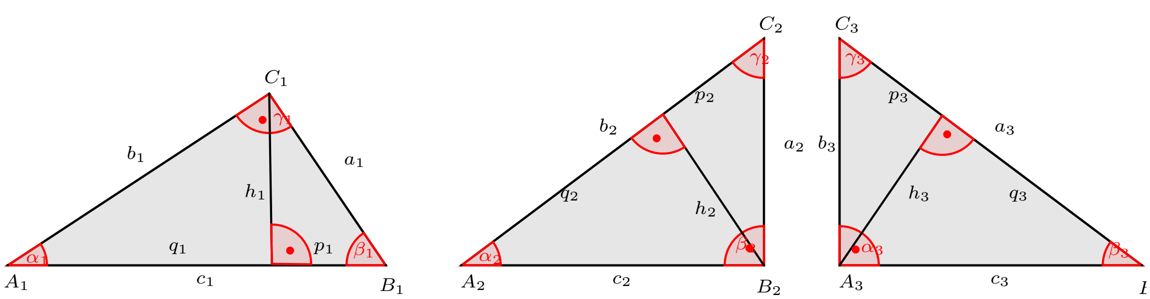
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüber liegenden Winkel (Gegenwinkel) übereinstimmen.

Seite	Seite	Winkel	
a	b	α	a>b
a	b	β	b>a
a	c	α	a>c
a	c	γ	c>a
b	c	β	b>c
b	c	γ	c>b



Interaktive Inhalte:
hier klicken

2.2.3 Pythagoras - Höhensatz - Kathetensatz



Pythagoras

Die Katheten sind die am rechten Winkel anliegenden Seiten. Die Hypotenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber.

• Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.

für $\gamma = 90^\circ$ Katheten a und b Hypotenuse c

$a^2 + b^2 = c^2$

$\triangle A_1B_1C_1$

$\gamma_1 = 90^\circ$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1

$a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$

$c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ $a_1 = \sqrt{c_1^2 - b_1^2}$ $b_1 = \sqrt{c_1^2 - a_1^2}$

$\triangle A_2B_2C_2$

$\beta_2 = 90^\circ$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2

$a_2^2 + c_2^2 = b_2^2$

$b_2 = \sqrt{a_2^2 + c_2^2}$ $a_2 = \sqrt{b_2^2 - c_2^2}$ $c_2 = \sqrt{b_2^2 - a_2^2}$

$\triangle A_3B_3C_3$

$\alpha_3 = 90^\circ$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3

$a_3^2 + b_3^2 = c_3^2$

$a_3 = \sqrt{b_3^2 + c_3^2}$ $b_3 = \sqrt{a_3^2 - c_3^2}$ $c_3 = \sqrt{a_3^2 - b_3^2}$

Kathetensatz

Die Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte.

• Die Kathete im Quadrat ist gleich dem Produkt aus dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse.

für $\gamma = 90^\circ$ $c = p + q$

Katheten a und b Hypotenuse c

Hypotenusenabschnitt p und q

$a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$

$\triangle A_1B_1C_1$

$\gamma_1 = 90^\circ$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1

Hypotenusenabschnitte p_1 und q_1 $c_1 = p_1 + q_1$

$a_1^2 = c_1 \cdot p_1$ $a_1 = \sqrt{c_1 \cdot p_1}$ $c_1 = \frac{a_1^2}{p_1}$ $p_1 = \frac{a_1^2}{c_1}$

$b_1^2 = c_1 \cdot q_1$ $b_1 = \sqrt{c_1 \cdot q_1}$ $c_1 = \frac{b_1^2}{q_1}$ $q_1 = \frac{b_1^2}{c_1}$

$\triangle A_2B_2C_2$

$\beta_2 = 90^\circ$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2

Hypotenusenabschnitte p_2 und q_2 $b_2 = p_2 + q_2$

$a_2^2 = b_2 \cdot p_2$ $a_2 = \sqrt{b_2 \cdot p_2}$ $b_2 = \frac{a_2^2}{p_2}$ $p_2 = \frac{a_2^2}{b_2}$

$c_2^2 = b_2 \cdot q_2$ $c_2 = \sqrt{b_2 \cdot q_2}$ $b_2 = \frac{c_2^2}{q_2}$ $q_2 = \frac{c_2^2}{b_2}$

$\triangle A_3B_3C_3$

$\alpha_3 = 90^\circ$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3

Hypotenusenabschnitte p_3 und q_3 $a_3 = p_3 + q_3$

$b_3^2 = a_3 \cdot p_3$ $b_3 = \sqrt{a_3 \cdot p_3}$ $a_3 = \frac{b_3^2}{p_3}$ $p_3 = \frac{b_3^2}{a_3}$

$c_3^2 = a_3 \cdot q_3$ $c_3 = \sqrt{a_3 \cdot q_3}$ $a_3 = \frac{c_3^2}{q_3}$ $q_3 = \frac{c_3^2}{a_3}$

Höhensatz

Die Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte.

• Die Höhe im Quadrat ist gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte.

für $\gamma = 90^\circ$ $c = p + q$

Hypotenusenabschnitte p und q

$h^2 = p \cdot q$

$\triangle A_1B_1C_1$

$\gamma_1 = 90^\circ$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1

Hypotenusenabschnitte p_1 und q_1 $c_1 = p_1 + q_1$

$h_1^2 = p_1 \cdot q_1$ $h_1 = \sqrt{p_1 \cdot q_1}$ $p_1 = \frac{h_1^2}{q_1}$ $q_2 = \frac{h_1^2}{p_1}$

$\triangle A_2B_2C_2$

$\beta_2 = 90^\circ$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2

Hypotenusenabschnitte p_2 und q_2 $b_2 = p_2 + q_2$

$h_2^2 = p_2 \cdot q_2$ $h_2 = \sqrt{p_2 \cdot q_2}$ $p_2 = \frac{h_2^2}{q_2}$ $q_2 = \frac{h_2^2}{p_2}$

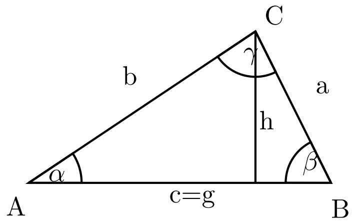
$\triangle A_3B_3C_3$

$\alpha_3 = 90^\circ$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3

Hypotenusenabschnitte p_3 und q_3 $a_3 = p_3 + q_3$

$h_3^2 = p_3 \cdot q_3$ $h_3 = \sqrt{p_3 \cdot q_3}$ $p_3 = \frac{h_3^2}{q_3}$ $q_3 = \frac{h_3^2}{p_3}$

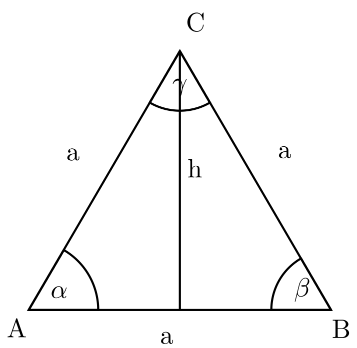
2.2.4 Allgemeines Dreieck



$A = \frac{g \cdot h}{2}$	g Grundlinie m h Höhe m A Fläche m^2 $g = \frac{A \cdot 2}{h}$ $h = \frac{A \cdot 2}{g}$
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin(\gamma)$	b Länge der Seite m a Länge der Seite m γ Winkel gamma $^\circ$ A Fläche m^2
$U = a + b + c$	c Länge der Seite m b Länge der Seite m a Länge der Seite m U Umfang m

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{g \cdot h}{2}$ $g = \frac{A \cdot 2}{h}$ $h = \frac{A \cdot 2}{g}$ $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin(\gamma)$ $U = a + b + c$

2.2.5 Gleichseitiges Dreieck

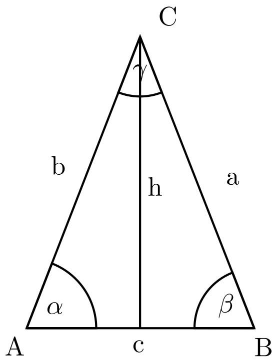


$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ $a = b = c$

$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$	a Grundlinie a m A Fläche m^2 $a = \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\sqrt{3}}}$
$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$	h Höhe m a Grundlinie a m $a = \frac{h \cdot 2}{\sqrt{3}}$

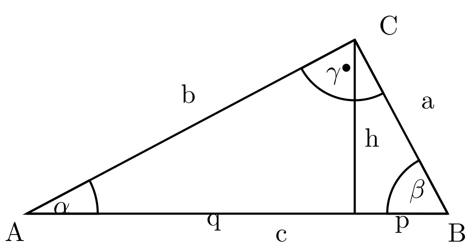
Interaktive Inhalte:
$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ $a = \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\sqrt{3}}}$ $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ $a = \frac{h \cdot 2}{\sqrt{3}}$

2.2.6 Gleichschenkliges Dreieck



Basiswinkel sind gleich	$\alpha = \beta$
Schenkel sind gleich lang	$a = b$

2.2.7 Rechtwinkliges Dreieck



$A = \frac{a \cdot b}{2}$

b	Ankathete zu α	m
a	Gegenkathete zu α	m
A	Fläche	m^2

$a = \frac{A \cdot 2}{b}$ $\quad b = \frac{A \cdot 2}{a}$

Phytagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

a	Gegenkathete zu α	m
b	Ankathete zu α	m
c	Hypotenuse	m

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $\quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

q	Hypotenusenabschnitt	m
p	Hypotenusenabschnitt	m
h	Höhe	m

$h = \sqrt{p \cdot q}$ $\quad q = \frac{h^2}{p}$ $\quad p = \frac{h^2}{q}$

Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$

p	Hypotenusenabschnitt	m
c	Hypotenuse	m
a	Gegenkathete zu α	m

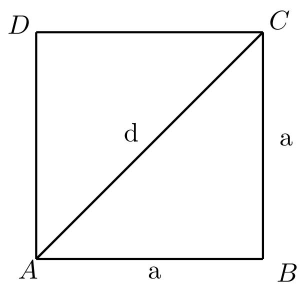
$a = \sqrt{c \cdot p}$ $\quad c = \frac{a^2}{p}$ $\quad p = \frac{a^2}{c}$

Interaktive Inhalte:

$A = \frac{a \cdot b}{2}$ | $a = \frac{A \cdot 2}{b}$ | $b = \frac{A \cdot 2}{a}$ | $a^2 + b^2 = c^2$ | $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ | $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ | $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ | $h^2 = p \cdot q$ | $h = \sqrt{p \cdot q}$ | $q = \frac{h^2}{p}$ | $p = \frac{h^2}{q}$ | $a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$ | $a = \sqrt{c \cdot p}$ | $c = \frac{a^2}{p}$ | $p = \frac{a^2}{c}$

2.3 Viereck

2.3.1 Quadrat



$A = a^2$

a	Seite	m
A	Fläche	m^2

$a = \sqrt{A}$

$U = 4 \cdot a$

a	Seite	m
U	Umfang	m

$a = \frac{U}{4}$

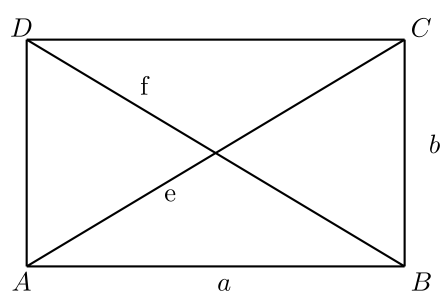
$d = a \cdot \sqrt{2}$

a	Seite	m
d	Diagonale	m

$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$

Interaktive Inhalte:
$A = a^2$ $a = \sqrt{A}$ $U = 4 \cdot a$ $a = \frac{U}{4}$ $d = a \cdot \sqrt{2}$ $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$

2.3.2 Rechteck



$A = a \cdot b$

b	Breite	m
a	Länge	m
A	Fläche	m^2

$a = \frac{A}{b}$ $b = \frac{A}{a}$

$U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

b	Breite	m
a	Länge	m
U	Umfang	m

$a = \frac{U-2 \cdot b}{2}$ $b = \frac{U-2 \cdot a}{2}$

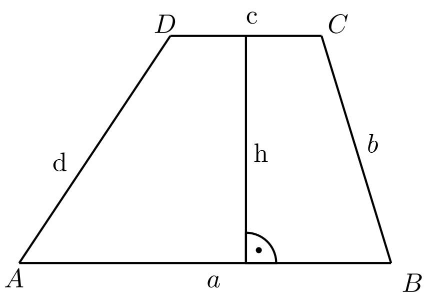
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

b	Breite	m
a	Länge	m
d	Diagonale	m

$b = \sqrt{d^2 - a^2}$ $\quad a = \sqrt{d^2 - b^2}$

Interaktive Inhalte:
$A = a \cdot b$ $\quad a = \frac{A}{b}$ $\quad b = \frac{A}{a}$ $\quad U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ $\quad a = \frac{U-2\cdot b}{2}$ $\quad b = \frac{U-2\cdot a}{2}$ $\quad d = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad b = \sqrt{d^2 - a^2}$ $\quad a = \sqrt{d^2 - b^2}$

2.3.3 Trapez



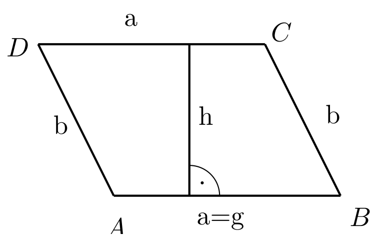
$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

c	Grundlinie c	m
a	Grundlinie a	m
h	Höhe	m
A	Fläche	m^2

$a = \frac{2\cdot A}{h} - c$ $\quad c = \frac{2\cdot A}{h} - a$ $\quad h = \frac{2\cdot A}{a+c}$

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ $\quad a = \frac{2\cdot A}{h} - c$ $\quad c = \frac{2\cdot A}{h} - a$ $\quad h = \frac{2\cdot A}{a+c}$

2.3.4 Parallelogramm



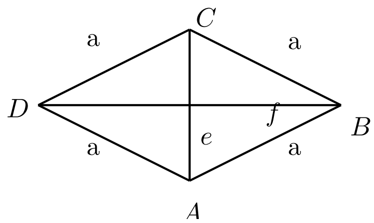
$A = g \cdot h$

h	Höhe	m
g	Grundlinie	m
A	Fläche	m^2

$g = \frac{A}{h}$ $\quad h = \frac{A}{g}$

Interaktive Inhalte:
$A = g \cdot h$ $\quad g = \frac{A}{h}$ $\quad h = \frac{A}{g}$

2.3.5 Raute



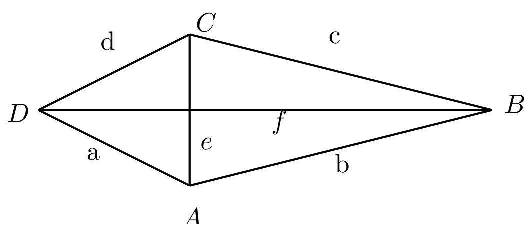
$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

f	Diagonale f	m
e	Diagonale e	m
A	Fläche	m^2

$e = \frac{2 \cdot A}{f}$ $f = \frac{2 \cdot A}{e}$

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ $e = \frac{2 \cdot A}{f}$ $f = \frac{2 \cdot A}{e}$

2.3.6 Drachen



$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

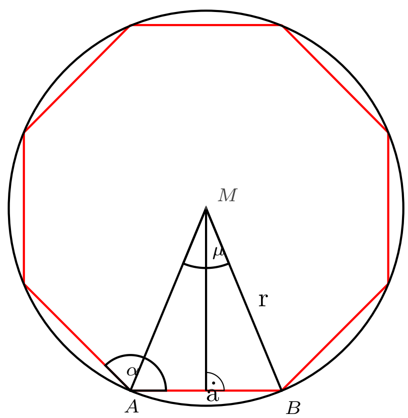
f	Diagonale f	m
e	Diagonale e	m
A	Fläche	m^2

$e = \frac{2 \cdot A}{f}$ $f = \frac{2 \cdot A}{e}$

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ $e = \frac{2 \cdot A}{f}$ $f = \frac{2 \cdot A}{e}$

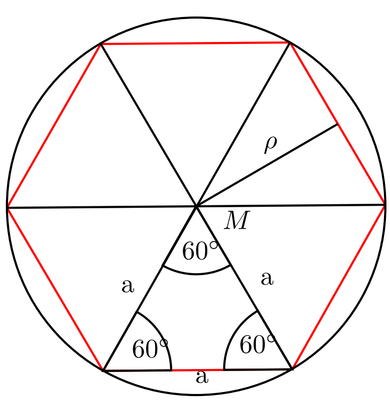
2.4 Polygone (n-Ecken)

2.4.1 Regelmäßiges n-Eck



Seitenlänge n-Eck: $a = 2 \cdot r \sin \frac{\mu}{2}$
Mittelpunktswinkel: $\mu = \frac{360°}{n}$
Innenwinkel: $\alpha = 180° - \mu$
Fläche: $A = n \cdot A_D = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \mu$

2.4.2 Sechseck



Seitenlänge 6-Eck: $a = r$
Mittelpunktswinkel: $\mu = \frac{360°}{6} = 60°$
Innenwinkel: $\alpha = 180° - 60° = 120°$

$A = \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \sqrt{3}$

a	Grundlinie a	m
A	Fläche	m^2

$a = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}}}$

$$\boxed{\rho = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}}$$

ρ	Inkreisradius	m
a	Grundlinie a	m

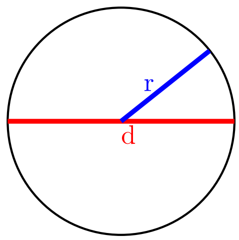
$a = \frac{\rho \cdot 2}{\sqrt{3}}$

Interaktive Inhalte:

$\boxed{A = \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \sqrt{3}}$ $\boxed{a = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}}}}$ $\boxed{\rho = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}}$ $\boxed{a = \frac{\rho \cdot 2}{\sqrt{3}}}$

2.5 Kreis

2.5.1 Kreis



$d = 2 \cdot r$

r	Radius	m
d	Durchmesser	m

$r = \frac{d}{2}$

$A = r^2 \cdot \pi$

π	Kreiszahl	$3,1415927$
r	Radius	m
A	Fläche	m^2

$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

$U = 2 \cdot r \cdot \pi$

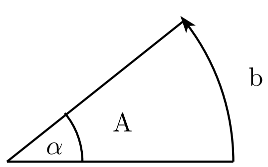
π	Kreiszahl	$3,1415927$
r	Radius	m
U	Umfang	m

$r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$

Interaktive Inhalte:

$d = 2 \cdot r$ $r = \frac{d}{2}$ $A = r^2 \cdot \pi$ $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ $r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$

2.5.2 Kreissektor (Grad)



$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$

α	Winkel	$^\circ$
π	Kreiszahl	$3,1415927$
r	Radius	m
A	Fläche	m^2

$r = \sqrt{\frac{A \cdot 360}{\alpha \cdot \pi}} \qquad \alpha = \frac{A \cdot 360}{r^2 \cdot \pi}$

$b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$

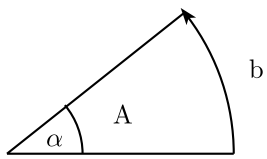
π	Kreiszahl	$3,1415927$
r	Radius	m
α	Winkel	$^\circ$
b	Kreisbogen	m

$r = \frac{b \cdot 360}{\alpha \cdot \pi \cdot 2} \qquad \alpha = \frac{b \cdot 360}{r \cdot \pi \cdot 2}$

Interaktive Inhalte:

$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ $r = \sqrt{\frac{A \cdot 360}{\alpha \cdot \pi}}$ $\alpha = \frac{A \cdot 360}{r^2 \cdot \pi}$ $b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ $r = \frac{b \cdot 360}{\alpha \cdot \pi \cdot 2}$ $\alpha = \frac{b \cdot 360}{r \cdot \pi \cdot 2}$

2.5.3 Kreissektor (Bogenmaß)



$A = \frac{r^2 \cdot x}{2}$

x	Winkel x	rad
r	Radius	m
A	Fläche	m^2

$r = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{x}}$ $x = \frac{A \cdot 2}{r^2}$

$b = r \cdot x$

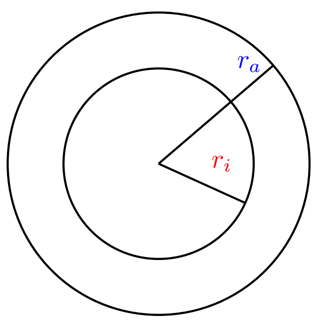
r	Radius	m
x	Winkel x	rad
b	Kreisbogen	m

$r = \frac{b}{x}$ $x = \frac{b}{r}$

Interaktive Inhalte:

$A = \frac{r^2 \cdot x}{2}$ $r = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{x}}$ $x = \frac{A \cdot 2}{r^2}$ $b = r \cdot x$ $r = \frac{b}{x}$ $x = \frac{b}{r}$ hier klicken

2.5.4 Kreisring



$A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi$

π	Kreiszahl		$3,1415927$
r_a	Radius (außerer Kreis)	m	
r_i	Radius (innerer Kreis)	m	
A	Fläche	m^2	

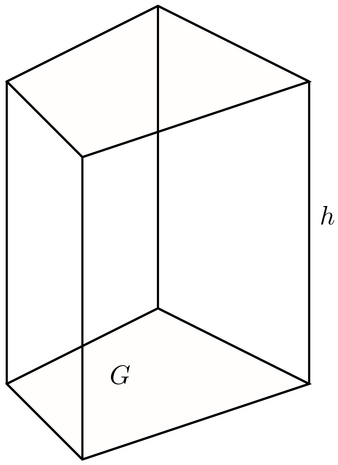
$r_a = \sqrt{\frac{A}{\pi} + r_i^2}$ $r_i = \sqrt{r_a^2 - \frac{A}{\pi}}$

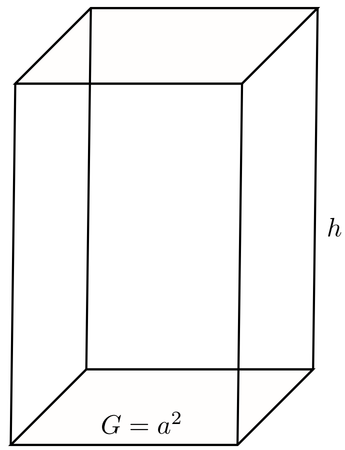
Interaktive Inhalte:

$A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi$ $r_a = \sqrt{\frac{A}{\pi} + r_i^2}$ $r_i = \sqrt{r_a^2 - \frac{A}{\pi}}$

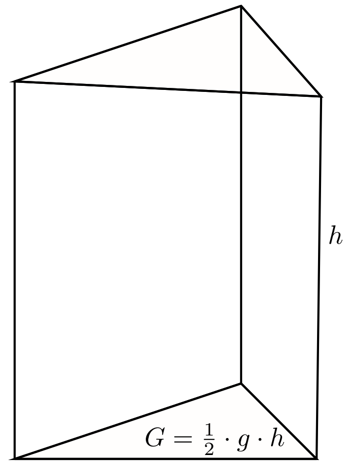
2.6 Stereometrie

2.6.1 Prisma





Quadratisches Prisma



Dreiseitiges Prisma

$\boxed{V = G \cdot h}$

h	Körperhöhe	m
G	Grundfläche	m^2
V	Volumen	m^3

$G = \frac{V}{h}$ $\quad h = \frac{V}{G}$

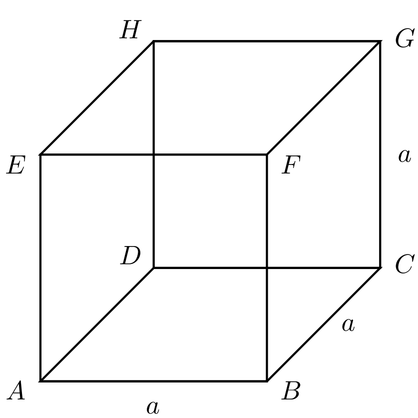
$\boxed{O = 2 \cdot G + M}$

M	Mantelfläche	m^2
G	Grundfläche	m^2
O	Oberfläche	m^2

$G = \frac{O-M}{2}$ $\quad M = O - 2 \cdot G$

Interaktive Inhalte:
$V = G \cdot h$ $\quad G = \frac{V}{h}$ $\quad h = \frac{V}{G}$ $\quad O = 2 \cdot G + M$ $\quad G = \frac{O-M}{2}$ $\quad M = O - 2 \cdot G$

2.6.2 Würfel



$\boxed{V = a^3}$

a	Seite	m
V	Volumen	m^3

$a =^3 \sqrt{V}$

$O = 6 \cdot a^2$

a	Seite	m
O	Oberfläche	m^2

$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$

$d = a \cdot \sqrt{3}$

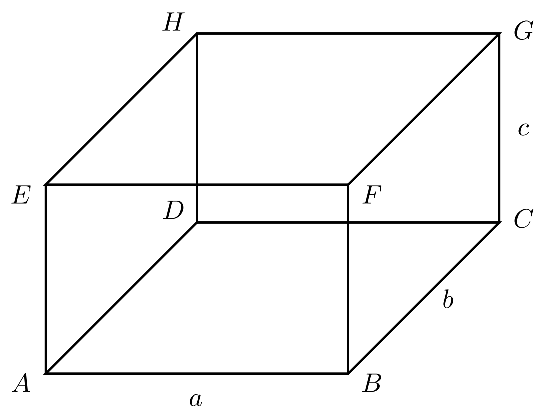
a	Seite	m
d	Raumdiagonale	m

$a = \frac{d}{\sqrt{3}}$

Interaktive Inhalte:

$V = a^3$ | $a =^3 \sqrt{V}$ | $O = 6 \cdot a^2$ | $a = \sqrt{\frac{O}{6}}$ | $d = a \cdot \sqrt{3}$ | $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$

2.6.3 Quader



$V = a \cdot b \cdot c$

c	Höhe	m
b	Breite	m
a	Länge	m
V	Volumen	m^3

$a = \frac{V}{b \cdot c}$ $\quad b = \frac{V}{a \cdot c}$ $\quad c = \frac{V}{b \cdot a}$

$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

c	Höhe	m
b	Breite	m
a	Länge	m
O	Oberfläche	m^2

$a = \frac{O - 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot (b+c)}$ $\quad b = \frac{O - 2 \cdot a \cdot c}{2 \cdot (a+c)}$ $\quad c = \frac{O - 2 \cdot b \cdot a}{2 \cdot (b+a)}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

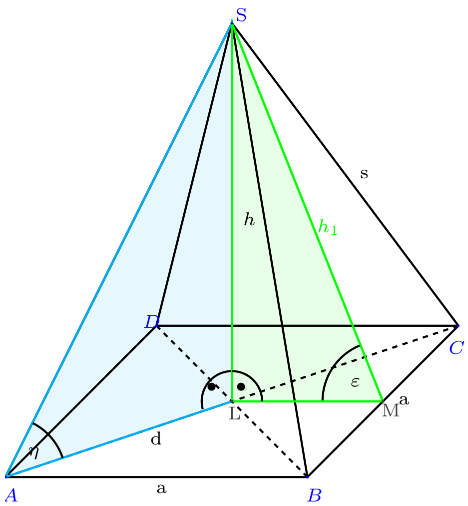
c	Höhe	m
b	Breite	m
a	Länge	m
d	Raumdiagonale	m

$a = \sqrt{d^2 - b^2 - c^2}$ $\quad b = \sqrt{d^2 - a^2 - c^2}$ $\quad c = \sqrt{d^2 - b^2 - a^2}$

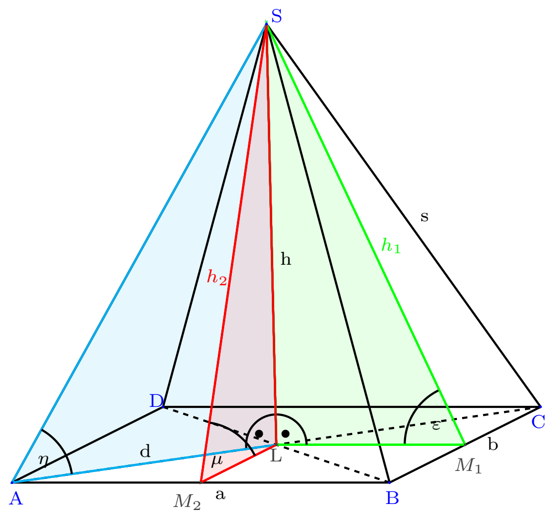
Interaktive Inhalte:

$V = a \cdot b \cdot c$ | $a = \frac{V}{b \cdot c}$ | $b = \frac{V}{a \cdot c}$ | $c = \frac{V}{b \cdot a}$ | $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ | $a = \frac{O - 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot (b+c)}$ | $b = \frac{O - 2 \cdot a \cdot c}{2 \cdot (a+c)}$ | $c = \frac{O - 2 \cdot b \cdot a}{2 \cdot (b+a)}$ | $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ | $a = \sqrt{d^2 - b^2 - c^2}$ | $b = \sqrt{d^2 - a^2 - c^2}$ | $c = \sqrt{d^2 - b^2 - a^2}$

2.6.4 Pyramide



Quadratische Grundfläche



Rechteckige Grundfläche

Volumen

$$\boxed{V = \frac{1}{3} G \cdot h}$$

Körperhöhe	h	m	Meter
Grundfläche	G	m^2	Quadratmeter
Volumen	V	m^3	Kubikmeter

$G = \frac{3 \cdot V}{h}$ $\qquad h = \frac{3 \cdot V}{G}$

Oberfläche

$$\boxed{O = G + M}$$

Grundfläche	G	m^2	Quadratmeter
Mantelfläche	M	m^2	Quadratmeter
Oberfläche	O	m^2	Quadratmeter

$G = O - M \qquad M = O - G$

Quadratische Pyramide

Pythagoras im $\triangle ABC$ $\quad d^2 = a^2 + a^2 \quad d = a\sqrt{2}$

Pythagoras im $\triangle LMS$ $\quad h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

Pythagoras im $\triangle ALS$ $\quad s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$

Mantelfläche $\quad M = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1$

Grundfläche $\quad G = a^2$

Oberfläche $\quad O = G + M$

Volumen $\quad V = \frac{1}{3} G \cdot h \quad V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$

Winkel zwischen der Seitenkante und der Grundfläche

$\measuredangle CAS \quad \tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2} d}$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle BCS$ und der Grundfläche

$\measuredangle SML \quad \tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2} a}$

Pythagoras im $\triangle ABC$ $\quad d = \sqrt{a^2 + a^2}$

$d = \sqrt{(3m)^2 + (3m)^2} = 4,24m$

Pythagoras im $\triangle LM_1S$ $\quad h_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$

$h_1 = \sqrt{\left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,22m$

Pythagoras im $\triangle ALS$ $\quad s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2}$

$s = \sqrt{\left(\frac{4,24m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,43m$

Mantelfläche $\quad M = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1$

$M = 4 \cdot \frac{1}{2} 3m \cdot 5,22m = 31,3m^2$

Grundfläche $\quad G = a^2$

$G = (3m)^2 = 9m^2$

Oberfläche $\quad O = G + M$

$O = 9m^2 + 31,3m^2 = 40,3m^3$

Volumen $\quad V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} (3m)^2 \cdot 5m = 15m^3$

$\measuredangle CAS \quad \tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2} d}$

$\tan \eta = \frac{5m}{\frac{1}{2} 4,24m}$

$\eta = 67^\circ$

$\measuredangle SM_1L \quad \tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2} a}$

$\tan \epsilon = \frac{5m}{\frac{1}{2} 3m}$

$\epsilon = 73,3^\circ$

Rechteckige Pyramide

Pythagoras im $\triangle ABC$ $\quad d^2 = a^2 + b^2$

Pythagoras im $\triangle LM_1S$ $\quad h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

Pythagoras im $\triangle LM_2S$ $\quad h_2^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$

Pythagoras im $\triangle ALS$ $\quad s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$

Mantelfläche $\quad M = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_2 + 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot h_1$

Grundfläche $\quad G = a \cdot b$

Oberfläche $\quad O = G + M$

Volumen $\quad V = \frac{1}{3} G \cdot h \quad V = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot h$

Winkel zwischen der Seitenkante und der Grundfläche

$\measuredangle CAS \quad \tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle BCS$ und der Grundfläche

$\measuredangle SM_1L \quad \tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle ABC$ und der Grundfläche

$\measuredangle SM_2L \quad \tan \mu = \frac{h}{\frac{1}{2}b}$

Pythagoras im $\triangle ABC$ $\quad d = \sqrt{a^2 + b^2}$

$d = \sqrt{(3m)^2 + (4m)^2} = 5m$

Pythagoras im $\triangle LM_1S$ $\quad h_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$

$h_1 = \sqrt{\left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,22m$

Pythagoras im $\triangle LM_2S$ $\quad h_2 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2}$

$h_2 = \sqrt{\left(\frac{4m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,39m$

Pythagoras im $\triangle ALS$ $\quad s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2}$

$s = \sqrt{\left(\frac{5m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,59m$

Mantelfläche $\quad M = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_2 + 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot h_1$

$M = 2 \cdot \frac{1}{2} 3m \cdot 5,39m + 2 \cdot \frac{1}{2} 4m \cdot 5,22m = 37m^2$

Grundfläche $\quad G = a \cdot b$

$G = 3m \cdot 4m = 12m^2$

Oberfläche $\quad O = G + M$

$O = 12m^2 + 37m^2 = 49m^3$

Volumen $\quad V = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot h$

$V = \frac{1}{3} 3m \cdot 4m \cdot 5m = 20m^3$

$\measuredangle CAS \quad \tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$

$\tan \eta = \frac{5m}{\frac{1}{2}5m}$

$\eta = 63,4^\circ$

$\measuredangle SM_1L \quad \tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

$\tan \epsilon = \frac{5m}{\frac{1}{2}3m}$

$\epsilon = 73,3^\circ$

$\measuredangle SM_2L \quad \tan \mu = \frac{h}{\frac{1}{2}b}$

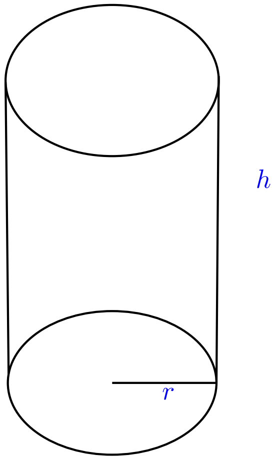
$\tan \mu = \frac{5m}{\frac{1}{2}4m}$

$\mu = 68,2^\circ$

Interaktive Inhalte:

$V = \frac{1}{3} G \cdot h$ | $G = \frac{3 \cdot V}{h}$ | $h = \frac{3 \cdot V}{G}$ | $O = G + M$ | $G = O - M$ | $M = O - G$ | Rechteckige Pyramide | Quadratische

2.6.5 Kreiszylinder



$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

h	Körperhöhe	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
V	Volumen	m^3	

$r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$ $\quad h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$

$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$

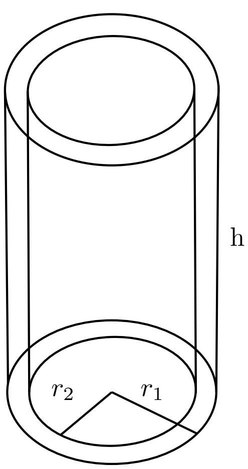
h	Körperhöhe	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
O	Oberfläche	m^2	

$r = 0,5 \cdot (-h + \sqrt{h^2 + \frac{O}{\pi}})$ $\quad h = \frac{0-2 \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot r \cdot \pi}$

Interaktive Inhalte:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ $\quad r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$ $\quad h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$ $\quad O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$ $\quad r = 0,5 \cdot (-h + \sqrt{h^2 + \frac{O}{\pi}})$ $\quad h = \frac{0-2 \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot r \cdot \pi}$

2.6.6 Hohlzylinder



$V=(r_1^2-r_2^2)\cdot\pi\cdot h$

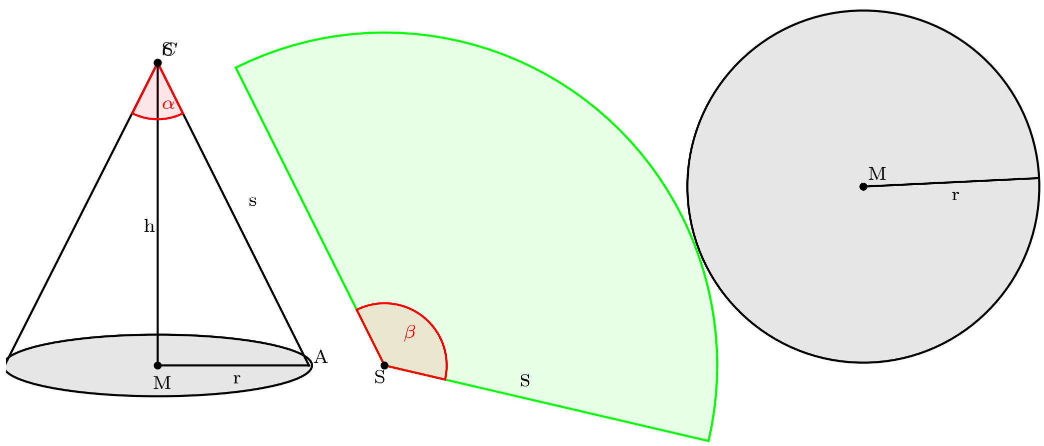
h	Körperhöhe	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
r_2	Radius 2	m	
r_1	Radius 1	m	
V	Volumen	m^3	

$r_1=\sqrt{\frac{V}{\pi\cdot h}+r_2^2}$ $\quad r_2=\sqrt{r_1^2-\frac{V}{\pi\cdot h}}$ $\quad h=\frac{V}{(r_1^2-r_2^2)\cdot\pi}$

Interaktive Inhalte:

$V=(r_1^2-r_2^2)\cdot\pi\cdot h$ $\quad r_1=\sqrt{\frac{V}{\pi\cdot h}+r_2^2}$ $\quad r_2=\sqrt{r_1^2-\frac{V}{\pi\cdot h}}$ $\quad h=\frac{V}{(r_1^2-r_2^2)\cdot\pi}$

2.6.7 Kreiskegel



$V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h$

h	Höhe	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
V	Volumen	m^3	

$r=\sqrt{\frac{3\cdot V}{\pi\cdot h}}$ $\quad h=\frac{3\cdot V}{r^2\cdot\pi}$

$O=r\cdot\pi\cdot(r+s)$

s	Mantellinie	m	
r	Radius	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
O	Oberfläche	m^2	

$s=\frac{O}{r\cdot\pi}-r$ $\quad r=\frac{-\pi\cdot s+\sqrt{(\pi\cdot s)^2+4\cdot\pi\cdot O}}{2\cdot\pi}$

$M=r\cdot\pi\cdot s$

s	Mantellinie	m	
r	Radius	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
M	Mantelfläche	m^2	

$s=\frac{M}{r\cdot\pi}$ $\quad r=\frac{M}{s\cdot\pi}$

$s=\sqrt{h^2+r^2}$

s	Mantellinie	m
r	Radius	m
h	Höhe	m

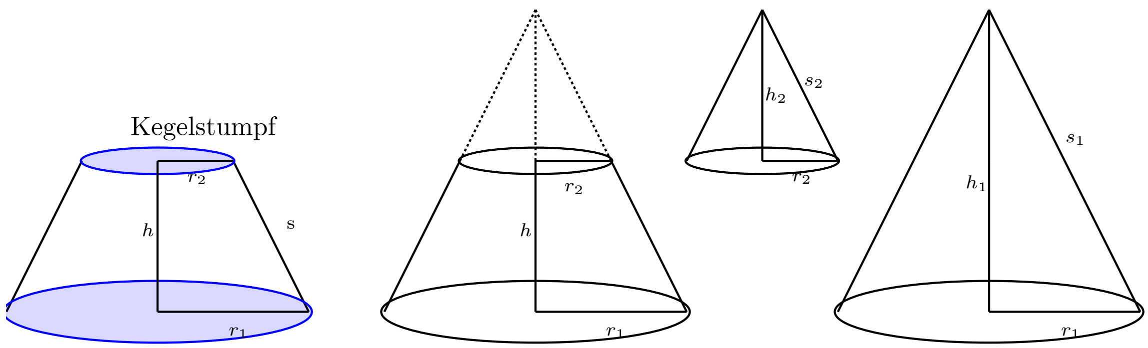
$r=\sqrt{s^2-h^2}$ $\quad h=\sqrt{s^2-r^2}$

Interaktive Inhalte:

$V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h$ $\quad r=\sqrt{\frac{3\cdot V}{\pi\cdot h}}$ $\quad h=\frac{3\cdot V}{r^2\cdot\pi}$ $\quad O=r\cdot\pi\cdot(r+s)$ $\quad s=\frac{O}{r\cdot\pi}-r$ $\quad r=\frac{-\pi\cdot s+\sqrt{(\pi\cdot s)^2+4\cdot\pi\cdot O}}{2\cdot\pi}$ $\quad M=r\cdot\pi\cdot s$

$s = \frac{M}{r \cdot \pi}$ $r = \frac{M}{s \cdot \pi}$ $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ $r = \sqrt{s^2 - h^2}$ $h = \sqrt{s^2 - r^2}$

2.6.8 Kegelstumpf



Kegelstumpf

Strahlensatz

$\frac{h_2}{h_1} = \frac{r_2}{r_1}$	$\frac{s_2}{s_1} = \frac{r_2}{r_1}$
$h_1 = h_2 + h$	$s_1 = s_2 + s$
$\frac{h_2}{h_2 + h} = \frac{r_2}{r_1}$	$\frac{s_2}{s_2 + s} = \frac{r_2}{r_1}$
$h_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot (h_2 + h)$	$s_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot (s_2 + s)$
$h_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot h_2 + r_2 \cdot h$	$s_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot s_2 + r_2 \cdot s$
$h_2 \cdot r_1 - r_2 \cdot h_2 = r_2 \cdot h$	$s_2 \cdot r_1 - r_2 \cdot s_2 = r_2 \cdot s$
$h_2 \cdot (r_1 - r_2) = r_2 \cdot h$	$s_2 \cdot (r_1 - r_2) = r_2 \cdot s$
$h_2 = \frac{r_2 \cdot h}{r_1 - r_2}$	$s_2 = \frac{r_2 \cdot s}{r_1 - r_2}$
$h_1 = h_2 + h$	$s_1 = s_2 + s$

Pythagoras

$s_2^2 = r_2^2 + h_2^2 \quad s_1^2 = r_1^2 + h_1^2$

Mantelfläche $M = r_1 \cdot \pi \cdot s_1 - r_2 \cdot \pi \cdot s_2$

Grund- und Deckfläche $G = r_1^2 \pi \quad D = r_2^2 \pi$

Oberfläche $O = G + D + M$

Volumen $V = \frac{1}{3} r_1^2 \cdot \pi \cdot h_1 - \frac{1}{3} r_2^2 \cdot \pi \cdot h_2$

$h = 5m$
$\pi = 3,14$
$r_2 = 3m$
$r_1 = 4m$
$h_2 = \frac{r_2 \cdot h}{r_1 - r_2}$
$h_2 = \frac{3m \cdot 5m}{4m - 3m} = 15m$
$h_1 = h_2 + h$
$h_1 = 15m + 5m$

Pythagoras

$s_2 = \sqrt{r_2^2 + h_2^2} \quad s_1 = \sqrt{r_1^2 + h_1^2}$
$s_2 = \sqrt{(3m)^2 + (15m)^2} = 15,3m$
$s_1 = \sqrt{(4m)^2 + (20m)^2} = 20,4m$

Mantelfläche $M = r_1 \cdot \pi \cdot s_1 - r_2 \cdot \pi \cdot s_2$
$M = 4m \cdot \pi \cdot 20,4m - 3m \cdot \pi \cdot 15,3m = 112m^2$

Grund- und Deckfläche $G = r_1^2 \pi \quad D = r_2^2 \pi$
$G = (4m)^2 \pi = 50,3m^2$
$D = (3m)^2 \pi = 28,3m^2$

Oberfläche $O = G + D + M$
$O = 50,3m^2 + 28,3m^2 + 112m^2 = 191m^2$

Volumen $V = \frac{1}{3} r_1^2 \cdot \pi \cdot h_1 - \frac{1}{3} r_2^2 \cdot \pi \cdot h_2$
$V = \frac{1}{3} 4m^2 \cdot \pi \cdot 20m - \frac{1}{3} 3m^2 \cdot \pi \cdot 15m = 194m^3$

Interaktive Inhalte:
Kegelstumpf

2.6.9 Kugel

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
V	Volumen	m^3	

$r = \sqrt[3]{\frac{V \cdot 3}{4 \cdot \pi}}$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

r	Radius	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
O	Oberfläche	m^2	

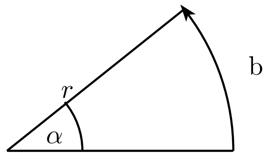
$r = \sqrt{\frac{O}{\pi \cdot 4}}$

Interaktive Inhalte:

$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$ $r = \sqrt[3]{\frac{V \cdot 3}{4 \cdot \pi}}$ $O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$ $r = \sqrt{\frac{O}{\pi \cdot 4}}$

2.7 Trigonometrie

2.7.1 Gradmaß - Bogenmaß



$\alpha(°)$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\alpha(rad)$	0 0	$\frac{1}{6}\pi$ 0,5236	$\frac{1}{4}\pi$ 0,7854	$\frac{1}{3}\pi$ 1,0472	$\frac{1}{2}\pi$ 1,5708	$\frac{2}{3}\pi$ 2,0944	$\frac{3}{4}\pi$ 2,3562	$\frac{5}{6}\pi$ 2,618	π 3,1416

$\alpha(°)$	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\alpha(rad)$	$\frac{7}{6}\pi$ 3,6652	$\frac{5}{4}\pi$ 3,927	$\frac{4}{3}\pi$ 4,1888	$\frac{3}{2}\pi$ 4,7124	$\frac{5}{3}\pi$ 5,236	$\frac{7}{4}\pi$ 5,4978	$\frac{11}{6}\pi$ 5,7596	2π 6,2832

Definiton Bogenmaß

Das Bogenmaß des Winkels x (rad), ist die Länge des Kreisbogens b durch Radius r.

$x = \frac{b}{r}$

Ist der Radius r=1 (Einheitskreis), ist das Bogenmaß des Winkels x (rad) die Länge des Kreisbogens b.

$x = b$

Umrechung Gradmaß - Bogenmaß

$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$

$x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$

Kreiszahl π

α in Gradmaß $[°]$

x in Bogemaß $[rad]$

$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$
$\pi = 3,14$
$x = 1,57rad$
$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot 1,57rad$
$\alpha = 90°$

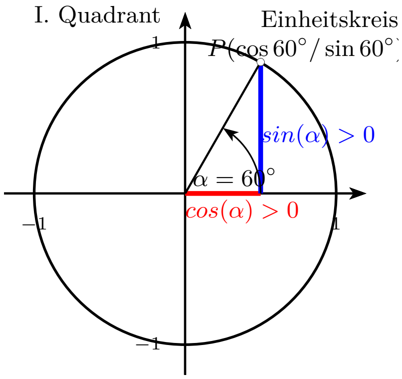
$x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$
$\pi = 3,14$
$\alpha = 90°$
$x = \frac{3,14}{180} \cdot 90°$

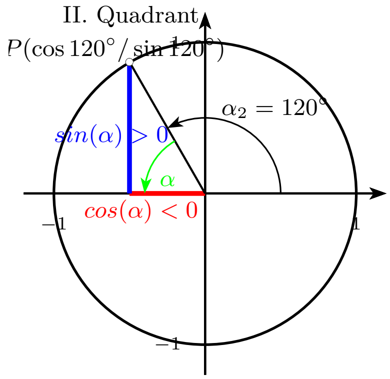
$x = 1,57rad$

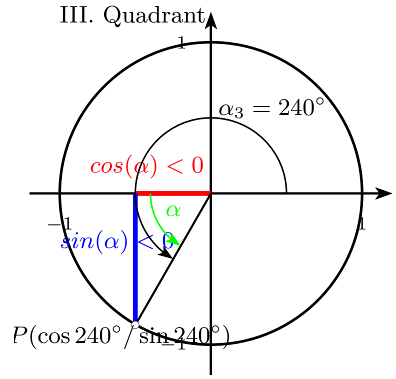
Interaktive Inhalte:

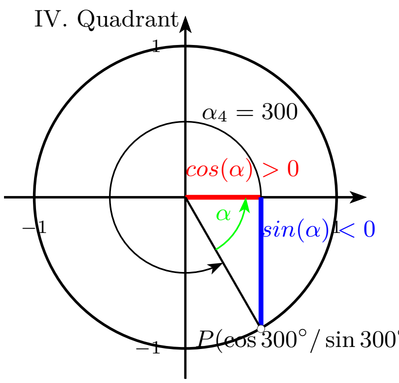
$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$ $x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$

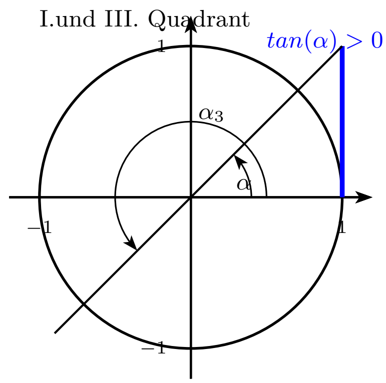
2.7.2 Definition

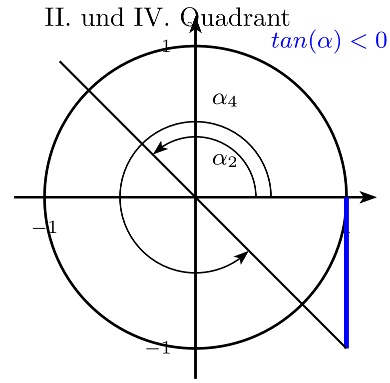












$\alpha(°)$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$x(rad)$	0°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	−	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

$\alpha(°)$	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$x(rad)$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\tan\alpha$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	−	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Definition

Punkt auf dem Einheitskreis:

$P(cos\alpha/sin\alpha)$

Steigung :

$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = m$

I. Quadrant: $\alpha = 60°$

$\cos(60°) = \frac{1}{2}$

$\sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan(45°) = 1$

II. Quadrant: $\alpha_2 = 120°$

$\cos(120°) = \frac{1}{2}$

$\sin(120°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan(135°) = -1$

III. Quadrant: $\alpha_3 = 240°$

$\cos(210°) - \frac{1}{2}$

$\sin(210°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan(225°) = 1$

IV Quadrant: $\alpha_4 = 300°$

$\cos(300°) = -\frac{1}{2}$

$\sin(300°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan(315°) = -1$

Komplementwinkel

$sin(90° - \alpha) = cos(\alpha)$

$cos(90° - \alpha) = sin(\alpha)$

$sin(90° - 30°) = sin(60°) = cos(30°)$

$cos(90° - 30°) = cos(60°) = sin(30°)$

Negative Winkel

$sin(-\alpha) = -sin(\alpha)$

$cos(-\alpha) = cos(\alpha)$

$tan(-\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)}$

$sin(-30°) = -sin(30°)$

$cos(-30°) = cos(30°)$

$tan(-30°) = \frac{1}{tan(30°)}$

Interaktive Inhalte: $\sin\alpha - \cos\alpha - \tan\alpha$ $\sin\alpha = y$ $\cos\alpha = x$ $\tan\alpha = m$

2.7.3 Quadrantenregel

α in Gradmaß

I. Quadrant $0° < \alpha < 90°$

$\sin(\alpha) > 0 \quad \cos(\alpha) > 0 \quad \tan(\alpha) > 0$

II. Quadrant $90° < \alpha_2 < 180°$

$\sin(\alpha_2) > 0 \quad \cos(\alpha_2) < 0 \quad \tan(\alpha_2) < 0$

$\alpha_2 = 180° - \alpha$

$sin(180° - \alpha) = sin(\alpha)$

$cos(180° - \alpha) = -cos(\alpha)$

$tan(180° - \alpha) = -tan(\alpha)$

III. Quadrant $180° < \alpha_3 < 270°$

$\sin(\alpha_3) < 0 \quad \cos(\alpha_3) < 0 \quad \tan(\alpha_3) > 0$

$\alpha_3 = 180° + \alpha$

$sin(180° + \alpha) = -sin(\alpha)$

$cos(180° + \alpha) = -cos(\alpha)$

$tan(180° + \alpha) = tan(\alpha)$

IV. Quadrant $270° < \alpha_4 < 360°$

$\sin(\alpha_4) < 0 \quad \cos(\alpha_4) > 0 \quad \tan(\alpha_4) < 0$

$\alpha_4 = 360° - \alpha$

$sin(360° - \alpha) = -sin(\alpha)$

$cos(360° - \alpha) = cos(\alpha)$

$tan(360° - \alpha) = -tan(\alpha)$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$
I Quadrant: $\alpha_1 = 30°$
II Quadrant: $\alpha_2 = 180° - 30° = 150°$
$\sin\alpha = -\frac{1}{2}$
III Quadrant: $\alpha_1 = 180° + 30° = 210°$
IV Quadrant: $\alpha_2 = 360° - 30° = 330°$
$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
I Quadrant: $\alpha_1 = 45°$
IV Quadrant: $\alpha_2 = 360° - 45° = 315°$
$\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
II Quadrant: $\alpha_1 = 180° - 45° = 135°$
III Quadrant: $\alpha_2 = 180° + 45° = 225°$

x in Bogenmaß

I. Quadrant $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\sin(x) > 0 \quad \cos(x) > 0 \quad \tan(x) > 0$

II. Quadrant $\frac{\pi}{2} < x_2 < \pi$

$\sin(x_2) > 0 \quad \cos(x_2) < 0 \quad \tan(x_2) < 0$

$x_2 = \pi - x$

$sin(\pi - x) = sin(x)$

$cos(\pi - x) = -cos(x)$

$tan(\pi - x) = -tan(x)$

III. Quadrant $\pi < x_3 < \frac{3\pi}{2}$

$\sin(x_3) < 0 \quad \cos(x_3) < 0 \quad \tan(x_3) > 0$

$x_3 = \pi + x$

$sin(\pi + x) = -sin(x)$

$cos(\pi + x) = -cos(x)$

$tan(\pi + x) = tan(x)$

IV. Quadrant $\frac{3\pi}{2} < x_4 < 2\pi$

$\sin(x_4) < 0 \quad \cos(x_4) > 0 \quad \tan(x_4) < 0$

$x_4 = 2\pi - x$

$sin(2\pi - x) = -sin(x)$

$cos(2\pi - x) = cos(x)$

$tan(2\pi - x) = -tan(x)$

Interaktive Inhalte:
$\sin\alpha - \cos\alpha - \tan\alpha$ | $\sin\alpha = y$ | $\cos\alpha = x$ | $\tan\alpha = m$

2.7.4 Umrechnungen

tan - sin - cos

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

sin - cos

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$

$cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$

Additionstheoreme

$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$

$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta$

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta$

$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta$

$tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}$

$tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha \cdot tan\beta}$

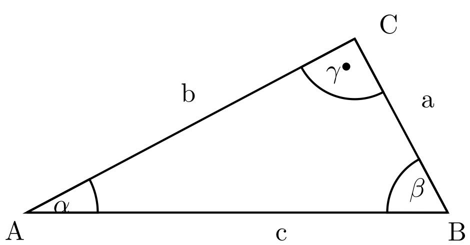
$sin2\alpha = 2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha$

$cos2\alpha = 2 \cdot cos^2\alpha - 1 = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$tan2\alpha = \frac{2 \cdot tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$

Interaktive Inhalte:
$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ | $sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$ | $cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$ | $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ | $sin\alpha = tan\alpha \cdot cos\alpha$ | $cos\alpha = \frac{sin\alpha}{tan\alpha}$

2.7.5 Rechtwinkliges Dreieck



$sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad$ $sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

c	Hypotenuse	m
a	Gegenkathete zu α	m
α	Winkel	$^\circ$

$a = sin\alpha \cdot c$ $\quad$ $c = \frac{a}{sin\alpha}$

$cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

c	Hypotenuse	m
b	Ankathete zu α	m
α	Winkel	$^\circ$

$b = cos\alpha \cdot c \qquad c = \frac{b}{cos\alpha}$

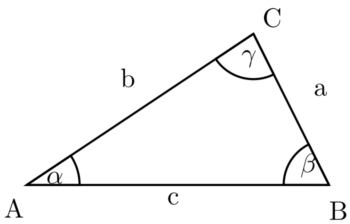
$tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\qquad tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

b	Ankathete zu α	m
a	Gegenkathete zu α	m
α	Winkel	$^\circ$

$a = tan\alpha \cdot b \qquad b = \frac{a}{tan\alpha}$

Interaktive Inhalte:
$sin\alpha = \frac{a}{c}$ $a = sin\alpha \cdot c$ $c = \frac{a}{sin\alpha}$ $cos\alpha = \frac{b}{c}$ $b = cos\alpha \cdot c$ $c = \frac{b}{cos\alpha}$ $tan\alpha = \frac{a}{b}$ $a = tan\alpha \cdot b$ $b = \frac{a}{tan\alpha}$

2.7.6 Sinussatz

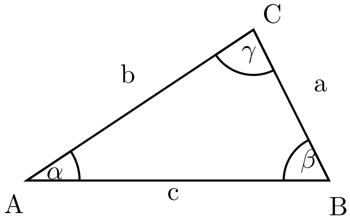


$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad / \cdot \sin\beta \qquad / \cdot \sin\alpha$$
$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \qquad / : b$$
$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad / \cdot \sin\alpha$$
$$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b} \qquad \sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c}$$
$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} \qquad \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c}$$
$$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a} \qquad \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b}$$
$$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \qquad a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$$
$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} \qquad b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$
$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \qquad c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$$

Interaktive Inhalte:
$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$ $a = \frac{b \cdot sin\alpha}{sin\beta}$ $sin\alpha = \frac{a \cdot sin\beta}{b}$

2.7.7 Kosinussatz



$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / - a^2$

$0 = b^2 + c^2 - a^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \qquad / : (2 \cdot b \cdot c)$

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha} \qquad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma} \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$

Interaktive Inhalte:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$ $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha}$ $cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

2.7.8 Kongruenzsätze - Berechnungen am Dreieck

Seite - Seite - Seite (SSS)

Seite	Seite	Seite
a	b	c

1. Zwei Winkel mit Kosinus-Satz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / - a^2 \qquad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \qquad / : (2 \cdot b \cdot c)$

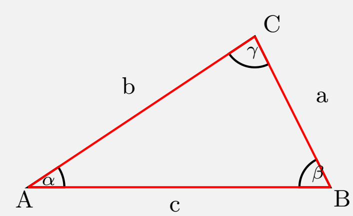
$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

entsprechend

$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$

2. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



$a = 2,2 \quad b = 3,6 \quad c = 4$

$\cos\alpha = \frac{3,6^2 + 4^2 - 2,2^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4}$

$\cos\alpha = 0,8$

$\alpha = \arccos(0,8)$

$\alpha = 33,1°$

$\cos\beta = \frac{2,2^2 + 4^2 - 3,6^2}{2 \cdot 2,2 \cdot 4}$

$\cos\beta = 0,4$

$\beta = \arccos(0,4)$

$\beta = 63,4°$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

Seite - Winkel - Seite (SWS)

Seite	Winkel	Seite
a	β	c
a	γ	b
b	α	c

1. Gegenüberliegende Seite mit Kosinussatz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\beta$

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$

entsprechend

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$

2. Winkel mit Kosinussatz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / - a^2 \qquad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \qquad / : (2 \cdot b \cdot c)$

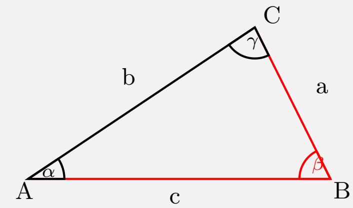
$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

entsprechend

$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$

3. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



$a = 2,2 \quad c = 4 \quad \beta = 63,4°$

$b = \sqrt{2,2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 4 \cdot \cos 63,4°}$

$b = 3,6$

$\cos\alpha = \frac{3,6^2 + 4^2 - 2,2^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4}$

$\cos\alpha = 0,8$

$\alpha = \arccos(0,8)$

$\alpha = 33,1°$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

Winkel - Seite - Winkel (WSW,WWS)

Winkel	Seite	Winkel
α	c	β
α	b	γ
β	a	γ

Winkel	Winkel	Seite
α	β	a
α	β	b
α	γ	a
α	γ	c
β	γ	b
β	γ	c

1. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

2. Eine Seite über den Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad / \cdot \sin\beta$$

$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$$

entsprechend

$$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \qquad c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \qquad a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

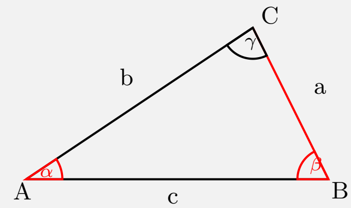
3. Fehlende Seite mit dem Kosinussatz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$$

entsprechend

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$$



$a = 2,2 \quad \alpha = 33,1° \quad \beta = 63,4°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

$$b = \frac{2,2 \cdot \sin 63,4}{\sin 33,1}$$

$b = 3,6$

$c = \sqrt{2,2^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 3,6 \cdot \cos 83,5°}$

$c = 4$

Seite - Seite - Winkel (SsW)

Seite	Seite	Winkel	
a	b	α	a>b
a	b	β	b>a
a	c	α	a>c
a	c	γ	c>a
b	c	β	b>c
b	c	γ	c>b

1. Winkel mit dem Sinussatz berechnen

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad / \cdot \sin\beta \qquad / \cdot \sin\alpha$

$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \qquad / : b$

$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b}$

entsprechend

$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} \qquad \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a}$

2. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

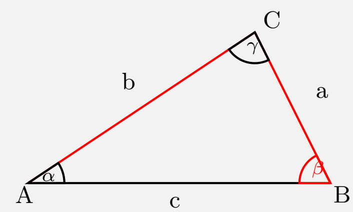
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

3. Fehlende Seite mit dem Kosinussatz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\beta \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$

entsprechend

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$



$a = 2,2 \quad b = 3,6 \quad \beta = 63,4°$

$\sin\alpha = \frac{2,2 \cdot \sin 63,4°}{3,6}$

$\sin\alpha = 0,5$

$\alpha = \arcsin(0,5)$

$\alpha = 33,1°$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

$c = \sqrt{2,2^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 3,6 \cdot \cos 83,5°}$

$c = 4$

Interaktive Inhalte:
hier klicken