Formelsammlung Stochastik

http://www.fersch.de

1. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

5 Stochastik

5.1 Statistik

5.1.1 Mittelwert - Median - Modalwert

Noten in Mathematik: 4,3,5,3,3,5,2,4

Arithmetisches Mittel

Durchschnittswert $\bar{x}$ der Datenreihe $x_1, x_2, x_3....x_n$

n - Anzahl der Elemente

$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3....x_n)$

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Mittelwert:

$\bar{x} = \frac{1}{8}(4+3+5+3+3+5+2+4) = 3,625$

Median

Zentralwert der geordneten Datenreihe

n - Anzahl der Elemente

$x_{med} = \frac{x_{n/2}+x_{n/2+1}}{2}$ wenn n gerade

$x_{med} = x_{(n+1)/2}$ wenn n ungerade

geordnete Datenreihe

x_1	2
x_2	3
x_3	3
x_4	3
x_5	4
x_6	4
x_7	5
x_8	5

Median:

$x_{med} = \frac{3+4}{2} = 3,5$

Spannweite

Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert der geordneten Datenreihe

$d = x_{max} - x_{min}$

Spannweite:

$d = 5 - 2 = 3$

Häufigkeitstabelle - Modalwert

Wert aus der Datenreihe, der am häufigsten vorkommt

Häufigkeit

Anzahl	Noten
1	2
3	3
2	4
2	5

$x_{Mod} = 3$

Interaktive Inhalte:

Statistik

5.2 Kombinatorik

5.2.1 Grundlagen

	Ohne Wiederholung	Mit Wiederholung
Permutation	$n!$	$\frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!}$
Variation	$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$	n^k
Kombination	$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$0! = 1$
$1! = 1$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n \text{ über } k$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$
$\binom{40}{38} = \binom{40}{2} = \frac{40!}{(40-38)! \cdot 38!} = \frac{40 \cdot 39}{1 \cdot 2} = 780$
$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1$

Interaktive Inhalte:
$n!$

5.2.2 Anzahl der Anordungen - Permutation

Anzahl der Anordungen ohne Wiederholung - alle Elemente verschieden

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben a,b,c bilden?
abc *acb* *bac* *bca* *cab* *cba*
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Anzahl der Anordungen ohne Wiederholung - nicht alle Elemente verschieden

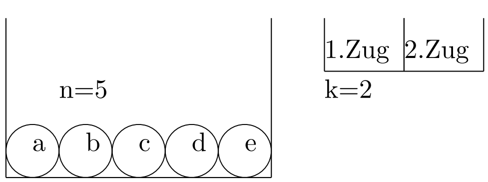
$$\frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_m!}$$

Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben a,b,b,b,b bilden?
a,b,b,b,b b,a,b,b,b b,b,a,b,b b,b,b,a,b b,b,b,b,a
$\frac{5!}{4!} = 5$

Interaktive Inhalte:
$n!$

5.2.3 Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge - Variation

Ziehen von 2 Kugeln aus 5 verschiedenen Kugeln



Auswahl von k Elementen aus n unterschiedlichen Objekten mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$$

	ab	ac	ad	ae
ba		bc	bd	be
ca	cb		cd	ce
da	db	dc		de
ea	eb	ec	ed	

1. Zug: 5 Möglichkeiten
2. Zug: 4 Möglichkeiten

$5 \cdot 4 = 20 = \frac{5!}{(5-2)!}$ Möglichkeiten

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$n^k$$

aa	ab	ac	ad	ae
ba	bb	bc	bd	be
ca	cb	cc	cd	ce
da	db	dc	dd	de
ea	eb	ec	ed	ee

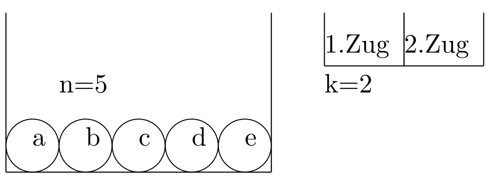
1. Zug: 5 Möglichkeiten
2. Zug: 5 Möglichkeiten

$5 \cdot 5 = 25 = 5^2$ Möglichkeiten

Interaktive Inhalte:
$\frac{n!}{(n-k)!}$ n^k

5.2.4 Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge - Kombination

Ziehen von 2 Kugeln aus 5 verschiedenen Kugeln



Auswahl von k Elementen aus n unterschiedlichen Objekten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad n \text{ über } k$$

ab	ac	ad	ae
	bc	bd	be
		cd	ce
			de

$\frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 = \frac{5!}{2!(5-2)!}$ Möglichkeiten

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$\binom{n+k-1}{k}$$

aa	ab	ac	ad	ae
	bb	bc	bd	be
		cc	cd	ce
			dd	de
				ee

$$\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15 \text{ Möglichkeiten}$$

Interaktive Inhalte:
$\binom{n}{k}$ $\binom{n+k-1}{k}$

5.3 Wahrscheinlichkeit

5.3.1 Zufallsexperiment

Ergebnis - Ereignis

- Ein Zufallsexperiment ist beliebig oft wiederholbar
- Die Elementarergebnisse (Stichproben, Ausgänge) $\omega_1, \omega_2, \omega_3, ...$ des Zufallsexperiment sind nicht vorhersagbar
- Die Menge aller Ergebnisse heißt Ergebnisraum Ω
- $|\Omega|$ ist die Anzahl der Ergebnisse von Ω
- Ein Ergeignis A ist eine Teilmenge von Ω
- $|A|$ ist die Anzahl der Elemente von A
- Die Menge aller Ergeinisse heißt Ereignisraum P

Werfen einer Münze
Ergebnis: $\omega_1 = Wappen(W)$ $\omega_2 = Zahl(Z)$
Ergebnismenge: $\Omega = \{W, Z\}$
Anzahl der Ergebnisse: $|\Omega| = 2$
Ereignis: $A = \{W\}$
Ereignis: $B = \{Z\}$
Werfen eines Würfels
Ergebnis: $\omega_1 = 1$ $\omega_2 = 2$ $\omega_3 = 3$
$\omega_4 = 4$ $\omega_5 = 5$ $\omega_6 = 6$
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Anzahl der Ergebnisse: $|\Omega| = 6$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Anzahl der Elemente von $|A| = 4$
Gegenereignis: $\overline{B} = \{2, 4\}$
Anzahl der Elemente von$|\overline{B}| = 2$

Schnittmenge $\cap$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$
Alle Ergebnisse die in A und zugleich in B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3; 5\}$

Vereinigungsmenge $\cup$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
Alle Ergebnisse die in A oder B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Differenz $\setminus$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{e\}$
Alle Ergebnisse die in A, aber nicht in B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} == \{1\}$

Gegenereignis $\overline{A}$

$\overline{A} = \Omega \setminus A$
Alle Ergebnisse die in Ω, aber nicht in A enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Gegenerreignis: $\overline{A} = \{2, 4\}$

Vereinbare - unvereinbare Ereignisse

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\} \Leftrightarrow$ unvereinbare Ereignisse

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{a, b...\} \Leftrightarrow$ vereinbare Ereignisse

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{3, 5, 6\}$
Ereignis: $B = \{3, 4, 5\}$
Ereignis: $C = \{1, 2\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3; 5\}$ vereinbare Ereignisse
$\mathbb{A} \cap \mathbb{C} = \{\}$ unvereinbare Ereignisse

Rechengesetze

- Kommutativgesetz

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

- Assoziativgesetz

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- Distributivgesetz

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- De Morgan

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

$\overline{\overline{A}} = A$

- Neutrales Element

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

- Inverses Element

$A \cap \overline{A} = \emptyset$

$A \cup \overline{A} =$Grundmenge

5.3.2 Relative Häufigkeit

Definition

$h_n(A) = \frac{k}{n}$

n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs

A - Ereignis

k - Absolute Häufigkeit von A

$h(A)$ - Relative Häufigkeit von A

Eigenschaften

- $0 \leq h(A) \leq 1$
- $h(\emptyset) = 0$
- $h(\Omega) = 1$
- $h(A \cup B) = h(A) + h(B) - h(A \cap B)$
- $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
- $h(A) = 1 - h(\overline{A})$

Interaktive Inhalte:
$h_n(A) = \frac{k}{n}$

5.3.3 Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$P(A) = \frac{k}{n}$
Voraussetzung: Elementarergebnisse sind gleichwahrscheinlich

n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs

A - Ereignis

k - Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse für A

$P(A)$- Wahrscheinlichkeit von A

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Elementarergebnisse sind gleichwahrscheinlich:
$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$
Anzahl aller möglichen Versuchsergebnisse: $n = |\Omega| = 6$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse: $k = |A| = 4$
Wahrscheinlichkeit von A
$P(A) = \frac{4}{6}$

Eigenschaften

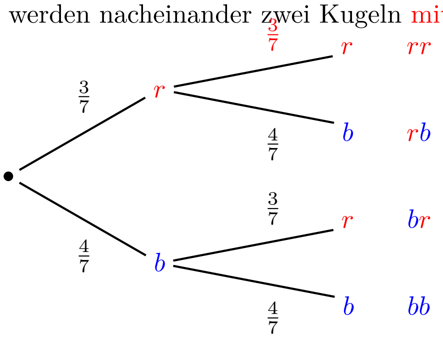
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3, 5\}$
$P(A) = \frac{3}{6}$
$P(B) = \frac{4}{6}$
$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
$P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$

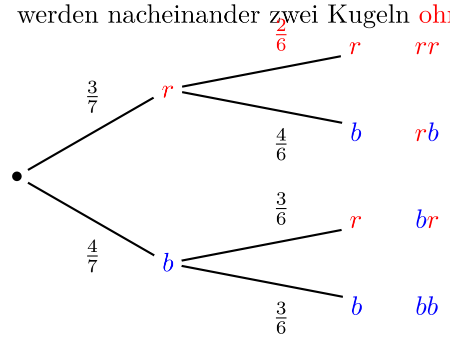
Interaktive Inhalte:
$P(A) = \frac{k}{n}$

5.3.4 Mehrstufige Zufallsexperimente

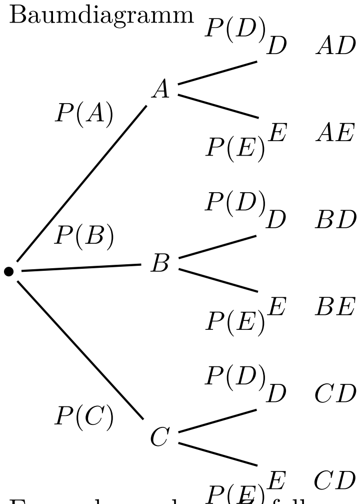
In einer Urne befinden sich drei rote und vier blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.



In einer Urne befinden sich drei rote und vier blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



Baumdiagramm



Es werden mehrere Zufallsexperimente nacheinander ausgeführt. Jedes mögliche Elementarereignis wird zu einem Knoten (A,B,C..) im Baumdiagramm.

Zufallsexperiment 1: $\Omega = \{A, B, C\}$

Zufallsexperiment 2: $\Omega = \{D, E\}$

Die Knoten werden durch Pfade verbunden und die Wahrscheinlichkeiten angetragen. (P(A),P(B)...)

Die Wahrscheinlichkeiten an einem Knoten müssen sich zu 1 addieren.

1. Pfadregel (Produktregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses (AD,AE..)ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades.

$P(AD) = P(A) \cdot P(D)$ $\quad$ $P(AE) = P(A) \cdot P(E)$

$P(BD) = P(B) \cdot P(D)$ $\quad$ $P(BE) = P(B) \cdot P(E)$

$P(CD) = P(C) \cdot P(D)$ $\quad$ $P(CE) = P(C) \cdot P(E)$

2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten ihrer Ergebnisse .

$P(AD, CD) = P(AD) + P(CD)$

Ziehen mit Zurücklegen

$\Omega = \{rr; rb; br; bb\}$

1. Pfadregel:

$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

$P(rb) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$

$P(br) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$

$P(bb) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

Wahrscheinlichkeit für nur gleichfarbige Kugeln

E = {rr;bb}

2. Pfadregel:

$P(E) = P(rr) + P(bb) = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49}$

Ziehen ohne Zurücklegen

$\Omega = \{rr; rb; br; bb\}$

1. Pfadregel:

$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$

$P(rb) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{42}$

$P(br) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$

$P(bb) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$

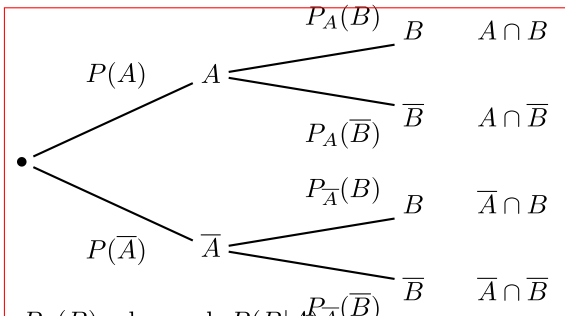
Wahrscheinlichkeit für genau 1 rote Kugel

E = {rb;br}

2. Pfadregel:

$P(E) = P(rb) + P(br) = \frac{12}{42} + \frac{12}{42} = \frac{24}{42}$

5.3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

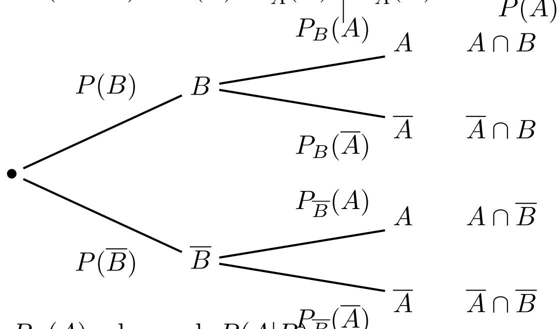


$P_A(B)$ oder auch $P(B|A)$

Die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A. Die Wahrscheinlichkeit von B, wenn A schon eingetreten ist.

1. Pfadregel

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$	$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B})$	$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}$
$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$	$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})}$
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B})$	$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})}$



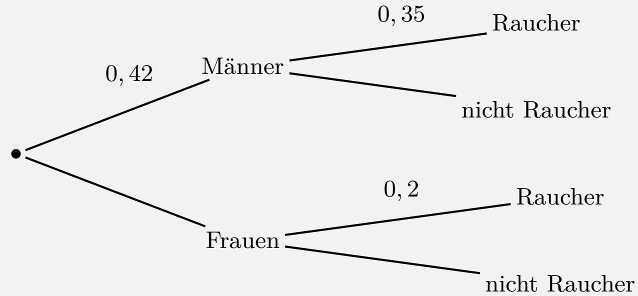
$P_B(A)$ oder auch $P(A|B)$

Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B. Die Wahrscheinlichkeit von A, wenn B schon eingetreten ist.

1. Pfadregel

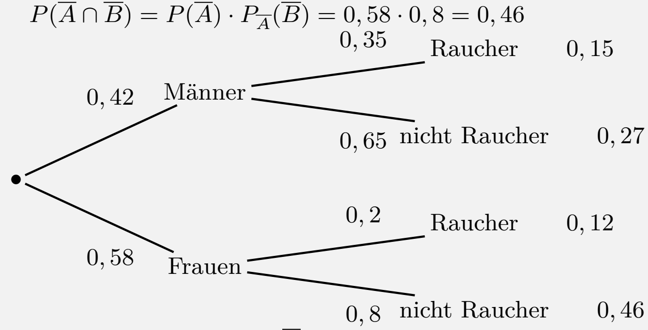
$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$	$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
$P(\overline{A} \cap B) = P(B) \cdot P_B(\overline{A})$	$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$
$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$	$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(\overline{A})$	$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$
$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$



42 Prozent der Deutschen sind Männer.
35 Prozent der Männer und 20 Prozent der Frauen rauchen.
Männer (A) $P(A) = 0,42$ - Frauen($\overline{A}$) $P(\overline{A}) = 0,58$
Raucher(B) - nicht Raucher ($\overline{B}$)
Raucher unter den (Bedingung) Männern: $P_A(B) = 0,35$
nicht Raucher unter den Männern: $P_A(\overline{B}) = 0,65$
Raucher unter den Frauen: $P_{\overline{A}}(B) = 0,2$
nicht Raucher unter den Frauen: $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,8$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,42 \cdot 0,35 = 0,15$
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) = 0,42 \cdot 0,65 = 0,27$
$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = 0,58 \cdot 0,2 = 0,12$
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,58 \cdot 0,8 = 0,46$



$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0,15 + 0,12 = 0,27$
$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,27 + 0,46 = 0,73$

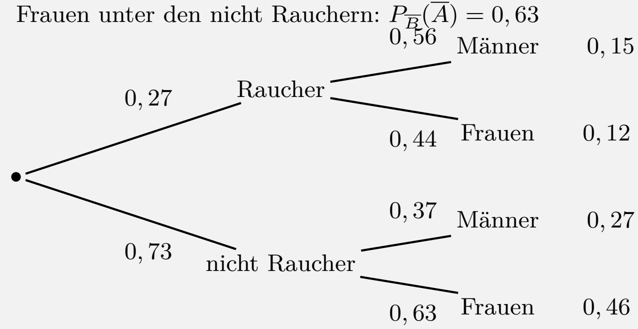
$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,27} = 0,56$

$P_B(\overline{A}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(B)} = \frac{0,12}{0,27} = 0,44$

$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{B})} = \frac{0,27}{0,23} = 0,37$

$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,46}{0,73} = 0,63$

Männer unter den (Bedingung) Rauchern: $P_B(A) = 0,56$
Frauen unter den Rauchern: $P_B(\overline{A}) = 0,44$
Männer unter den nicht Rauchern: $P_{\overline{B}}(A) = 0,37$
Frauen unter den nicht Rauchern: $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 0,63$



5.3.6 Vierfeldertafel

Relativer Häufigkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.

1. Merkmal hat die Ausprägung A und $\overline{A}$
2. Merkmal hat die Ausprägung B und $\overline{B}$

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$h(A\cap B)$ a	$h(\overline{A}\cap B)$ b	$h(B)$ $a+b$
$\overline{B}$	$h(A\cap \overline{B})$ c	$h(\overline{A}\cap \overline{B})$ d	$h(\overline{B})$ $c+d$
$\sum$	$h(A)$ $a+c$	$h(\overline{A})$ $b+d$	1 $a+b+c+d$

Relative Häufigkeit der Ausprägung

$h(A), h(B), h(\overline{A}), h(\overline{B})$

$h(B)+h(\overline{B})=1 \qquad h(A)+h(\overline{A})=1$

Relative Häufigkeit von der Schnittmenge

$h(A\cap B), h(\overline{A}\cap B), h(A\cap \overline{B}, h(\overline{A}\cap \overline{B})$

$h(B)=h(A\cap B)+h(\overline{A}\cap B)$

$h(\overline{B})=h(A\cap \overline{B})+h(\overline{A}\cap \overline{B})$

$h(A)=h(A\cap B)+h(A\cap \overline{B})$

$h(\overline{A})=h(\overline{A}\cap B)+h(\overline{A}\cap \overline{B})$

Relative Häufigkeiten von der Vereinigungsmenge

$h(A\cup B), h(\overline{A}\cup B), h(A\cup \overline{B} h(\overline{A}\cup \overline{B})$

$h(A\cup B)=h(A\cap B)+h(A\cap \overline{B})+h(\overline{A}\cap B)$

$h(\overline{A}\cup B)=h(A\cap B)+h(\overline{A}\cap B)+h(\overline{A}\cap \overline{B})$

$h(A\cup \overline{B})=h(A\cap B)+h(A\cap \overline{B})+h(\overline{A}\cap \overline{B})$

$h(\overline{A}\cap \overline{B})=h(A\cap \overline{B}+h(\overline{A}\cap B)+h(\overline{A}\cap \overline{B})$

$h(A\cup B)=1-h(\overline{A}\cap \overline{B})$

$h(\overline{A}\cup B)=1-h(A\cap \overline{B})$

$h(A\cup \overline{B})=1-h(A\cap \overline{B})$

$h(\overline{A}\cap \overline{B})=1-h(A\cap B)$

Relative Häufigkeit unter einer Bedingung

$$h_A(B)=\frac{h(A\cap B)}{h(A)}$$

$$h_A(\overline{B})=\frac{h(A\cap \overline{B})}{h/A)}$$

$$h_{\overline{A}}(B)=\frac{h(\overline{A}\cap B)}{h(\overline{A})}$$

$$h_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{h(\overline{B}\cap \overline{B})}{h(\overline{A})}$$

In einer Schulklasse sind 32 Schüler, darunter 18 Mädchen.
6 Mädchen und 8 Jungen sind krank.
1. Merkmal: Mädchen (A) - Jungen($\overline{A}$)
2.Merkmal: Krank(B) - Gesund ($\overline{B}$)

Mädchen: $A=18$
Jungen: $\overline{A}=32-18=14$
kranke Mädchen: $A\cap B=6$
kranke Jungen: $\overline{A}\cap B=8$
Kranke: $B=6+8=14$
gesunde Mädchen: $A\cap \overline{B}=18-6=12$
gesunde Jungen: $\overline{A}\cap \overline{B}=14-8=6$

Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

	A Mädchen	$\overline{A}$ Jungen	$\sum$
B Krank	$A\cap B$ 6	$\overline{A}\cap B$ 8	B 14
$\overline{B}$ Gesund	$A\cap \overline{B}$ 12	$\overline{A}\cap \overline{B}$ 6	$\overline{B}$ 18
$\sum$	A 18	$\overline{A}$ 14	*Insgesamt* 32

Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten

	A Mädchen	$\overline{A}$ Jungen	$\sum$
B Krank	$h(A\cap B)$ $\frac{6}{32}$	$h(\overline{A}\cap B)$ $\frac{8}{32}$	$h(B)$ $\frac{14}{32}$
$\overline{B}$ Gesund	$h(A\cap \overline{B})$ $\frac{12}{32}$	$h(\overline{A}\cap \overline{B})$ $\frac{6}{32}$	$h(\overline{B})$ $\frac{18}{32}$
$\sum$	$h(A)$ $\frac{18}{32}$	$h(\overline{A})$ $\frac{14}{32}$	1 $\frac{32}{32}$

Relative Häufigkeit von
Mädchen $h(A)=\frac{18}{32}$ Jungen $h(\overline{A})=\frac{14}{32}$
Krank $h(B)=\frac{14}{32}$ Gesund $h(\overline{B})=\frac{18}{32}$
Anzahl der gesunden Mädchen: 12
$h(A\cap \overline{B})=\frac{12}{32}=37,5\%$
37,5% der gesamten Schüler sind gesunde Mädchen.
Wieviel Prozent der Mädchen sind gesund?

$$h_A(\overline{B})=\frac{h(A\cap \overline{B})}{h(A)}=\frac{\frac{12}{32}}{\frac{18}{32}}=\frac{12}{18}$$

Wahrscheinlichkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.

1. Merkmal hat die Ausprägung A und $\overline{A}$.

2. Merkmal hat die Ausprägung B und $\overline{B}$.

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$P(A \cap B)$ a	$P(\overline{A} \cap B)$ b	$P(B)$ $a+b$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$ c	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ d	$P(\overline{B})$ $c+d$
$\sum$	$P(A)$ $a+c$	$P(\overline{A})$ $b+d$	1 $a+b+c+d$

Wahrscheinlichkeit der Ausprägung

$P(A), P(B), P(\overline{A}), P(\overline{B})$

$P(B) + P(\overline{B}) = 1$

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Wahrscheinlichkeit von der Schnittmenge

$P(A \cap B), P(\overline{A} \cap B), P(A \cap \overline{B}, P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

Berechnungen mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A)$

$P(A \cap \overline{B}) = P_A(\overline{B}) \cdot P(A)$

$P(\overline{A} \cap B) = P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A})$

$P(\overline{B} \cap \overline{B}) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) \cdot P(\overline{A})$

Wahrscheinlichkeit von der Vereinigungsmenge

$P(A \cup B), P(\overline{A} \cup B), P(A \cup \overline{B} P(\overline{A} \cup \overline{B})$

$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

$P(\overline{A} \cup B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(A \cup \overline{B}) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B} + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(\overline{A} \cup B) = 1 - P(A \cap \overline{B})$

$P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap \overline{B})$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$

42 Prozent der Deutschen sind Männer. 35 Prozent der Männer und 20 Prozent der Frauen rauchen.

1.Merkmal: Männer (A) Frauen($\overline{A}$)

2.Merkmal: Raucher(B) - nicht Raucher ($\overline{B}$)

$P(A) = 0,42 \quad P(\overline{A}) = 1 - 0,42 = 0,58$

Raucher unter den (Bedingung) Männern: $P_A(B) = 0,35$

$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A) = 0,35 \cdot 0,42 = 0,15$

Raucher unter den (Bedingung) Frauen: $P_{\overline{A}}(B) = 0,2$

$P(\overline{A} \cap B) = P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A}) = 0,2 \cdot 0,58 = 0,12)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,42 - 0,15 = 0,27$

$P(\overline{B}) = 0,58 - 0,12 = 0,46$

$P(B) = 0,15 + 0,12 = 0,27$

$P(\overline{B}) = 1 - 0,27 = 0,73$

	A Männer	$\overline{A}$ Frauen	$\sum$
B Raucher	$P(A \cap B)$ $0,15$	$P(\overline{A} \cap B)$ $0,12$	$P(B)$ $0,27$
$\overline{B}$ nicht Raucher	$P(A \cap \overline{B})$ $0,27$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ $0,46$	$P(\overline{B})$ $0,73$
$\sum$	$P(A)$ $0,42$	$P(\overline{A})$ $0,58$	1

Stochastische Unabhängigkeit

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow$ A,B unabhängig

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow$ A,B abhängig

$P(A \cap B) = 0,15$
$P(A) = 0,42$
$P(B) = 0,27$
$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$
$0,15 \neq 0,42 \cdot 0,27 \Leftrightarrow$ A,B abhängig

5.3.7 Binomialverteilung

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Zwei Ausgänge des Zufallsexperiments: rote oder blaue Kugeln
Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel: $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel: $q = 1 - p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
Anzahl der Versuche: n=3
Ziehen mit Zurücklegen: Wahrscheinlickeiten ändern sich nicht

Definition

$P(X = k) = B(n, p, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Voraussetzung

- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen (Bernoulli-Experiment)
- p - Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
- Stichprobe mit Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich nicht
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs (Bernoullikette der Länge n)
- Das Ereignis A tritt genau k-mal ein.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 rote Kugeln zu ziehen?
Genau 2 rote Kugeln: k=2

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
$P(X = 2) = B(10, \frac{2}{5}, 2)$
$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot (\frac{2}{5})^2 \cdot (1 - \frac{2}{5})^{10-2}$
$P(X = 2) = 0,121$

Verteilungsfunktion

$$F(k) = P(0 \leq X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i)$$

Binomialverteilung $n = 10 \quad p = \frac{2}{5}$

k	$B(10, \frac{2}{5}, k)$	$F(k)$
0	$0,006047$	$0,006047$
1	$0,040311$	$0,046357$
2	$0,120932$	$0,167290$
3	$0,214991$	$0,382281$
4	$0,250823$	$0,633103$
5	$0,200658$	$0,833761$
6	$0,111477$	$0,945238$
7	$0,042467$	$0,987705$
8	$0,010617$	$0,998322$
9	$0,001573$	$0,999895$
10	$0,000105$	$1,000000$

Bereiche der Binomialverteilung

höchstens k-mal

$$P(x \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i) = F(k)$$

weniger als k-mal

$$P(x < k) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n;p;i) = F(k-1)$$

mindestens k-mal

$$P(x \geq k) = \sum_{i=k}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(k-1)$$

mehr als k-mal

$$P(x > k) = \sum_{i=k+1}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(k)$$

mindestens 1-mal

$$P(x \geq 1) = \sum_{i=1}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(0) =$$

$$1 - B(n;p;0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n = 1 - (1-p)^n$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden ..
genau 2 rote Kugeln
$P(x = 2) = 0,120932$
höchstens 2 rote Kugeln
$P(x \leq 2) = F(2) = \sum_{i=0}^{2} B(10; \frac{2}{5}; i) =$
$B(10, \frac{2}{5}, 0) + B(10, \frac{2}{5}, 1) + B(10, \frac{2}{5}, 2) = 0,167290$
weniger als 2 rote Kugeln
$P(x < 2) = F(1) = \sum_{i=0}^{1} B(10; \frac{2}{5}; i) =$
$B(10, \frac{2}{5}, 0) + B(10, \frac{2}{5}, 1) = 0,046357$
mehr als 2 rote Kugeln
$P(x > 2) == 1 - F(2) = 0,832710$
mindestens 2 rote Kugeln
$P(x \geq 2) = 1 - F(1) = 0,953643$
gezogen

3-mindestens-Aufgabe

P_{min} ist die Mindestwahrscheinlichkeit für mindesten einen Treffer ($x \geq 1$) und der Trefferwahrscheinlichkeit p bei mindestens n Versuchen.

$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$

Gesucht: n - Mindestanzahl der Versuche

$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$

$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$

$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$

$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \qquad / - P_{min} / + (1-p)^n$

$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \qquad /ln$

$\ln(1 - P_{min}) \geq \ln((1-p)^n)$

$\ln(1 - P_{min}) \geq n \ln((1-p) \qquad / : ln(1-p)$

$\frac{\ln(1-P_{min})}{\ln(1-p)} \leq n$

$n \geq \frac{\ln(1-P_{min})}{\ln(1-p)}$

Gesucht: p - Wahrscheinlichkeit eines Treffers

$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$

$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$

$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$

$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \qquad / - P_{min} / + (1-p)^n$

$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \qquad /^{\frac{1}{n}}$

$(1 - P_{min})^{\frac{1}{n}} \geq 1 - p \qquad / + p / - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$

$p \geq 1 - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen beträgt 20%. Wieviele Lose muss man mindestens kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindestens einmal zu gewinnen?

$x \geq 1 \qquad p = 0,2 \qquad P_{min} \geq 0,5$

$P_{0,2}^n(x \geq 1) \geq 0,5$

$1 - P_{0,2}^n(0) \geq 0,5$

$1 - \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot (1-0,2)^n \geq 0,5$

$1 - 0,8^n \geq 0,5 \qquad / - 0,5 / + 0,8^n$

$1 - 0,5 \geq 0,8^n \qquad /ln$

$\ln(0,5) \geq \ln(0,8^n)$

$\ln(0,5) \geq n \ln(0,8) \qquad / : ln(0,8)$

$\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)} \leq n$

$n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)}$

$n \geq 3,1$

Beim zehnmaligen Losen ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal zu gewinnen mindestens 40%. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen sein ?

$x \geq 1 \qquad n = 10 \qquad P_{min} \geq 0,4$

$P_p^{10}(x \geq 1) \geq 0,4$

$1 - P_p^{10}(0) \geq 0,4$

$1 - \binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} \geq 0,4$

$1 - (1-p)^{10} \geq 0,4 \qquad / - 0,4 / + (1-p)^{10}$

$1 - 0,4 \geq (1-p)^{10} \qquad /^{\frac{1}{10}}$

$(0,6)^{\frac{1}{10}} \geq 1 - p \qquad / + p / - (0,6)^{\frac{1}{10}}$

$p \geq 1 - (0,6)^{\frac{1}{10}}$

$p \geq 0,05$

Wartezeitaufgaben

Erster Treffer im n-ten Versuch

$P(E) = (1-p)^{n-1} \cdot p$

Erster Treffer frühestens im n-ten Versuch

$P(E) = (1-p)^{n-1}$

Erster Treffer spätestens im n-ten Versuch

$P(E) = 1 - (1-p)^n$

k-ter Treffer im n-ten Versuch

$P(E) = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p$

k-ter Treffer frühestens im n-ten Versuch

$P(E) = P(x \leq k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n-1;p;i)$

k-ter Treffer spätestens im n-ten Versuch

$P(E) = 1 - P(x \leq k-1) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} B(n;p;i)$

Zufallsexperiment Würfeln.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 6

- beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?
$P(E) = (1-\frac{1}{6})^{9-1} \cdot \frac{1}{6}$
- frühestens beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?
$P(E) = (1-\frac{1}{6})^{9-1}$
- spätestens beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?
$P(E) = 1 - (1-\frac{1}{6})^9$
- beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?
$P(E) = \binom{9-1}{3-1} \cdot \frac{1}{6}^{3-1} \cdot (1-p)^{9-3} \cdot \frac{1}{6}$
- frühestens beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?
$P(E) = \sum_{i=0}^{3-1} B(9-1;\frac{1}{6};i)$
- spätestens beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?
$P(E) = 1 - \sum_{i=0}^{3-1} B(9;\frac{1}{6};i)$

Interaktive Inhalte:
$P(X = k)$ $F(x)$ $P(k1 \leq X \leq k2)$ $P(X >, \geq, \leq ....k)$

5.3.8 Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Anzahl der Elemente: N=10
Anzahl der Züge: n=3
Anzahl der roten Kugeln: K=4
Ziehen ohne Zurücklegen

Definition

$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Voraussetzung

- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen
- Stichprobe ohne Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich
- N - Anzahl aller Elemente
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs
- K - Anzahl von A unter den N - Elementen
- Das Ereignis A tritt genau k-mal ein

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 rote Kugeln zu ziehen?
Anzahl der gezogenen roten Kugeln: k=2

$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{10-4}{3-2}}{\binom{10}{3}}$

$P(X = 2) = \frac{3}{10}$

Interaktive Inhalte:
$P(X = k)$

5.3.9 Erwartungswert - Varianz - Standardabweichung

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, x_3...$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

X	x_1	x_2	x_3	x_4	..
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	p_4	..

Erwartungswert:

$E(x) = \mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3....$

$E(x) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$

Varianz:

$Var(x) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3 + ...$

$Var(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{Var(x)}$

x	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{1}{5}$

Erwartungswert:

$E(x) = -1 \cdot \frac{2}{25} + 0 \cdot \frac{3}{25} + 1 \cdot \frac{7}{50} + 2 \cdot \frac{6}{25} + 3 \cdot \frac{11}{50} + 4 \cdot \frac{1}{5}$

$E(x) = \mu = 2$

Varianz:

$Var(x) = (-1-2)^2 \cdot \frac{2}{25} + (0-2)^2 \cdot \frac{3}{25} + (1-2)^2 \cdot \frac{7}{50}$
$+(2-2)^2 \cdot \frac{6}{25} + (3-2)^2 \cdot \frac{11}{50} + (4-2)^2 \cdot \frac{1}{5} = 2\frac{9}{25}$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{2\frac{9}{25}} = 1,54$

Binomialverteilung

Binomialverteilung B(n;p)

X	0	1	2	3	..
$P(X)$	$B(n;p;0)$	$B(n;p;1)$	$B(n;p;2)$	$B(n;p;3)$	..

Erwartungswert:

$E(x) = \mu = n \cdot p$

Varianz:

$Var(x) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{Var(x)}$

Binomialverteilung
$n = 50 \qquad p = 0,25$
Erwartungswert:
$E(x) = \mu = n \cdot p$
$E(x) = \mu = 50 \cdot \frac{1}{4}$
$E(x) = 12\frac{1}{2}$
Varianz:
$Var(x) = n \cdot p \cdot (1-p)$
$Var(x) = 50 \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{1}{4})$
$Var(x) = 9\frac{3}{8}$
Standardabweichung:
$\sigma = \sqrt{9\frac{3}{8}} = 3,06$

Interaktive Inhalte:
Statistik *Binomial*

5.4 Testen von Hypothesen

5.4.1 Einseitiger Signifikanztest

Ist ein Würfel gezinkt?
Die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln ist bei einem nicht gezinkten Würfel: $p = \frac{1}{6}$ (Nullhypothese). Bei einem gezinkten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs: $p > \frac{1}{6}$ (Gegenhypothese und Rechtsseitiger Signifikanztest). Der zu testende Würfel wird 100 mal geworfen (Stichprobenlänge). Man hält den Würfel für nicht gezinkt, wenn die Anzahl der gewürfelten Sechser höchstens 20 ist (Annahmebereich der Nullhypothese). Man hält den Würfel für gezinkt, wenn die Anzahl der gewürfelten Sechser mindestens 21 ist (Ablehungsbereich der Nullhypothese).
Zwei Fehler sind bei der Entscheidung möglich:

1. Der Würfel ist nicht gezinkt. Mit viel Glück kann man auch mit einem nicht gezinkten Würfel mehr als 20 mal die Sechs würfeln. Man hält den Würfel für gezinkt, obwohl er es nicht ist.(Fehler 1. Art)

2. Der Würfel ist gezinkt. Mit viel Pech kann man auch mit einem gezinkten Würfel weniger als 21 mal die Sechs würfeln. Man hält den Würfel für nicht gezinkt, obwohl er es ist. (Fehler 2. Art).

Ziel ist es die Wahrscheinlichkeit für die Fehler zu berechnen (Irrtumswahrscheinlichkeit).

Definitionen

• Testgröße: Binomial verteilte Zufallsgröße X
• Nullhypothese H_0: Vermutete Wahrscheinlichkeit für die Zufallsgröße X
• Gegenhypothese H_1: Alternative Wahrscheinlichkeit
• Stichprobenlänge n : Anzahl der durchgeführten Versuche
• Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich für die Nullhypothese
• Fehler 1. Art (α-Fehler): H_0 wird irrtümlich abgelehnt. Entscheidung gegen H_0, aber H_0 ist richtig.
• Fehler 2. Art (β-Fehler): H_0 wird irrtümlich angenommen. Entscheidung für H_0, aber H_0 ist nicht richtig.
• Irrtumswahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit für Fehler 1 Art. Berechnung durch: $\alpha = P_{p_0}^{n}($ Ablehnungsbereich von $H_0)$
• Signifikanzniveau: maximale Irrtumswahrscheinlichkeit

Testgröße: Anzahl der Sechsen beim Würfeln
Stichprobenlänge $n = 100$
Nullhypothese $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$
Gegenhypothese $H_1 : p > \frac{1}{6}$
Annahmebereich: $A = \{0..20\}$
Annahmebereich: $\overline{A} = \{21..100\}$

Rechtsseitiger Signifikanztest

	Annahmebereich	Ablehnungsbereich
	$A = \{0.....k\}$	$\overline{A} = \{k+1.....n\}$
$H_0 : p \leq p_0$	richtig	Fehler 1. Art
$H_1 : p > p_0$	Fehler 2. Art	richtig

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0 ,Annahme-und Ablehnungsbereich

Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$\alpha = P^n_{p_0}(\overline{A})$

$\alpha = P^n_{p_0}(X \geq k+1) = \sum_{i=k+1}^{n} B(n; p_0; i)$

$\alpha = 1 - P^n_{p_0}(X \leq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} B(n; p_0; i) = 1 - F(k)$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n,H_0,Signifikanzniveau

Gesucht:Annahme-und Ablehnungsbereich

$P^n_{p_0}(\overline{A}) \leq \alpha$

$P^n_{p_0}(X \geq k+1) \leq \alpha$

$1 - P^n_{p_0}(X \leq k) \leq \alpha$

$P^n_{p_0}(X \leq k) \geq 1 - \alpha$

Aufgabentyp 1

Gegeben:

$n = 100, H_0 : p \leq \frac{1}{6}$

$A\{0..20\}, \overline{A} = \{21..100\}$

Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art

$\alpha = P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \geq 21) = \sum_{i=21}^{100} B(100; \frac{1}{6}; i)$

$\alpha = 1 - P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \leq 20) = 1 - \sum_{i=0}^{20} B(100; \frac{1}{6}; i) = 1 - F(20)$

Aus Tafelwerk: $\sum_{i=0}^{20} B(100; \frac{1}{6}; i) = F(20) = 0,84811$

$1 - 0,84811 = 0,15189$

Irrtumswahrscheinlichkeit $= 15,19\%$

Aufgabentyp 2

Gegeben:

$n = 100; H_0 : p = \frac{1}{6}$

Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$

Gesucht: Entscheidungsregel

$A\{0..k\}; \overline{A}\{k+1..100\}$

$P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \geq k+1) \leq 0,05$

$\sum_{i=k+1}^{100} B(100; \frac{1}{6}; i) \leq 0,05$

$1 - P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \leq k) \leq 0,05$

$P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \leq k) \geq 1 - 0,05$

$P^{100}_{\frac{1}{6}}(X \leq k) \geq 0,95$

Aus Tafelwerk: $k = 23$

Entscheidungsregel

$A\{0..23\}; \overline{A}\{24..100\}$

Linksseitiger Signifikanztest

	Ablehnungsbereich	Annahmebereich
	$\overline{A} = \{0.....k\}$	$A = \{k+1.....n\}$
$H_0 : p \geq p_0$	Fehler 1. Art	richtig
$H_1 : p < p_0$	richtig	Fehler 2. Art

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0, Annahme-und Ablehnungsbereich

Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$\alpha = P^n_{p_0}(\overline{A})$

$\alpha = P^n_{p_0}(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p_0; i) = F(k)$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n, H_0,Signifikanzniveau α

Gesucht:Annahme-und Ablehnungsbereich

$P^n_{p_0}(\overline{A}) \leq \alpha$

$P^n_{p_0}(X \leq k) \leq \alpha$